§ 4 Аппроксимация функций

4.1. Общая задача аппроксимации

Аппроксимацией функции называется приближённое представление сложной или заданной в виде таблицы функции более простой функцией, имеющей минимальные отклонения от исходной функции.

4.2. Интерполяция многочленами

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

$$\varphi(x)$$

$$\varphi(x_0) = y_0; \varphi(x_1) = y_1; ...; \varphi(x_n) = y_n$$

$f(x) - ?$

$x \in [x_0; x_n]$ – интерполяция

$x \notin [x_0; x_n]$ – экстраполяция

$x_0; x_1; x_2; .... x_n$ – узлы интерполяции

Если приближение строится на заданном дискретном множестве точек $\{x_i\}$, то аппроксимация называется **точечной**.

При построении приближения на непрерывном множестве точек (например, на отрезке [a, b]) аппроксимация называется **непрерывной** (или интегральной).

Интерполяция на всем участке [a, b] называется **глобальной**, а на отдельных участках отрезка [a, b] – **кусочной** или **локальной**.

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n -$$

интерполяционный многочлен

$$P_n(x_0) = y_0;\ P_n(x_1) = y_1;\ \ldots;P_n(x_n) = y_n$$

Теорема. Какие бы ни были заданы значения функции в n+1 узлах, всегда существует и притом единственный многочлен степени не выше n, принимающий в этих узлах заданные значения

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + a_2x_0^{n-2} + \ldots + a_n = y_0 \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \ldots + a_n = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + a_2x_n^{n-2} + \ldots + a_n = y_n \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} \ldots. & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & x_1^{n-2} \ldots. & 1 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} \ldots. & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i>j}\left(x_i - x_j\right) \neq 0$$

4.3. Погрешность интерполирования

Погрешность аппроксимации функции $f(x)$ полиномом $\phi(x)$ можно оценивать по величине среднеквадратичного отклонения S_a

$$S_a = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\left[\varphi(x) - f(x)\right]^2$$

или по значению максимального отклонения

$$\delta_i(\varphi) = \left| f(x_i) - \varphi(x_i) \right| < \varepsilon\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

4.4. Интерполяционный многочлен Лагранжа

x	x_0	x_1	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	…	y_n

$$L_n(x)$$

$$L_n(x_0) = y_0;\, L_n(x_1) = y_1;\, \ldots;\, L_n(x_n) = y_n$$

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \ldots + l_n(x)$$

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \ldots + l_n(x)$$

$$l_i(x_k) = \begin{cases} y_{i,} & \text{если } i = k; \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

$$l_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

$$l_i = y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$\boxed{L_n = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}}$$

Пример. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции заданной таблицей.

x	-1	2	3
$f(x)$	12	3	4

Пример. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции заданной таблицей.

x	–1	2	3
f(x)	12	3	4

$$L_n = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

$$L_2(x) = 12\frac{(x-2)(x-3)}{(-1-2)(-1-3)} + 3\frac{(x+1)(x-3)}{(2+1)(2-3)} + 4\frac{(x+1)(x-2)}{(3+1)(3-2)} =$$

$$(x^2 - 5x + 6) - (x^2 - 2x - 3) + (x^2 - x - 2) = x^2 - 4x + 7$$

$$\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$

$$\Pi'_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)$$

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i \Pi_{n+1}(x)}{(x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)}$$

x	x_0	x_1	x_2	x_3	p_i	y_i	y_i / p_i
x_0	$x - x_0$	$x_0 - x_1$	$x_0 - x_2$	$x_0 - x_3$			
x_1	$x_1 - x_0$	$x - x_1$	$x_1 - x_2$	$x_1 - x_3$			
x_2	$x_2 - x_0$	$x_2 - x_1$	$x - x_2$	$x_2 - x_3$			
x_3	$x_3 - x_0$	$x_3 - x_1$	$x_3 - x_2$	$x - x_3$			
S							$\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{p_i}$

$$p_i = (x - x_i)\Pi'_{n+1}(x_i) \qquad L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{p_i}$$

Погрешность формулы Лагранжа

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{1}{(n+1)!}\left|\Pi_{n+1}(x)\right| \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$$

Многочлен Лагранжа для равноудаленных узлов

$x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,\ldots n,$

$h > 0$ – шаг интерполяции

$$y_i = f\left(x_i\right)$$

$$q = \frac{x - x_0}{h}$$

$$q_i = \frac{x_i - x_0}{h} = \frac{x_0 + ih - x_0}{h} = i$$

$$x - x_j = h\left(q - j\right) \qquad x_i - x_j = h\left(i - j\right)$$

$$L_1(x) = L_1(x_0 + hq) = (1-q)y_0 + qy_1$$

$$L_n(x) = L_n(x_0 + hq) = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{q-j}{i-j} y_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \frac{q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)}{i!(n-j)!} y_i$$

$$\max_{[x_0;x_n]} \left| f(x) - L_n(x) \right| \leq h^{n+1} \frac{M_{n+1}^h}{(n+1)!} \Omega_n$$

$$\Omega_n = \max_{[0;n]} \left| q(q-1)....(q-n) \right|$$

$$M_{n+1}^h = \max_{[x_0;x_n]} \left| f^{n+1}(x) \right|$$

4.5. Интерполяционные многочлены Ньютона

Конечной разностью первого порядка называется разность между двумя соседними значениями функции *f*:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

Конечной разностью порядка *p* называется разность двух последовательных разностей порядка *p-1*:

$$\Delta^p y_i = \Delta^{p-1} y_{i+1} - \Delta^{p-1} y_i \qquad i = 0,1,\ldots,n-1$$

Таблица конечных разностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	.....
x_2	y_2	Δy_2	.....	
x_3	y_3	....		
....	....			

$$\Delta^k y_i = h^k f^{(k)}(\xi)$$

$$\xi \in (x_i; x_i + kh)$$

$$\Delta^k y_i =$$

$$= \sum (-1)^j \cdot C_k^j \cdot y_{i+k-j}$$

$$C_k^j = \frac{k!}{(k-j)!\, j!}$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) +$$

$$+ \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Используется тогда, когда точка, в которой требуется вычислить приближенное значение функции находится вблизи точки x_0

$$t = \frac{x - x_0}{h}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &\approx P_n(x) = P_n(x_0 + th) = \\ &= y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \\ &+ \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \end{aligned}}$$

Первая интерполяционная формула Ньютона.
Используется для интерполирования вперед и экстраполирования назад.

Второй интерполяционный многочлен Ньютона для равноотстоящих узлов

$$P_n(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x - x_n) +$$

$$+ \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1})\ldots(x - x_1)$$

Используется тогда, когда точка, в которой требуется вычислить приближенное значение функции находится вблизи точки x_n

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

$$f(x) \approx P_n(x) = P_n(x_n + qh) =$$
$$= y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots +$$
$$+ \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0$$

Вторая интерполяционная формула Ньютона.
Используется для интерполирования назад и экстраполирования вперед.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots.(x-x_n)$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1)\ldots(t-n+1)}$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q+1)\ldots(q+n-1)}$$

Пример. По заданной таблице значений функции $y = lgx$ найти $lg1001$

x	y
1000	3,0000000
1010	3,0043214
1020	3,0086002
1030	3,0128372
1040	3,0170333
1050	3,0211893

Пример. По заданной таблице значений функции $y = lgx$ найти $lg1001$

x	y	Δy		
1000	3,0000000	0,0043214	-0,0000426	0,0000008
1010	3,0043214	0,0042788	-0,0000418	0,0000009
1020	3,0086002	0,0042370	-0,0000409	0,0000008
1030	3,0128372	0,0041961	-0,0000401	-
1040	3,0170333	0,0041560	-	-
1050	3,0211893	-	-	-

$$t = \frac{1001 - 1000}{10} = 0{,}1$$

$$\lg 1001 \approx 3{,}0000000 + 0{,}1 \cdot 0.0043214 +$$

$$+ \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{2} 0{,}0000426 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{6} 0{,}0000008$$

$$= 3{,}0004341$$

$$R_3(1001) = \frac{0{,}0000001}{(3+1)!} 0{,}1 \cdot (0{,}1 - 1) \cdot (0{,}1 - 2) =$$

$$= \frac{10^{-7}}{24} \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9 \approx 0{,}7 \cdot 10^{-9}$$

Интерполяционные многочлены Ньютона для неравноотстоящих узлов

Разделенными разностями первого порядка называются отношения:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

....

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Разделенными разностями порядка *k* называются отношения:

$$f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) =$$

$$= \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

$$k = 1, 2, \ldots; \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$f\left(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right) = \left[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}\right]$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

$$N_n(x) = y_0 + f(x_0, x_1)(x - x_0) +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \ldots +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

Второй интерполяционный многочлен Ньютона с разделенными разностями

$$N_n(x) = y_n + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) +$$
$$+ f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots +$$
$$+ f(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1)$$

$$R_n(x) = f(x_0, x_1, \ldots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

4.6. Интерполирование сплайнами

Пусть на [a; b] задана сетка

$$\overline{\Delta} : a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_l = b$$

P_m - множество полиномов степени m

$C^{(m)}[a;b]$ - множество функций, определенных на [a; b] и имеющих непрерывную *m*-ю производную.

Функция $s_m(x)$ называется ***полиномиальным сплайном*** степени m дефекта k $\left(1 \le k \le m\right)$ с узлами $a = \bar{x}_0 < \bar{x}_1 < \ldots < \bar{x}_l = b$ если:

1) $s_m(x) \in P_{m,}\ \forall x \in \left[\bar{x}_i ; \bar{x}_{i+1}\right],\ i = 0, \ldots, l-1$

2) $s_m(x) \in C^{(m)}[a;b]$

Пусть на [a; b] задана сетка $\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$
и некоторые числа $y_i,\ i = 0,\ldots,n$

Говорят, что сплайн $s_m(x)$ интерполирует функцию *f(x)* на заданной сетке, если

1) $s_m(x) \in P_{m,}\ \forall x \in [\bar{x}_i; \bar{x}_{i+1}],\ i = 0,\ldots,l-1$

2) $s_m(x) \in C^{(m)}[a;b]$

3) $s_m(x_i) = y_i = f(x_i),\ i = 0,\ldots,n$

Узлы сетки $\overline{\Delta}$ - узлы сплайна

Узлы сетки Δ – узлы интерполяции

Для сплайнов чётной степени $\overline{\Delta} = \Delta$

Для сплайнов нечётной степени $\overline{\Delta} \neq \Delta$

Пример

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

x	0,351	0,867	3,315	5,013	6,432
y	–0,572	–2,015	–3,342	–5,752	–6,911

Кусочно-линейная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & 0{,}351 \le x \le 0{,}867, \\ a_2 x + b_2, & 0{,}867 \le x \le 3{,}315, \\ a_3 x + b_3, & 3{,}315 \le x \le 5{,}013, \\ a_4 x + b_4, & 5{,}013 \le x \le 6{,}432. \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов строим систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0{,}351a_1 + b_1 = -0{,}572, \\ 0{,}867a_1 + b_1 = -2{,}015; \end{cases} \\ \begin{cases} 0{,}867a_2 + b_2 = -2{,}015, \\ 3{,}315a_2 + b_2 = -3{,}342; \end{cases} \\ \begin{cases} 3{,}315a_3 + b_3 = -3{,}342, \\ 5{,}013a_3 + b_3 = -5{,}752; \end{cases} \\ \begin{cases} 5{,}013a_4 + b_4 = -5{,}752, \\ 6{,}432a_4 + b_4 = -6{,}911. \end{cases} \end{cases}$$

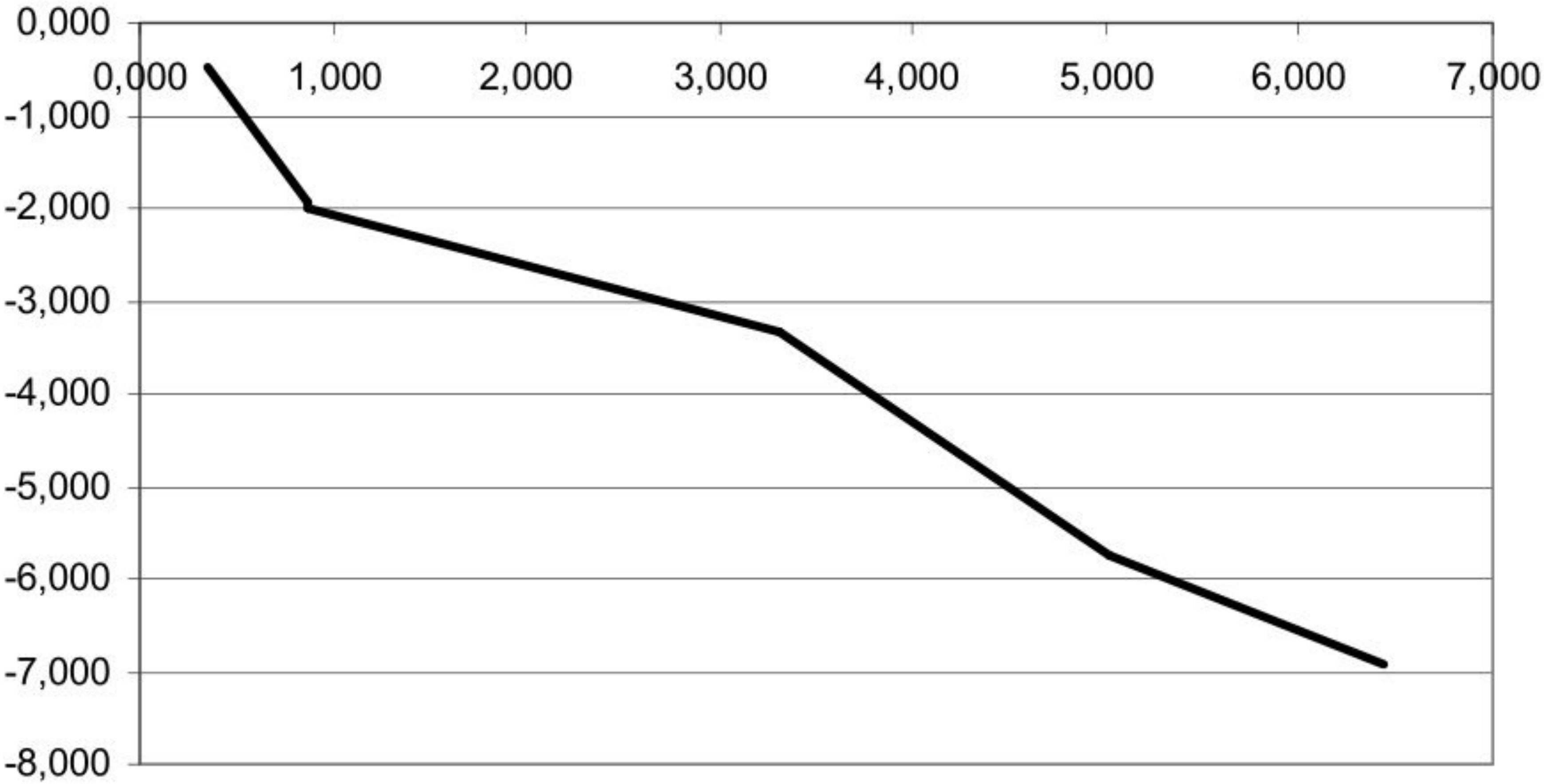
Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$a_1 = -2{,}797 \quad a_2 = -0{,}542 \quad a_3 = -1{,}419 \quad a_4 = -0{,}817$

$b_1 = 0{,}490$, $b_2 = -1{,}545$, $b_3 = 1{,}362$, $b_4 = -1{,}656$.

Тогда линейный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2{,}797x + 0{,}490, & 0{,}351 \le x \le 0{,}867, \\ -0{,}542x - 1{,}545, & 0{,}867 \le x \le 3{,}315, \\ -1{,}419x + 1{,}362, & 3{,}315 \le x \le 5{,}013, \\ -0{,}817x - 1{,}656, & 5{,}013 \le x \le 6{,}432. \end{cases}$$



0,000
-1,000
-2,000
-3,000
-4,000
-5,000
-6,000
-7,000
-8,000
0,000
1,000
2,000
3,000
4,000
5,000
6,000
7,000

Кусочно-квадратичная аппроксимация.

$$\varphi(x)=\begin{cases} a_1x^2+b_1x+c_1, & x\in[0{,}351;3{,}315] \\ a_2x^2+b_2x+c_2, & x\in[3{,}315;\ \ 6{,}432] \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 0{,}123a_1+0{,}351b_1+c_1=-0{,}572, \\ 0{,}752a_1+0{,}867b_1+c_1=-2{,}015, \\ 10{,}989a_1+3{,}315b_1+c_1=-3{,}342; \end{cases} \\ \begin{cases} 10{,}989a_2+3{,}315b_2+c_2=-3{,}342, \\ 25{,}130a_2+5{,}013b_2+c_2=-5{,}752, \\ 41{,}370a_2+6{,}432b_2+c_2=-6{,}911. \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

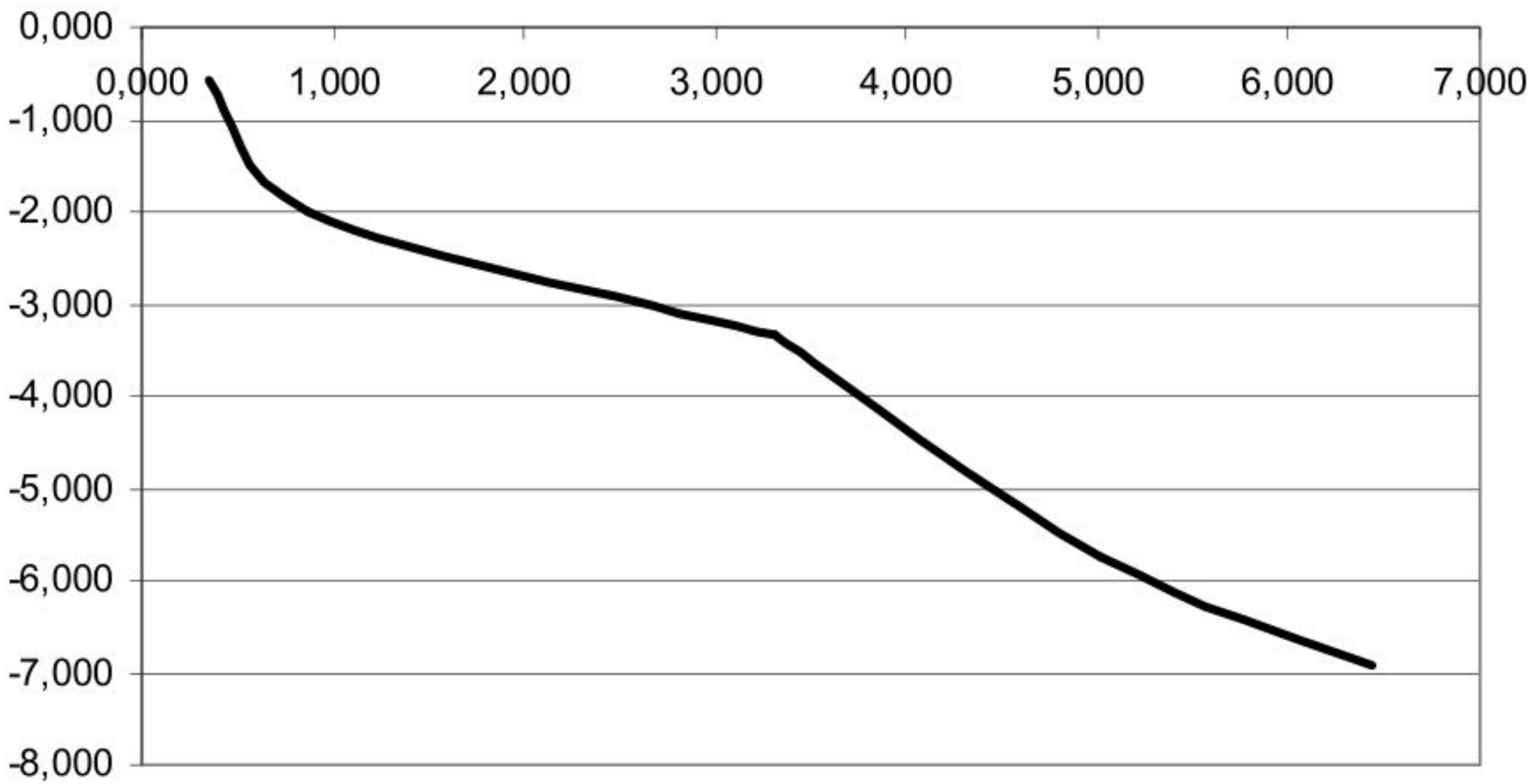
$$a_1 = 0{,}761 \quad a_2 = 0{,}193$$

$$b_1 = -3{,}724, \; b_2 = -3{,}029.$$

$$c_1 = 0{,}642 \quad c_2 = 4{,}576$$

Тогда квадратичный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0{,}761x^2 - 3{,}724x + 0{,}642, & x \in [0{,}351;3{,}315] \\ 0{,}193x^2 - 3{,}029x + 4{,}576, & x \in [3{,}315;3.6{,}432] \end{cases}.$$



0,000
-1,000
-2,000
-3,000
-4,000
-5,000
-6,000
-7,000
-8,000
0,000
1,000
2,000
3,000
4,000
5,000
6,000
7,000

Интерполяционным кубическим сплайном, соответствующим данной функции *f(x)*, называется функция *s(x)*, удовлетворяющая условиям:

1) на каждом сегменте $[x_i; x_{i+1}]$, $i = 0,\dots,n$ функция $s(x)$ - многочлен третьей степени

2) $s(x)$, $s'(x)$, $s''(x)$ непрерывны на $[a;b]$

3) $s(x_i) = f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$

$$[x_i; x_{i+1}]$$

$$s(x) = s_i(x) =$$

$$= a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3$$

$$a_i = s_i(x_i),\ \ b_i = s_i'(x_i),\ \ c_i = s_i''(x_i),\ \ d_i = s_i'''(x_i)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} s_i(x_i) = f(x_i) & \\ a_i = f(x_i) & \qquad\qquad i = 1, \ldots, n \\ a_0 = f(x_0) & \end{array}}$$

$$s_i(x_i) = s_{i+1}(x_i)$$

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) +$$

$$+ \frac{c_{i+1}}{2}(x_i - x_{i+1})^2 + \frac{d_{i+1}}{6}(x_i - x_{i+1})^3$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

$$\boxed{\begin{aligned} & h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = \\ & \qquad = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right) \\ & i = 1,\ldots,n-1 \\ & c_0 = c_n = 0 \end{aligned}}$$

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i}$$

$$b_i = \frac{h_i}{2} c_i - \frac{h^2{}_i}{6} d_i + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}$$

$$i = 1, \ldots, n-1$$

4.7. Метод наименьших квадратов

x	x_0	x_1	…	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	…	y_n

$$y = F(x)$$

$$\overline{y}_0, \overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$$

$$(y_0 - \overline{y}_0)^2 + (y_1 - \overline{y}_1)^2 + \ldots + (y_n - \overline{y}_n)^2$$

$$y = F(x, a, b, c)$$

$$F(x_i, a, b, c) = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[y_i - F(x_i, a, b, c) \right]^2 = \Phi(a, b, c)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0; \ \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 0; \ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0,$$

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - F(x_i,a,b,c)]F'_a(x_i,a,b,c) = 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} 2[y_i - F(x_i,a,b,c)]F'_b(x_i,a,b,c) = 0 \\ -\sum 2[y_i - F(x_i,a,b,c)]F'_c(x_i,a,b,c) = 0 \end{cases}$$

$$y_i - F(x_i, a, b, c) = \varepsilon_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$$

$F(x) = ax + b$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M_{x^2}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = M_x$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = M_{xy}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = M_y$$

$$\boxed{\begin{cases} aM_{x^2} + bM_x = M_{xy} \\ aM_x + b = M_y \end{cases}} \qquad (*)$$

$$F(x) = ax^2 + bx + c.$$

$$\begin{cases} aM_{x^4} + bM_{x^3} + cM_{x^2} = M_{x^2 y} \\ aM_{x^3} + bM_{x^2} + cM_{x} = M_{xy} \\ aM_{x^2} + bM_{x} + c = M_{y} \end{cases}$$

$$F(x) = ax^m$$

$$\ln F(x) = \ln a + m\ln x$$

в таблице логарифмируем все значения x_i и y_i и находим параметры $a = m$ и $b = \ln a$ из системы (*)

$$F(x) = ae^{mx}$$

$$\ln F(x) = \ln a + mx$$

В таблице логарифмируем только значения y_i , находим параметры $a = m$ и $b = \ln a$ из системы (*)

$$F(x) = \frac{1}{ax+b}$$

$$\frac{1}{F(x)} = ax+b$$

В таблице все значения y_i заменяются на обратные, x_i остаются без изменения.

Параметры a и b находятся из системы (*)

$$F(x) = \frac{a}{x} + b$$

Все значения x_i заменяются на обратные,
а y_i остаются без изменения.

Параметры a и b находятся из системы (*)

$$F(x) = \frac{x}{ax+b}$$

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{ax+b}{x} = a + \frac{b}{x}$$

Все значения x_i и y_i заменяются на обратные.

Параметры a и b находятся из системы (*)

$$F(x) = a \ln x + b$$

Логарифмируем только значения x_i.

Параметры a и b находятся из системы (*)

Пример. По заданной таблице значений *x* и *y* найти методом наименьших квадратов эмпирическую формулу

x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,87	6,70	7,53
y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,30	2,89	3,29	3,87

$$F(x) = ax + b$$

$$\begin{cases} aM_{x^2} + bM_x = M_{xy} \\ aM_x + b = M_y \end{cases} \qquad \text{.} \quad (*)$$

x	1,73	2,56	3,39	4,22	5,05	5,87	6,70	7,53
y	0,63	1,11	1,42	1,94	2,30	2,89	3,29	3,87

$$\begin{cases} 25{,}05a + 4{,}63b = 12{,}09 \\ 4{,}63a + b = 2{,}18 \end{cases}$$

$a = 0{,}55$; $b = -0{,}37$

$y = 0{,}55x - 0{,}37$.

$\overline{y}$	0,58	1,04	1,49	1,95	2,41	2,86	3,32	3,77
ε	0,05	0,07	-0,07	-0,01	-0,11	0,03	-0,03	0,1

$$\sigma_1 = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_5^2 + \varepsilon_6^2 + \varepsilon_7^2 + \varepsilon_8^2 = 0{,}04$$