Издательство «Легион»

Методы решения задач повышенной сложности по геометрии (ЕГЭ).

Семинар с практической частью.

Фридман Елена Михайловна

Основные методы решения геометрических задач

- ✔ Метод дополнительных построений
- ✔ Метод геометрических преобразований
- ✔ Метод подобия
- ✔ Метод площадей
- ✔ Метод вспомогательной окружности
- ✔ Метод геометрического видения
- ✔ Метод координат
- ✔ Векторный метод

Основные факторы успеха

- Время (чем больше времени на подготовку, тем лучше)
- Система (работа по плану, а не от случая к случаю)
- Желание

подготовиться

Причины ошибок в решении геометрических задач

- ✔ **Незнание и/или непонимание аксиом, определений, теорем, а также методов решения задач;**
- ✔ **неумение их применять, (в том числе, применять их неверно);**
- ✔ **невнимательное чтение условия и вопроса задания;**
- ✔ **вычислительные ошибки;**
- ✔ **нарушения логики в рассуждениях;**
- ✔ **принятие ошибочных гипотез;**
- ✔ **недостатки в работе с рисунком.**

Данные о выполнении заданий с развернутым ответом по геометрии в 2017 году (профильный уровень, в %)

№14 (стереометрия)		№16 (планиметрия)		
1 балл	2 балла	1 балл	2 балла	3 балла
8,5	**1,7**	**3,4**	**0,22**	**1,4**


Задача 14
а) Построение сечения (+ доказательство)
б) Нахождение расстояния, площади фигуры, объема фигуры или её части
б) Нахождение угла

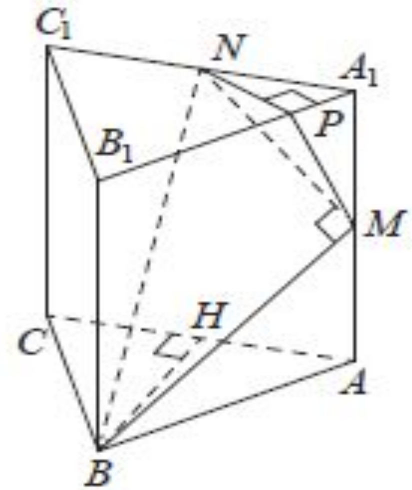
14 Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N — середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение. а) Пусть точка H — середина AC. Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2 + 6^2 = 63.$$



Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1. Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому $\sin\angle NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$.

Следовательно, $\angle NMP = \arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	2
Выполнен только один из пунктов *а* и *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*2*

Что нужно знать

- ***Аксиомы и теоремы стереометрии и планиметрии***
- ***Правила изображения (проектирования) пространственных фигур на плоскость***
- ***Основные методы построения сечений многогранников***

Что нужно уметь

Применять знания в процессе решения задачи:

- *Увидеть*, что нужно построить на каждом шаге построения сечения
- *Предложить способ* построения
- *Построить* (точку, линию, плоскость и т.д.)

Veni, vidi, vici (пришел, увидел, победил)

Задача.
(Задание 14 ЕГЭ 2017 основная волна)

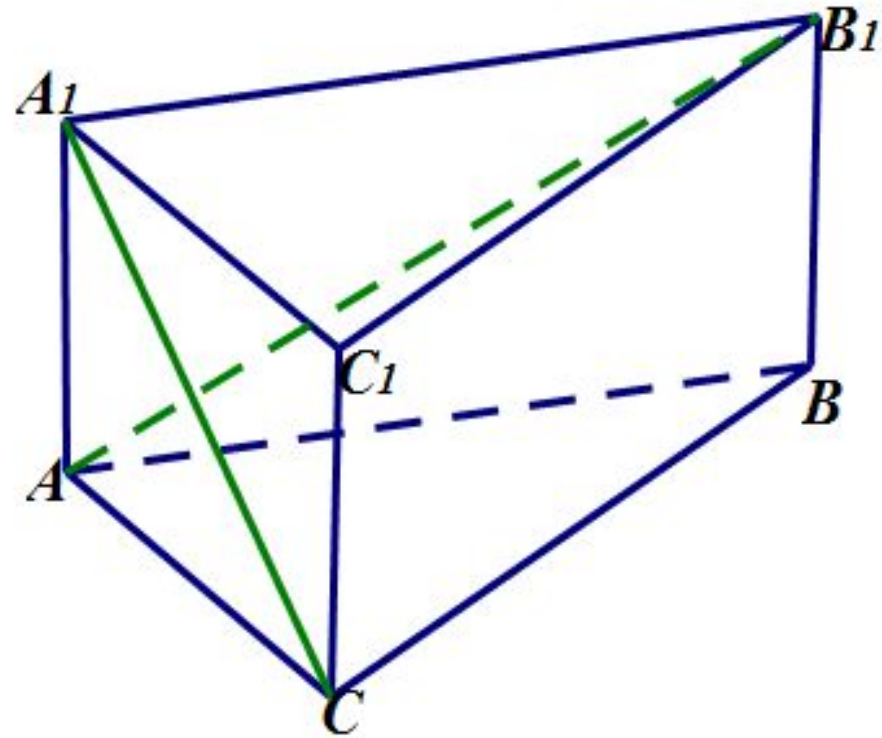
Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Прямые CA_1 и AB_1 перпендикулярны.

а) Докажите, что $AA_1=AC$.

б) Найдите расстояние

между CA_1 и AB_1 ,

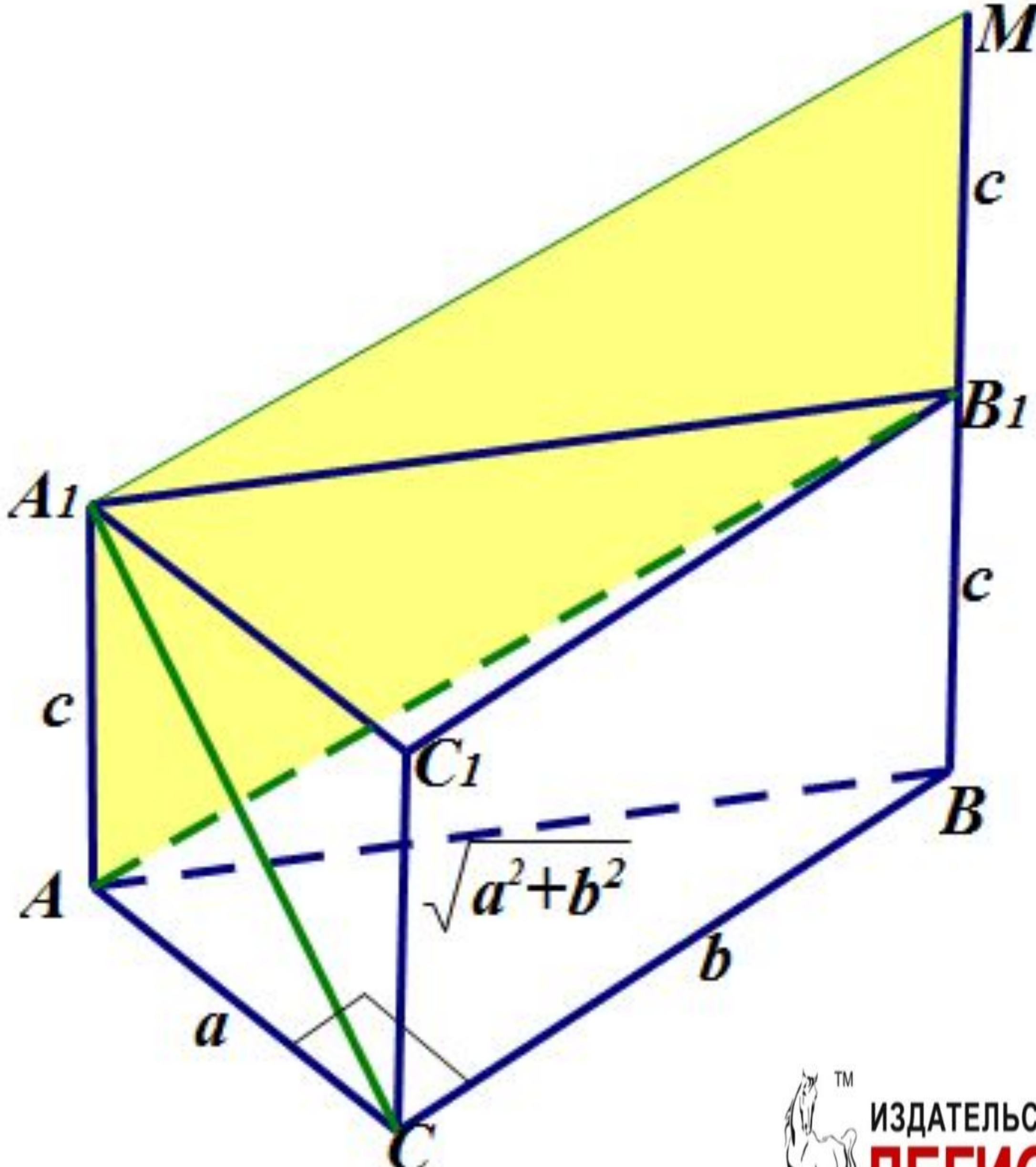
если $AC=7$, $BC=8$.



Решение.

Способ 1

а) $a = c$?



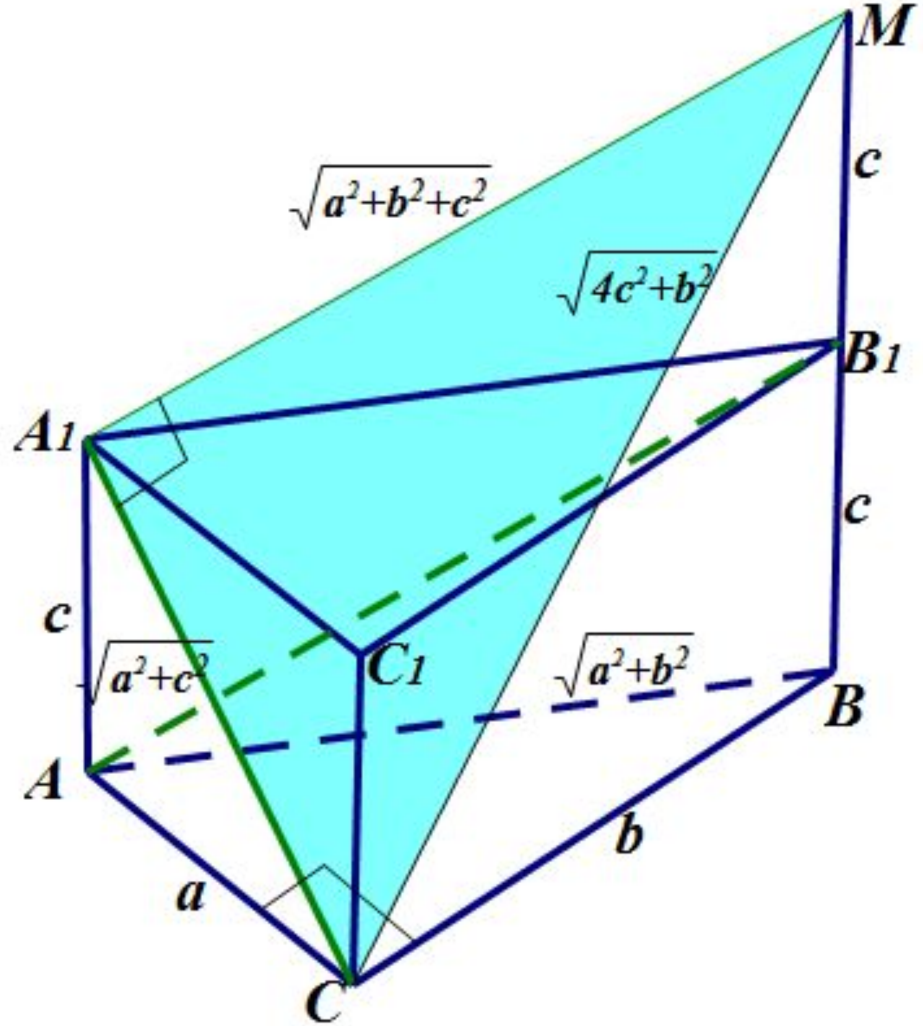
$(a^2+c^2)+(a^2+b^2+c^2)=4c^2+b^2$

$2a^2+2c^2=4c^2$

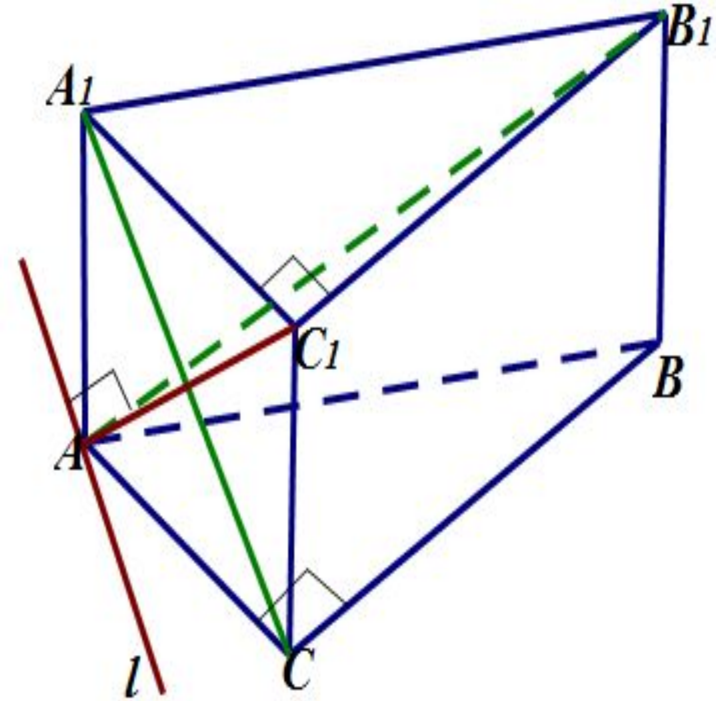
$a^2=c^2$

$a=c$

$AA_1=AC$.



Способ 2



$l \parallel A_1C$

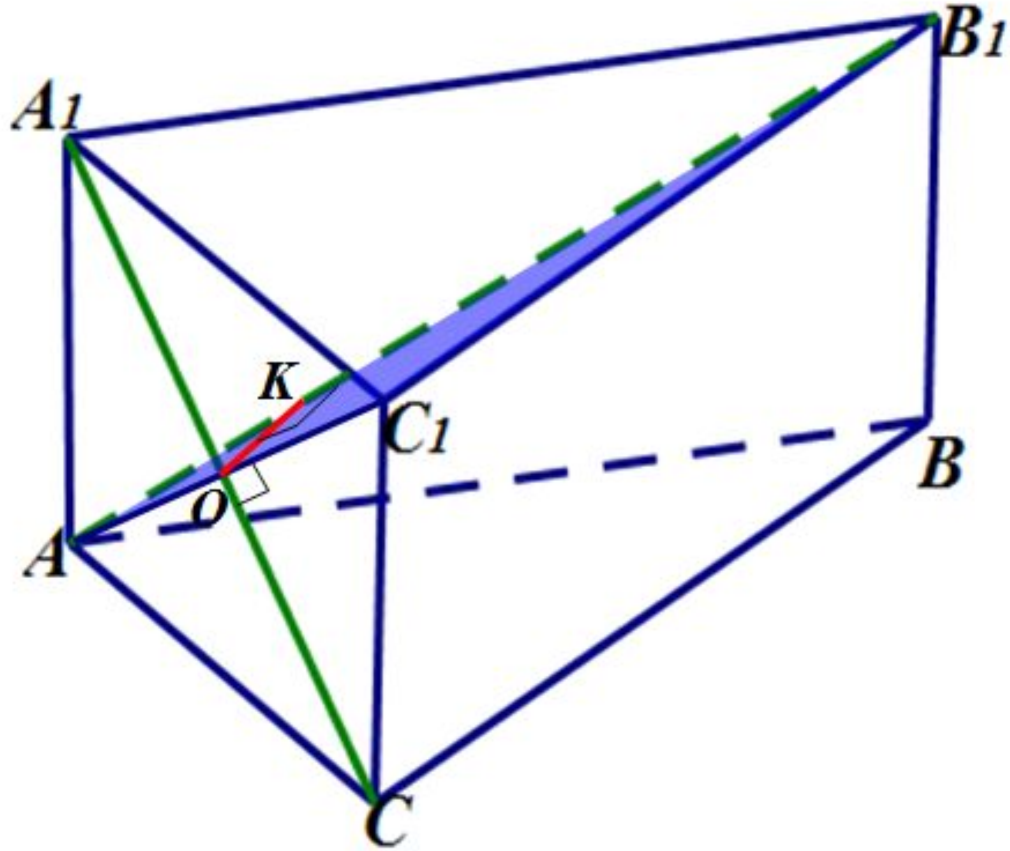
AB_1 – наклонная к плоскости AA_1C_1, $AB_1 \perp l$ (по условию), AC_1 – проекция AB_1,

$AC_1 \perp A_1C$

AA_1C_1C – прямоугольник, значит, квадрат.

$AA_1=AC$.

б)



$OK \perp AB_1$

$A_1C \perp (AB_1C_1) \Rightarrow$

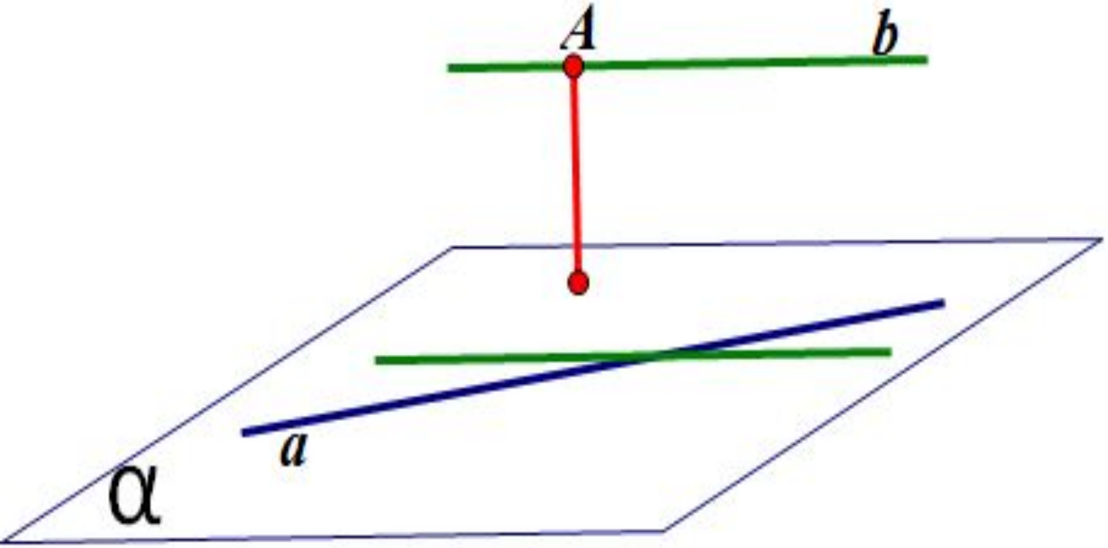
$OK \perp A_1C.$

$\Delta AKO \sim \Delta AB_1C_1$

$$\frac{OK}{B_1C_1} = \frac{AO}{AB_1}$$

$$\frac{OK}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{162}}$$

$$OK = \frac{4 \cdot 7\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{28}{9}$$



$$\rho(a,b)=\rho(A,\alpha)$$

$$\rho=\frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки,

$ax+by+cz+d=0$ – уравнение плоскости.

б) ***Способ 2***

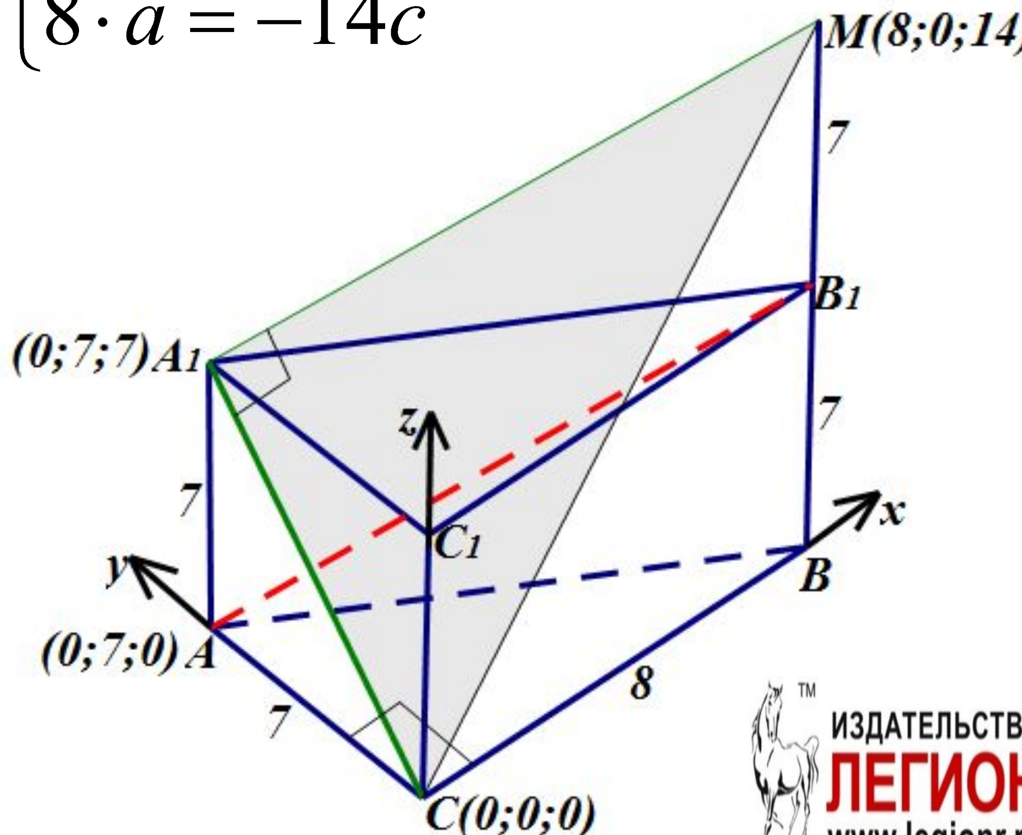
$$\rho(AB_1, A_1C) = \rho(AB_1, A_1CM) = \rho(A, A_1CM).$$

$$ax+by+cz+d=0,\ d=0. \qquad ax+by+cz=0$$

$$\begin{cases} 0\cdot a+7\cdot b+7\cdot c=0, \\ 8\cdot a+0\cdot b+14c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b=-c, \\ 8\cdot a=-14c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-c, \\ a=-\dfrac{7}{4}c \end{cases} \qquad 7x+4y-4z=0$$

$$\rho=\frac{7\cdot 0+4\cdot 7+7\cdot 0}{\sqrt{7^2+4^2+4^2}}=\frac{28}{9}$$



Основные методы построения сечений многогранников

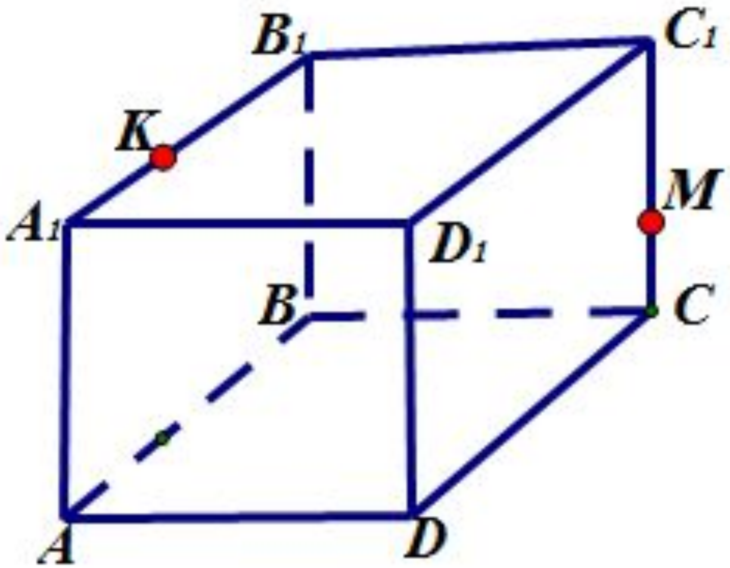
- ✔ **Аксиоматический**
- ▪ Метод следов
- ▪ Метод вспомогательных сечений (метод внутреннего проектирования)
- ✔ **Комбинированный метод**

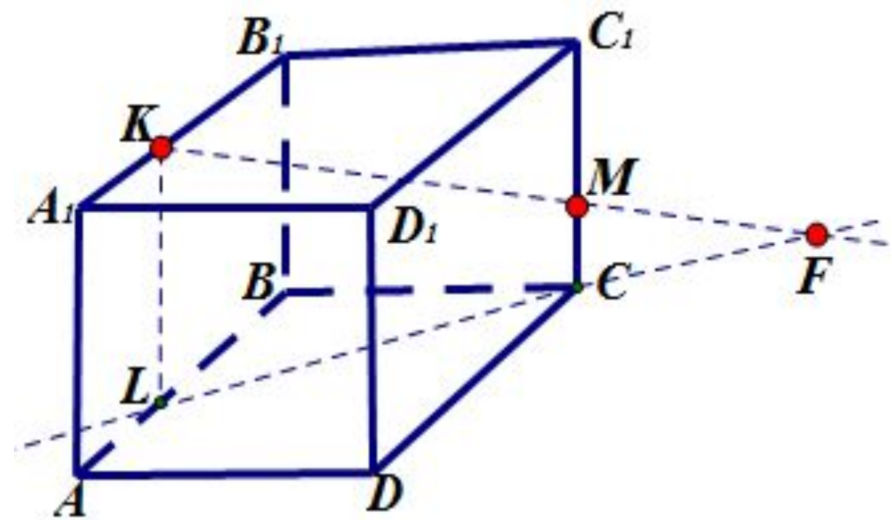
Метод следов

Понятие следа

- *Линия пересечения* плоскости сечения и плоскости грани многогранника называется ***следом секущей плоскости на плоскости этой грани многогранника***.
- *Точка пересечения* плоскости сечения и прямой, содержащей ребро многогранника, называется ***следом секущей плоскости на прямой, содержащей это ребро многогранника***.

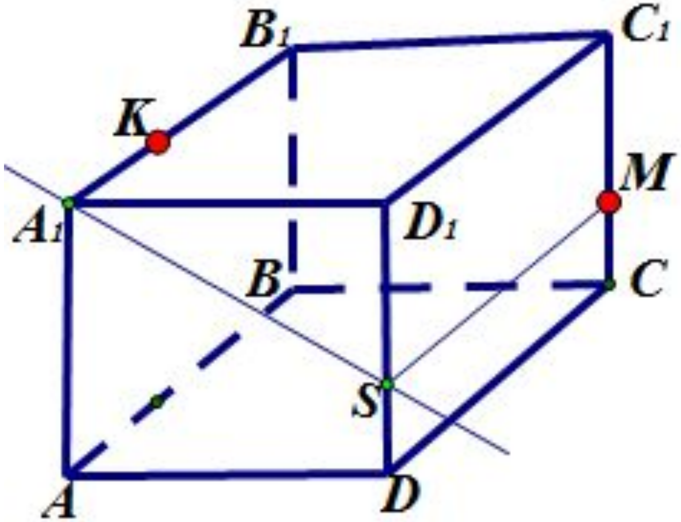
Задача. а) Постройте проекцию (след) прямой KM на плоскость нижнего основания куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.





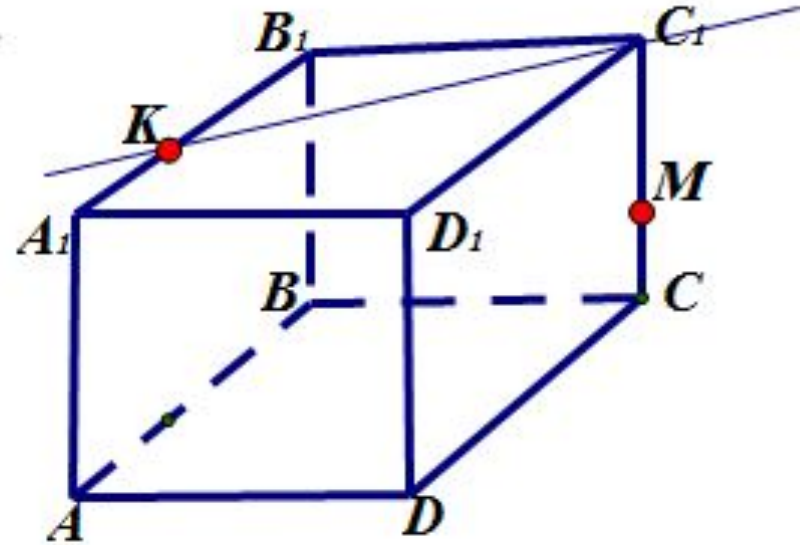
Для призмы при построении сечения выполняем *параллельное проектирование* (направление проектирования параллельно боковому ребру).

б)



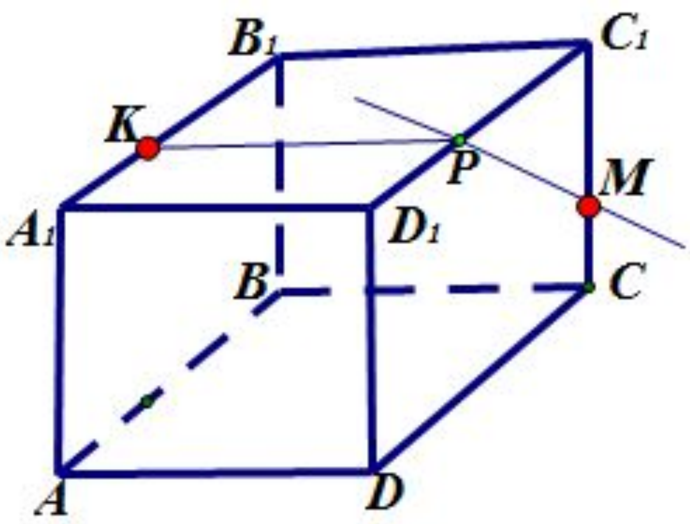
A_1S - проекция KM на плоскость AA_1D_1D

в)



KC_1 - проекция KM на плоскость $A_1B_1C_1D_1$

г)



MP - проекция KM на плоскость CC_1D_1D

Можно построить следы KM на левой боковой и задней гранях.

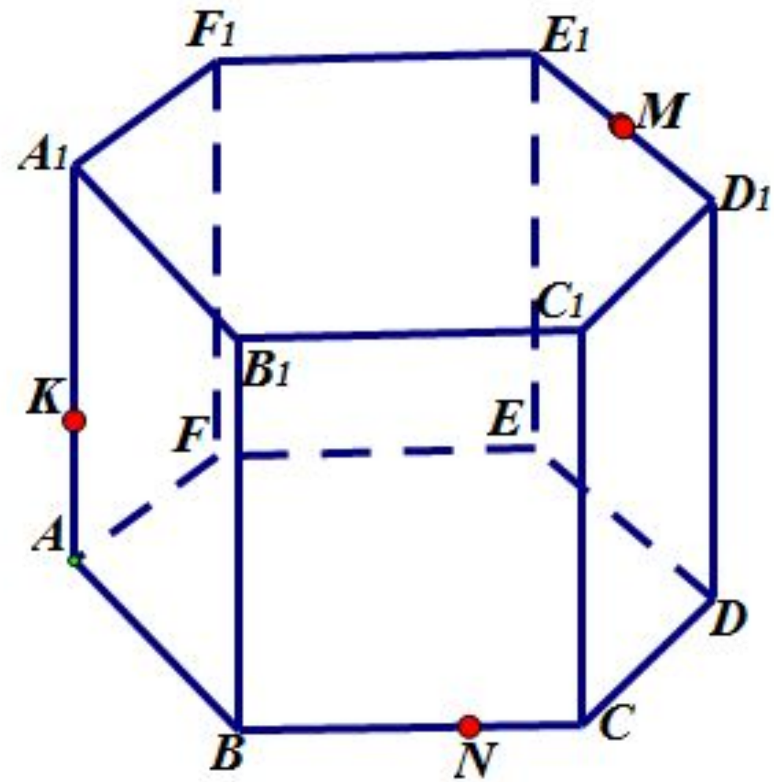
Задача. $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ правильная шестиугольная призма. Постройте проекцию (след) плоскости сечения MNK на плоскости:

а) ABC; б) AA_1B_1B;

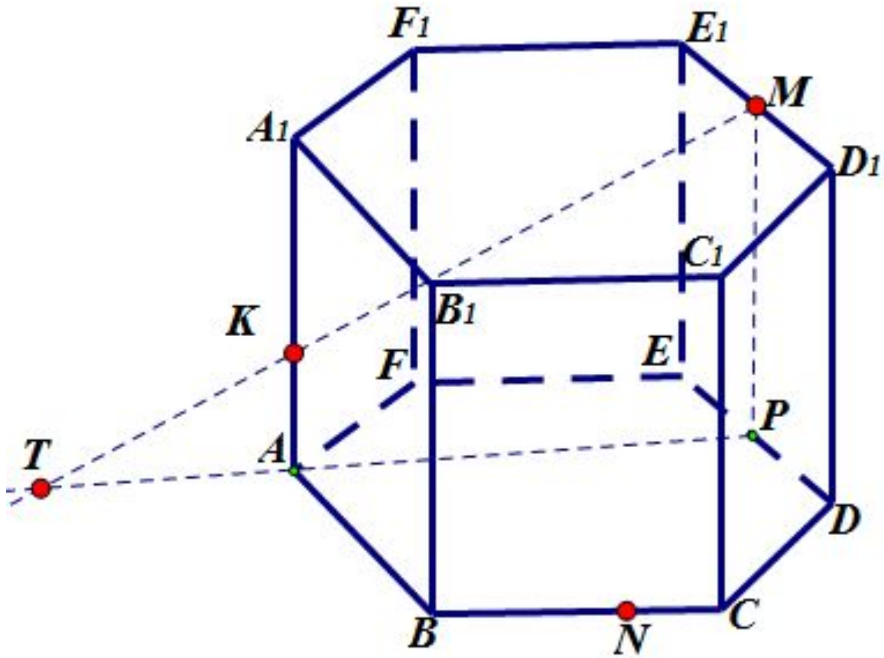
в) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$;

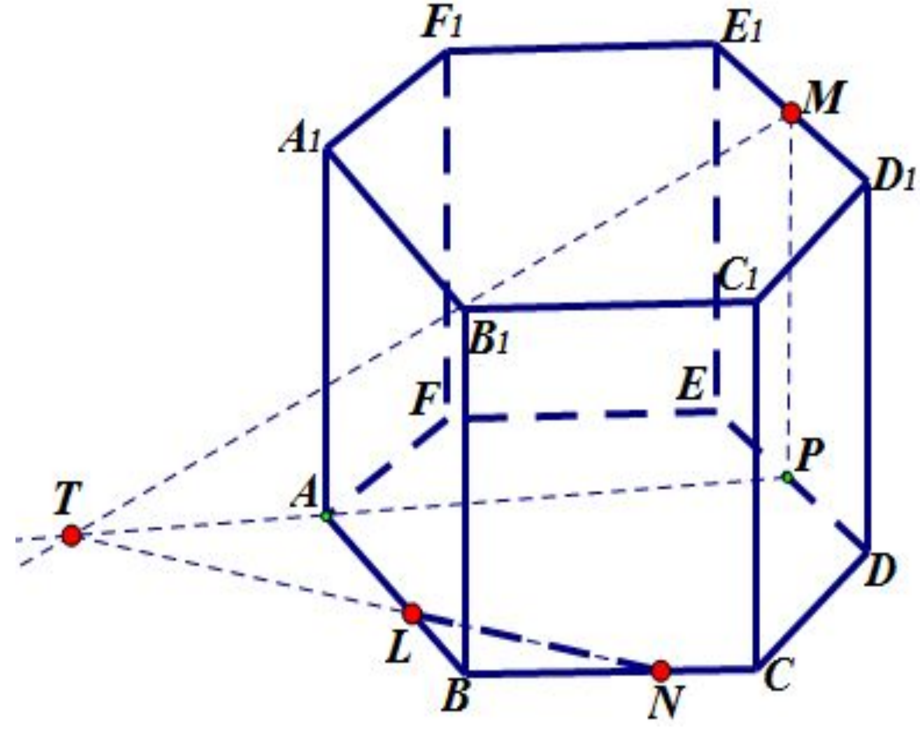
г) DD_1E_1E;

д) CC_1D_1D.

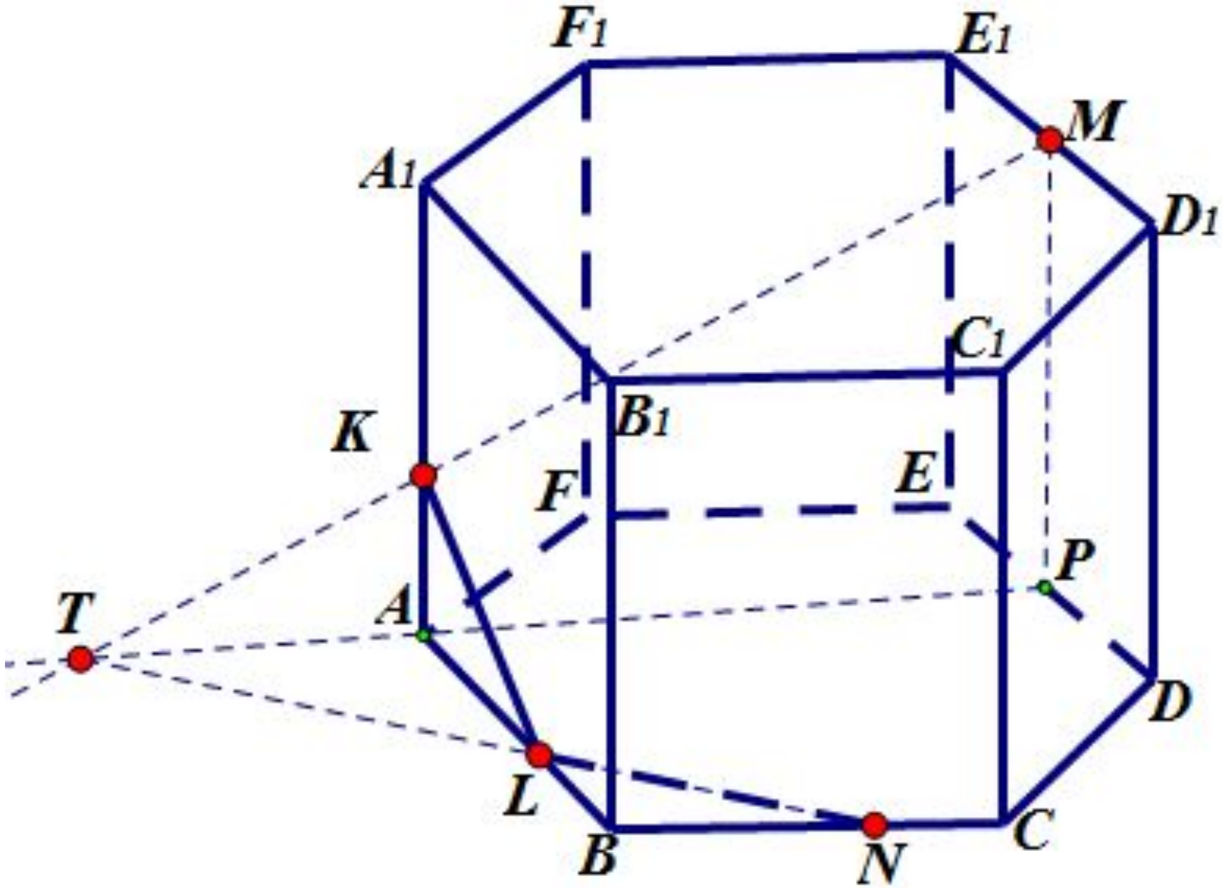


а)

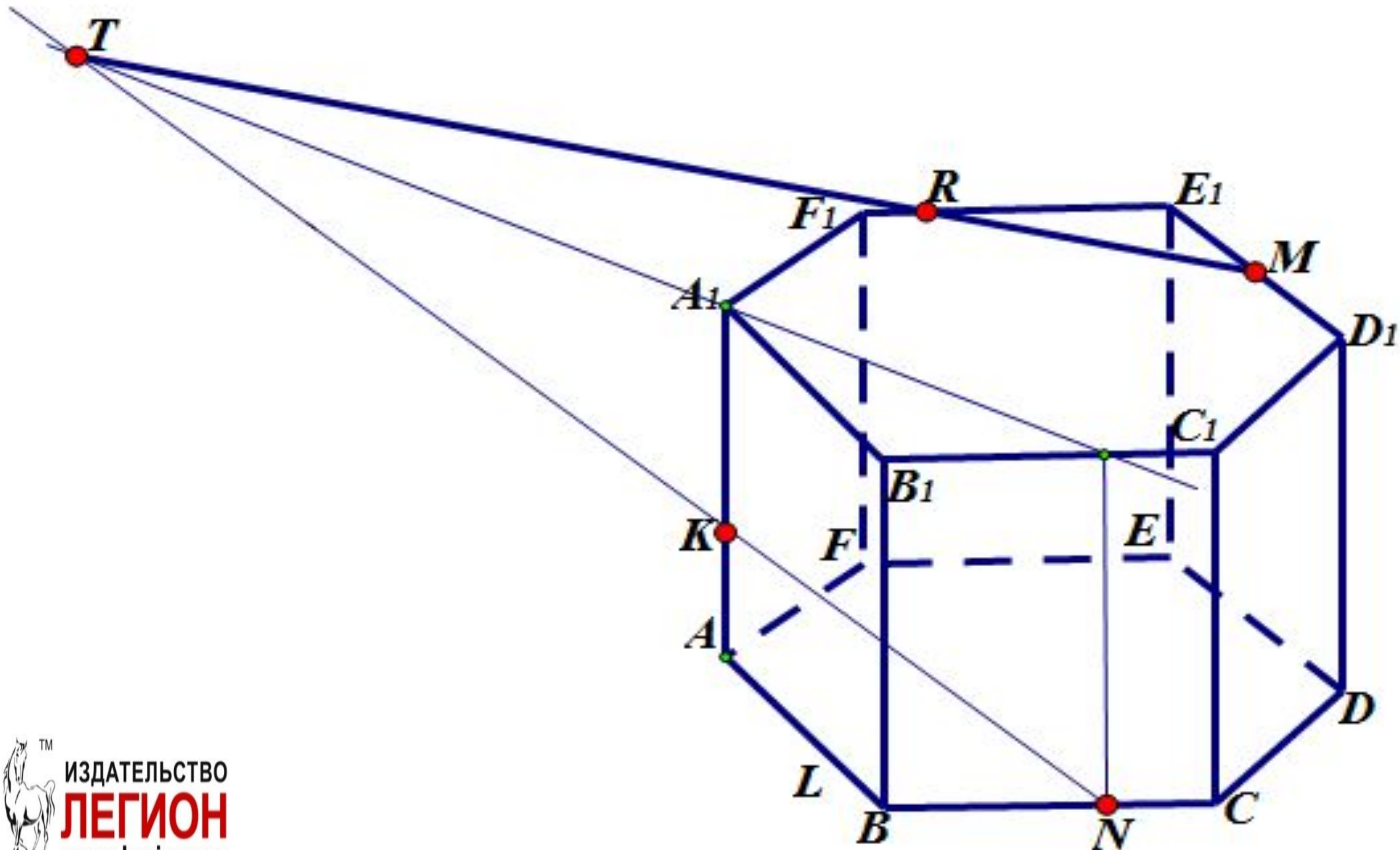




б) AA_1B_1B



в) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$

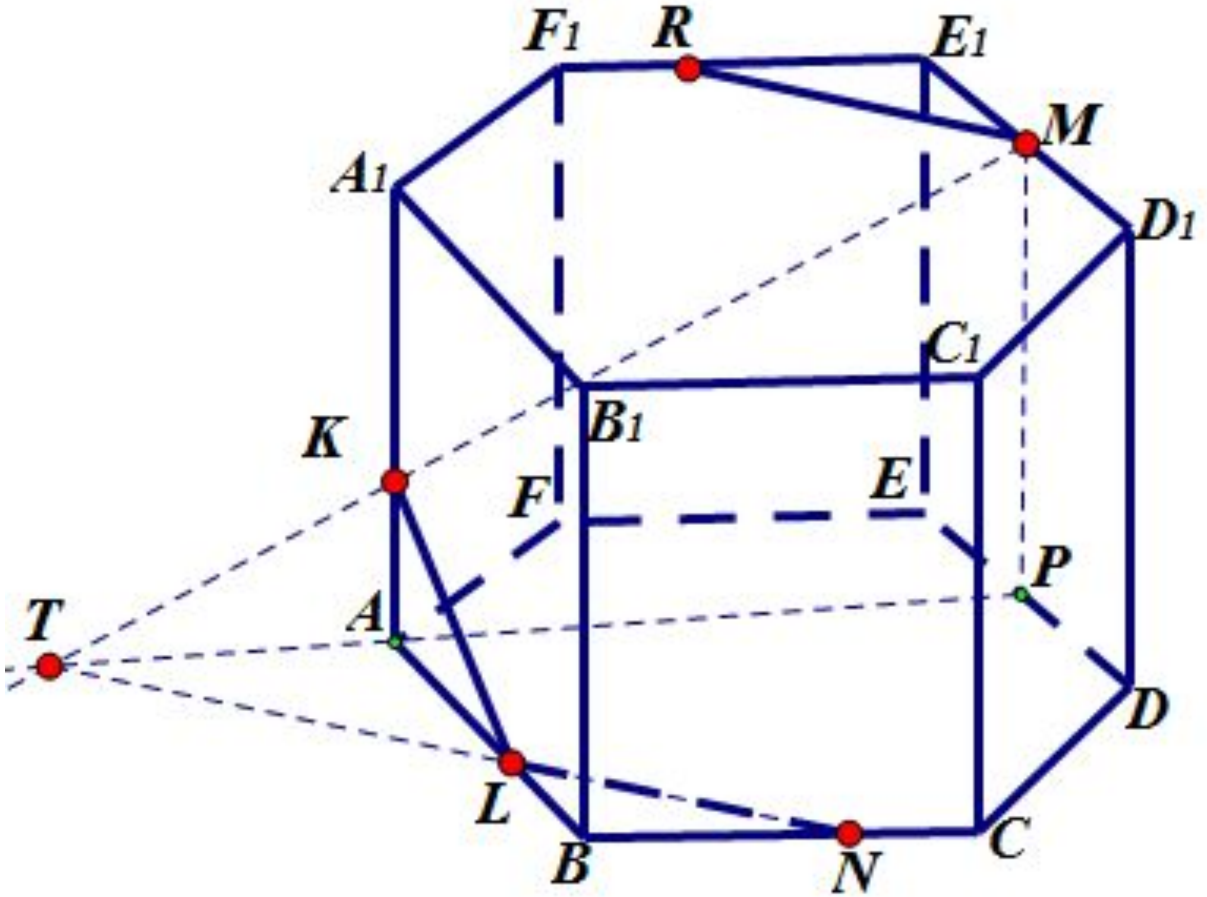


Комбинированный метод

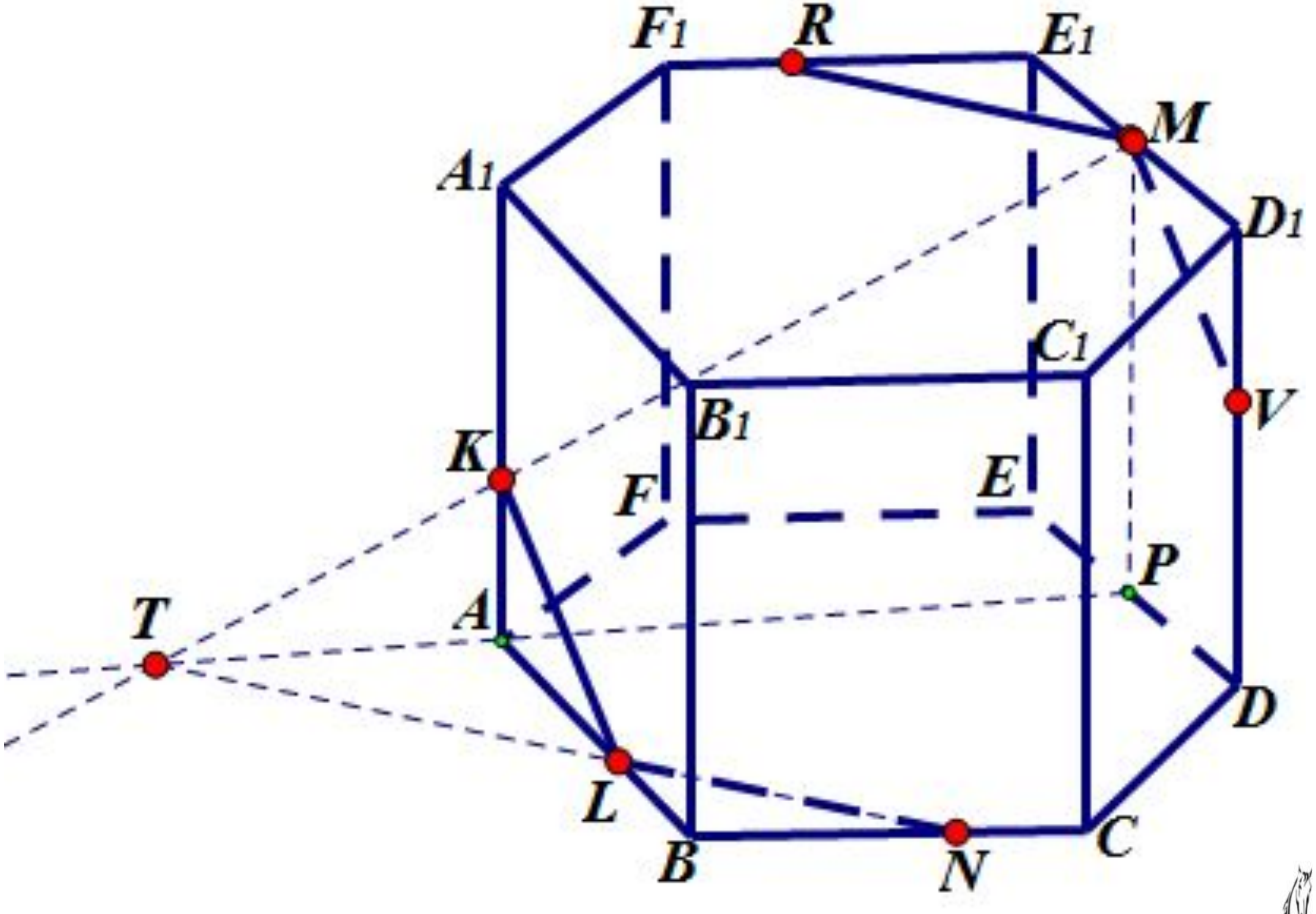
Сочетание применения теорем о параллельности прямых и плоскостей в пространстве и аксиоматического метода.

в) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (комбинированный метод)

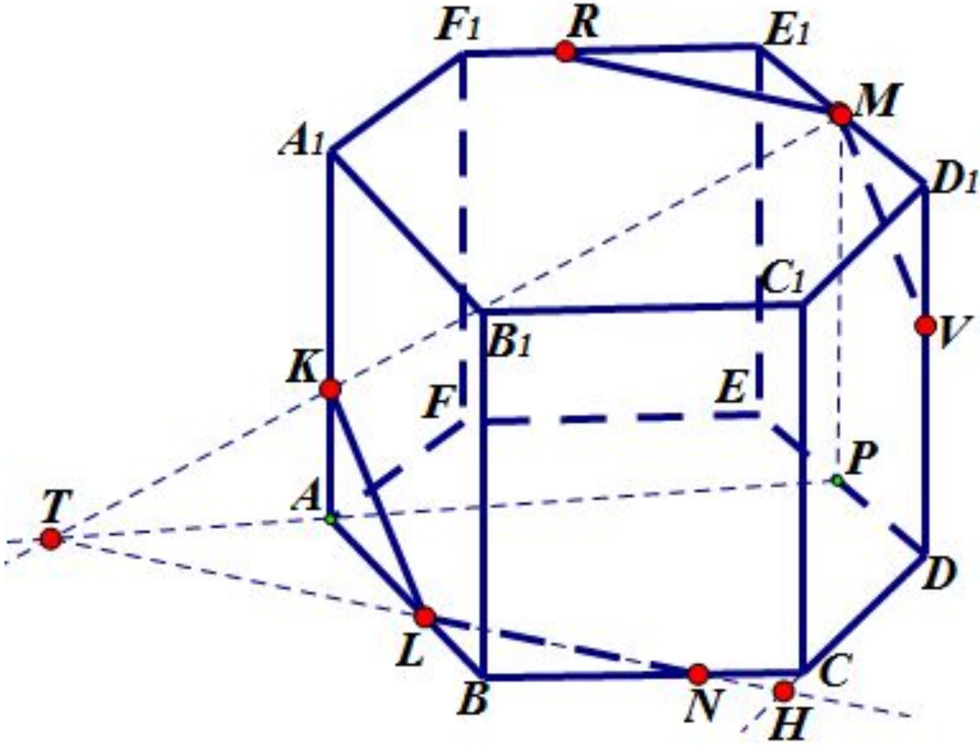
$RM \parallel LN$

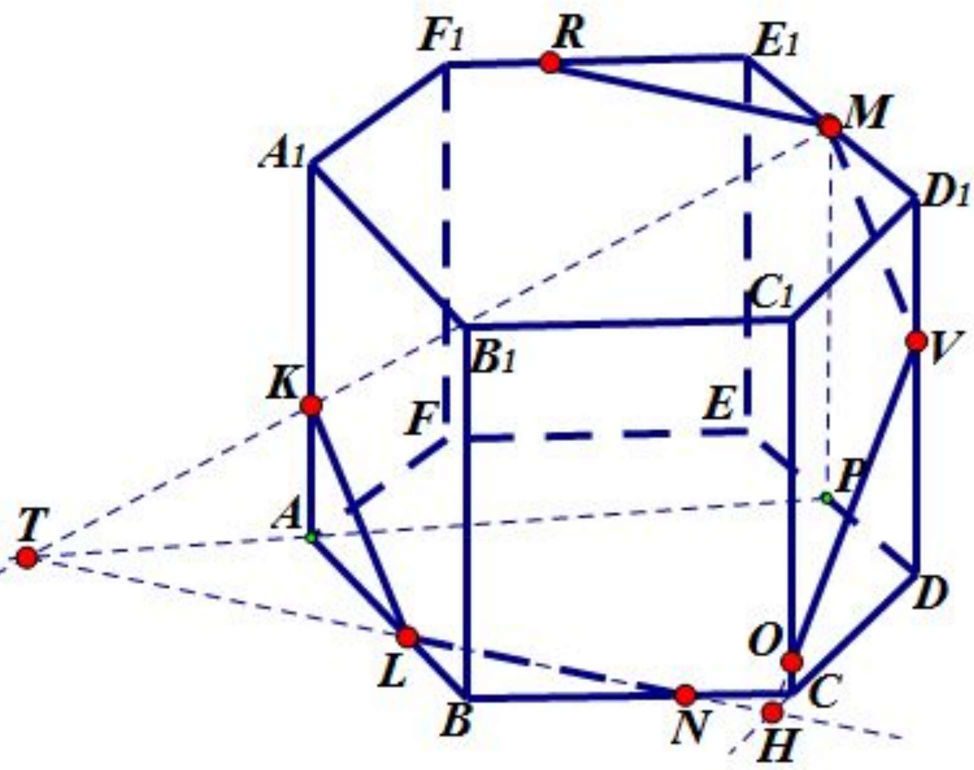


г) DD_1E_1E (комбинированный метод)

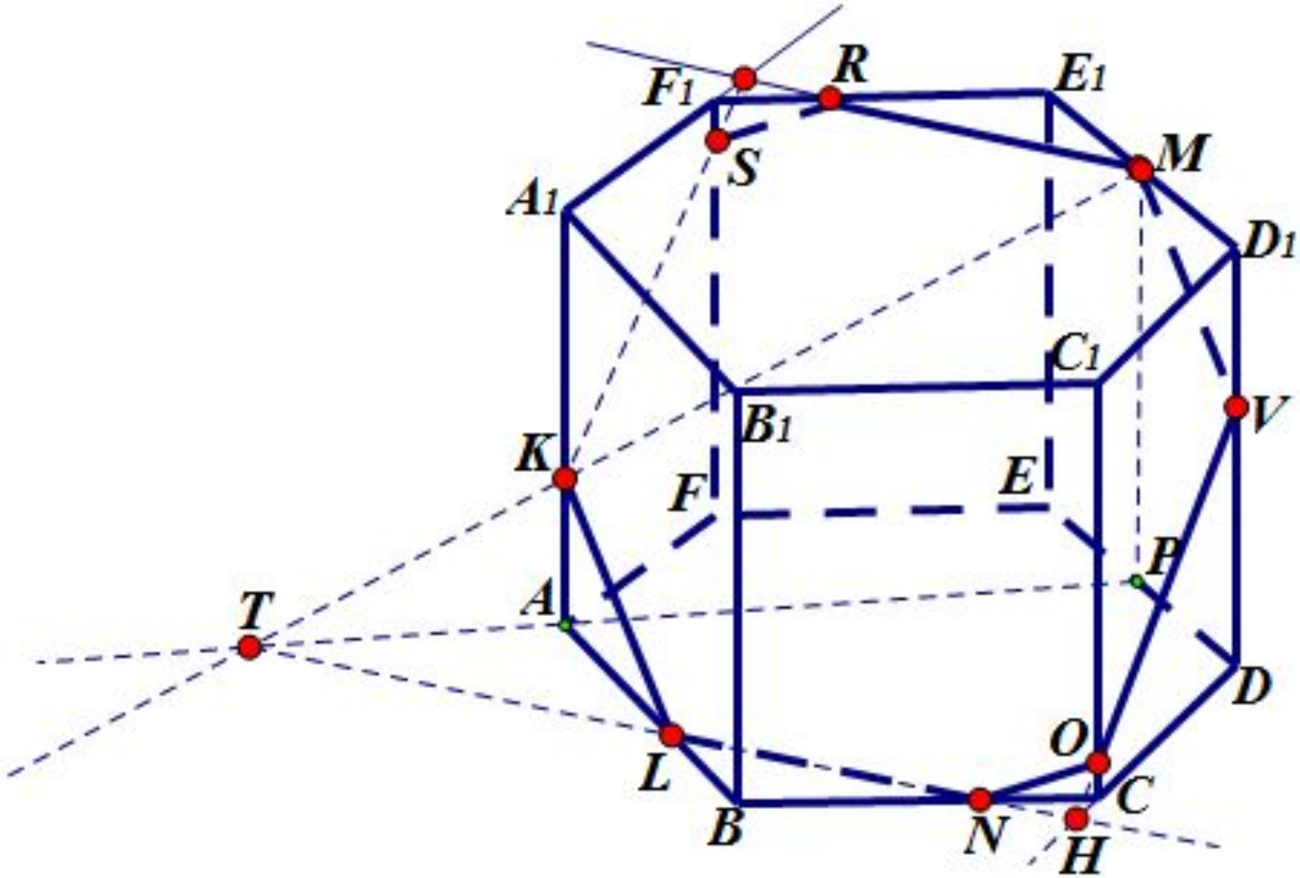


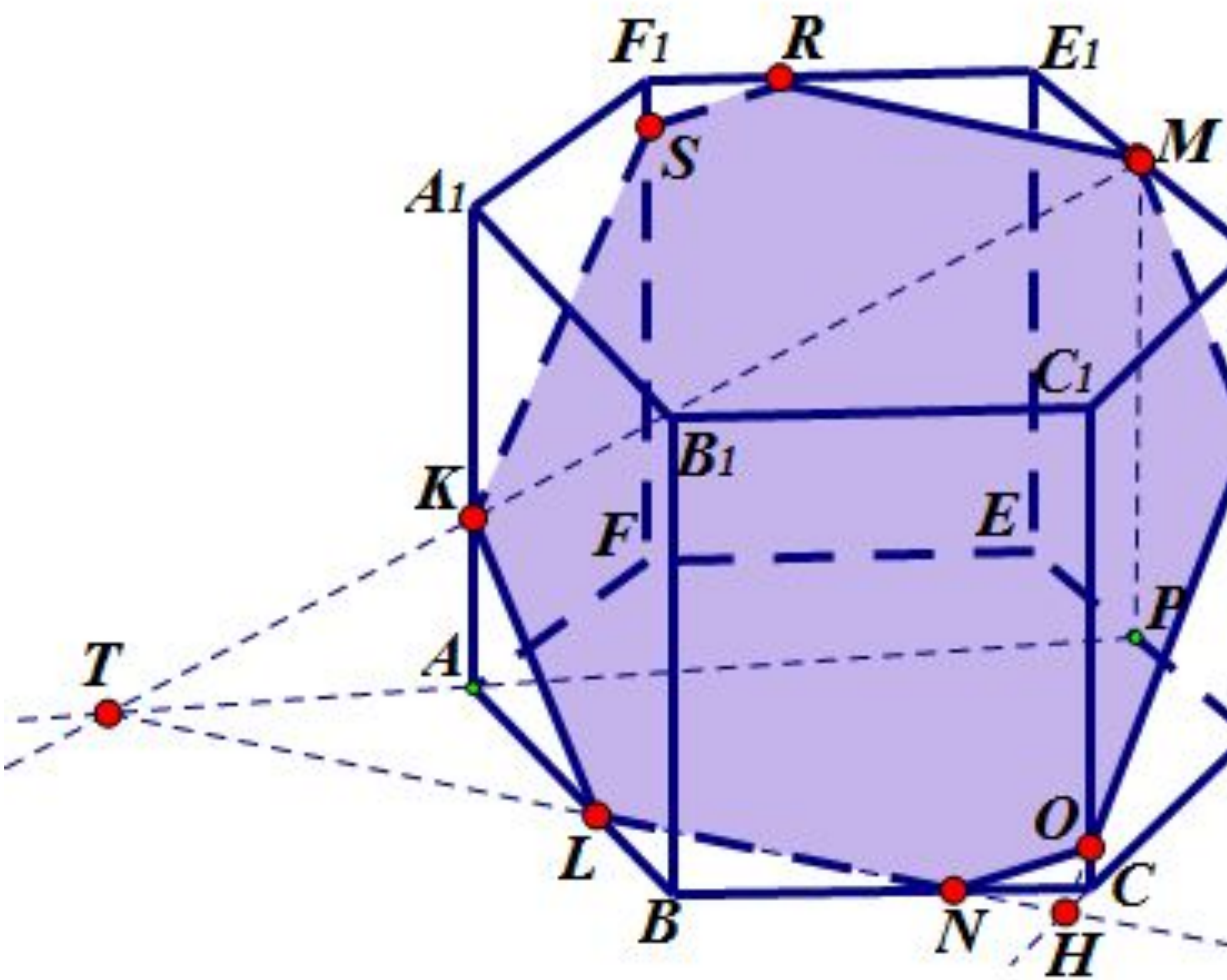
д) CC_1D_1D


F1
R
E1
M
A1
D1
C1
B1
V
K
F
E
P
T
A
D
L
B
N
C
H


F1
R
E1
M
A1
D1
C1
B1
V
K
F
E
P
T
A
D
O
L
C
B
N
H

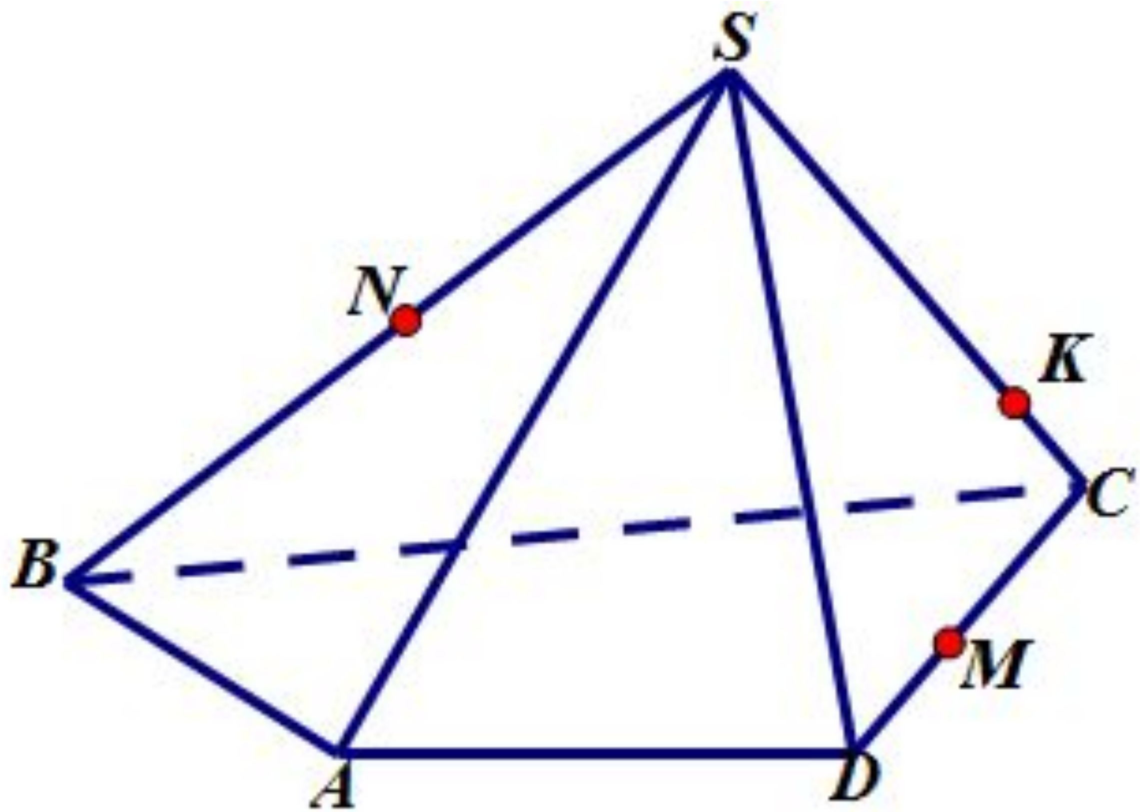
e) AA_1F_1F





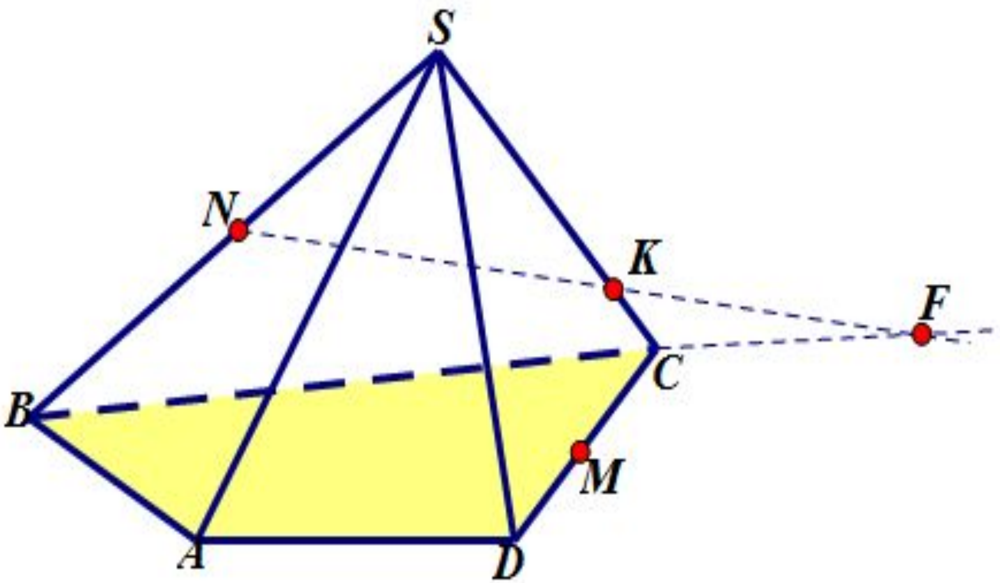
F1
R
E1
S
M
A1
D1
C1
B1
V
K
F
E
P
T
A
D
O
L
C
B
N
H

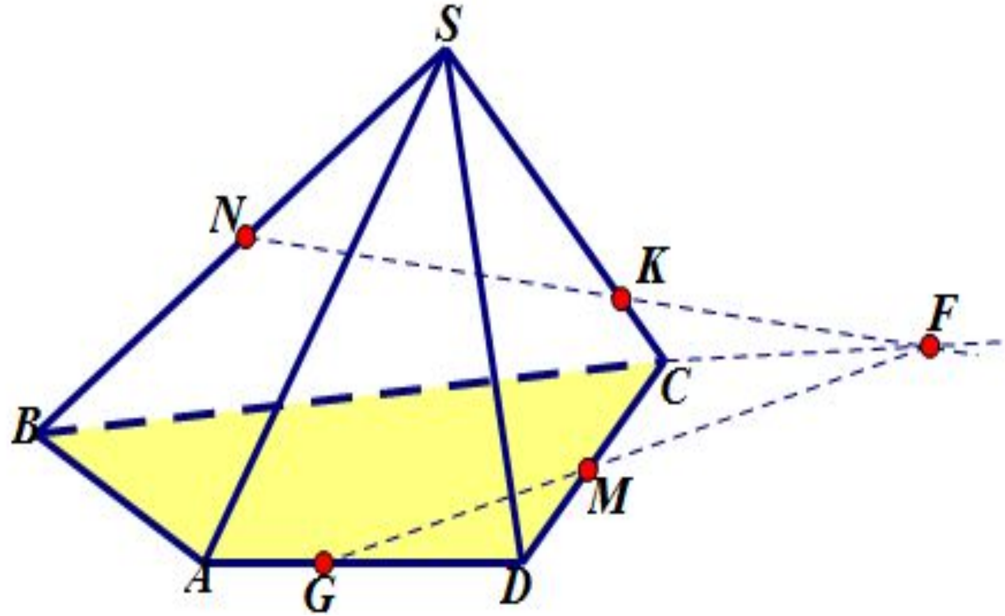
Задача. Постройте проекцию (след) плоскости сечения MNK на плоскости:
а) ABC; б) ABS; в) ASD.



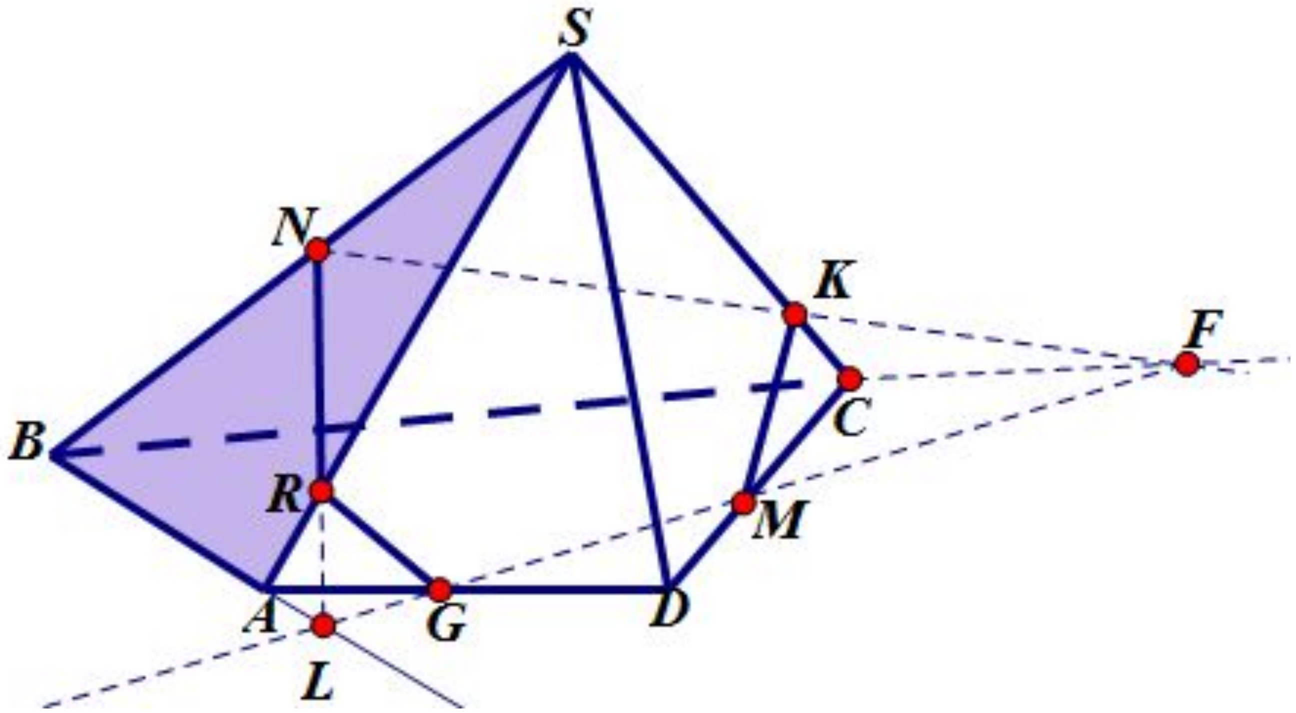
а)

Для пирамиды при построении сечения выполняем *центральное проектирование* с центром в вершине пирамиды.

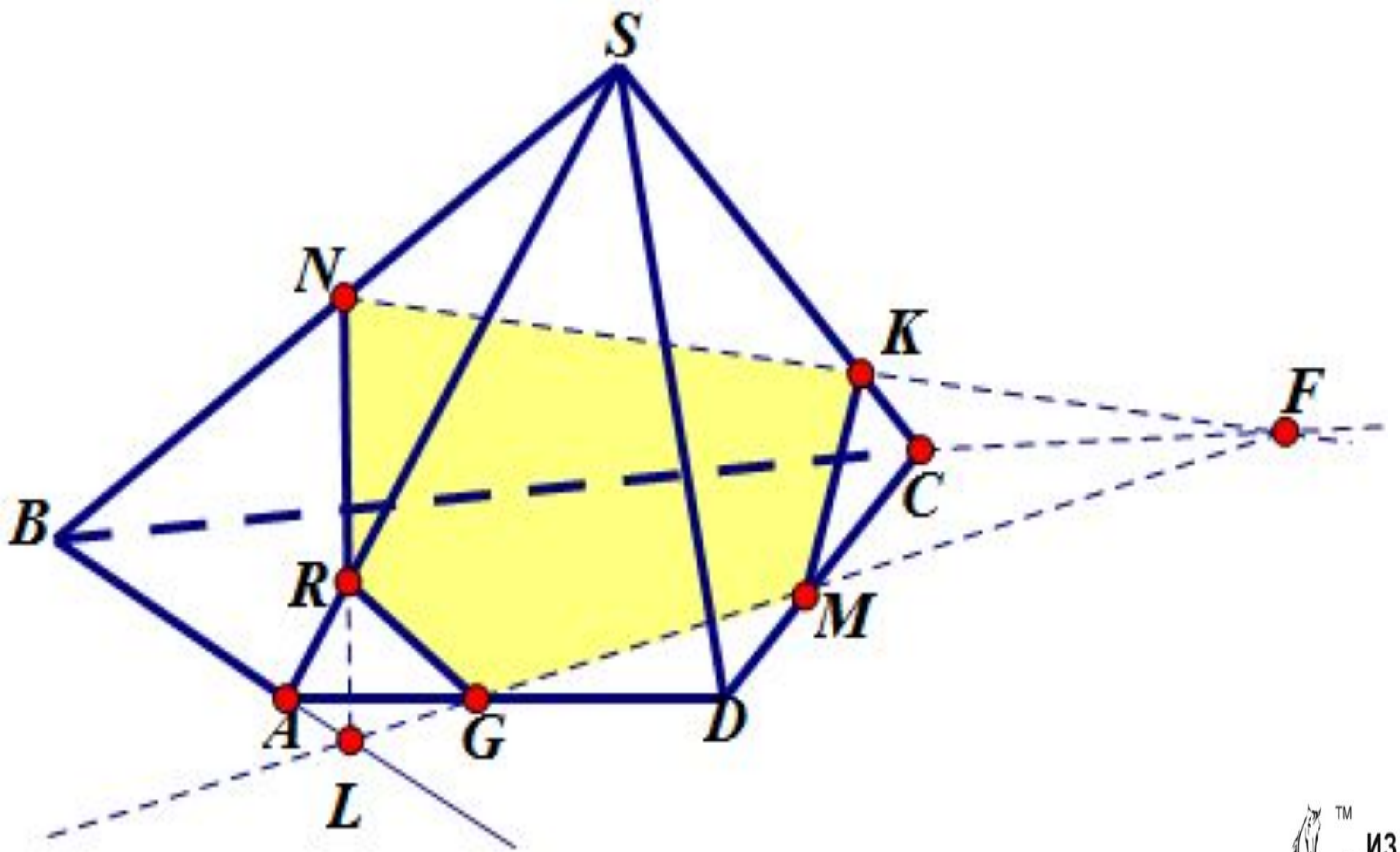




б) ABS; в) ASD.



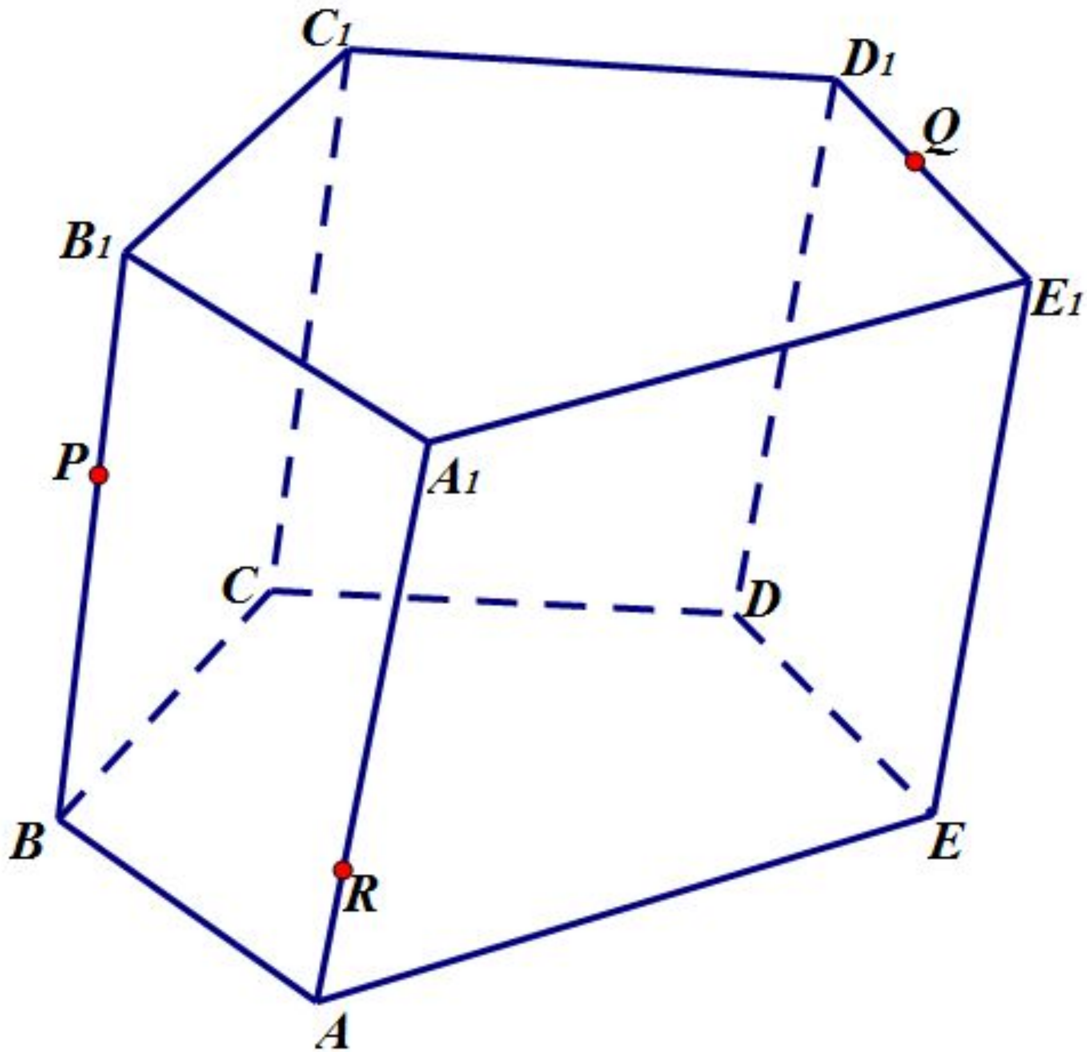
MKNRG – сечение пирамиды плоскостью MNK



Метод вспомогательных сечений (метод внутреннего проектирования)

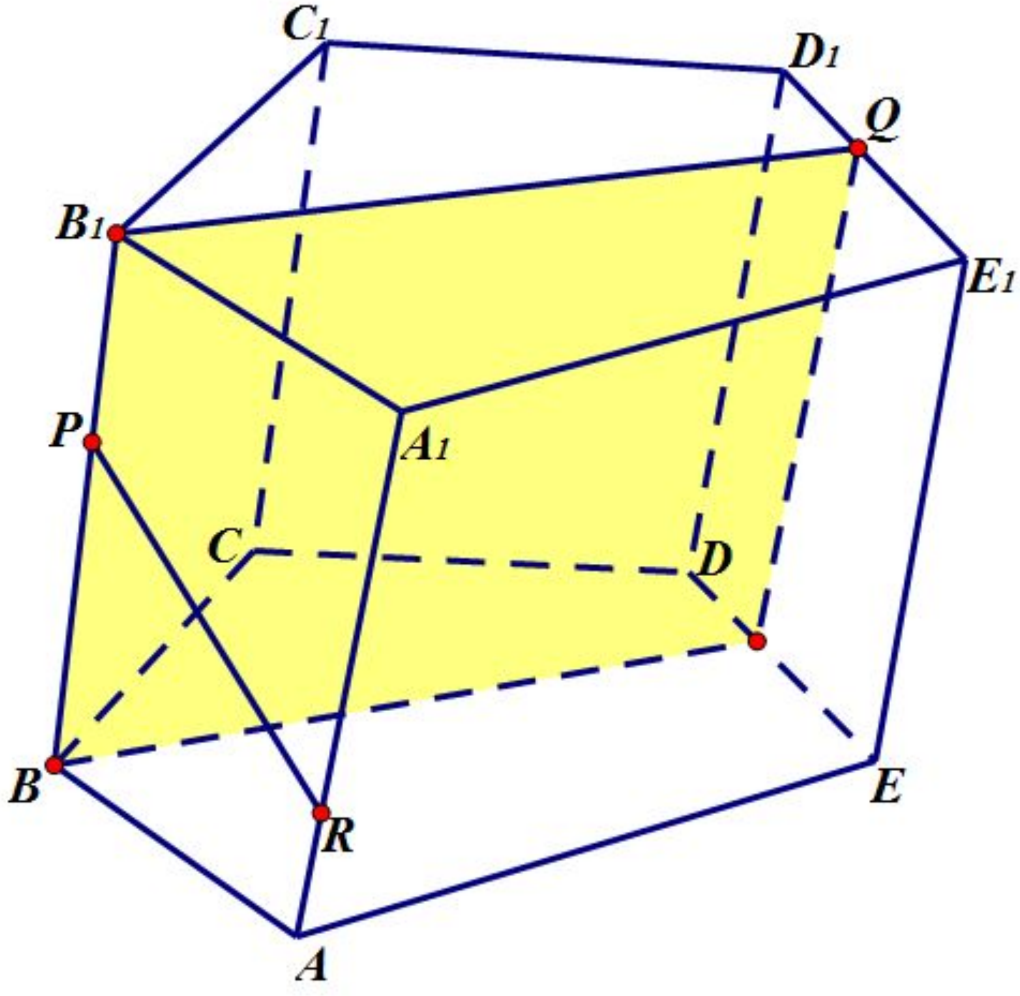
Универсальный метод, основанный на построении вспомогательных плоскостей, не выходящих за пределы многогранника.

Задача. Построить сечение призмы плоскостью PQR

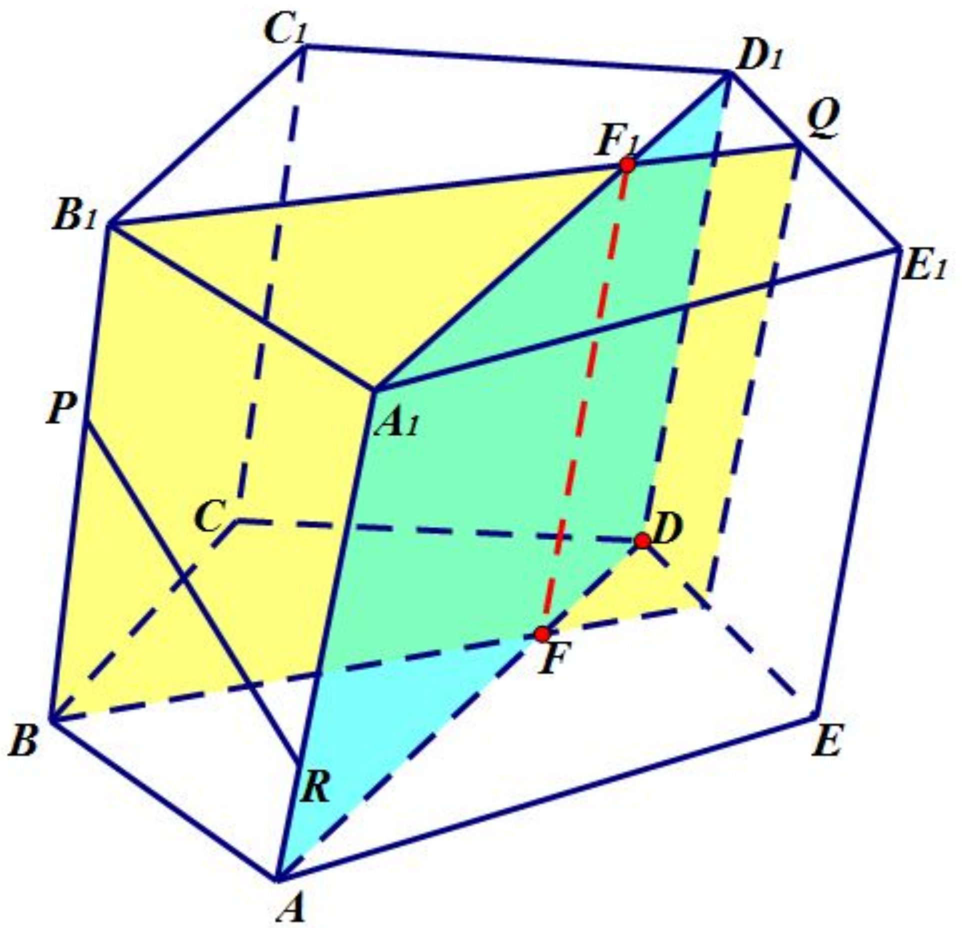


1. В грани ABB_1A_1 проведём отрезок PR.

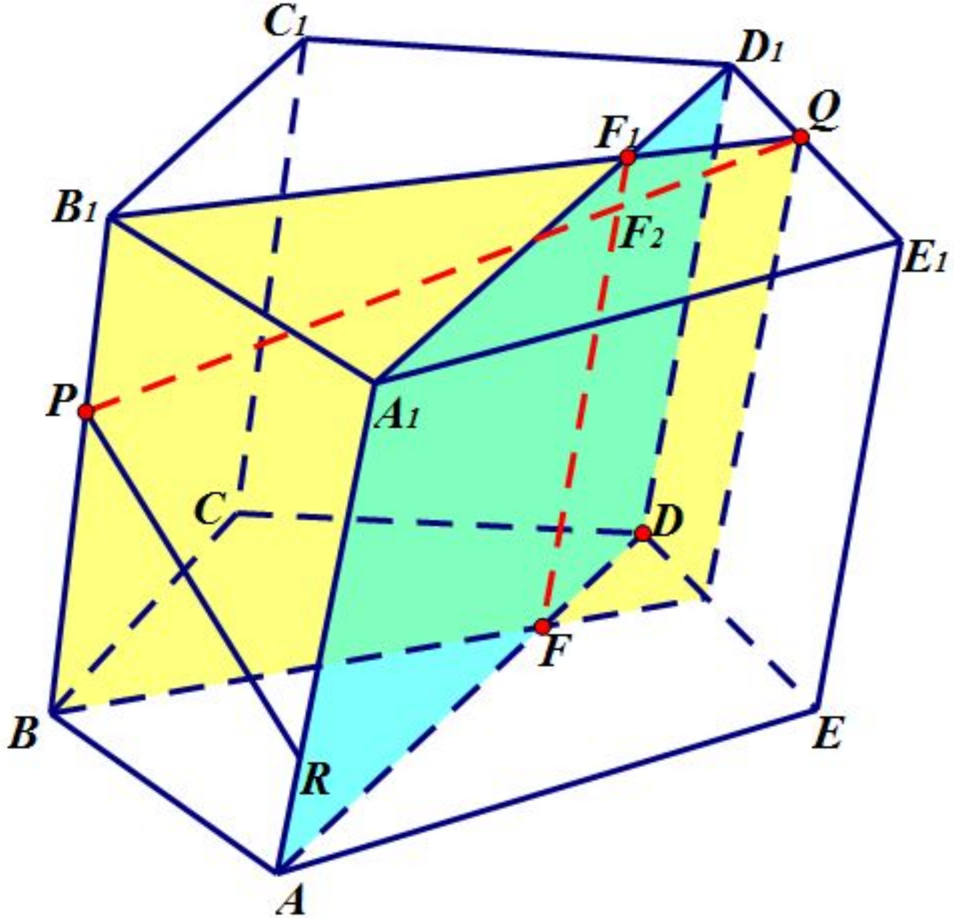
2. Проведём вспомогательную плоскость BB_1Q

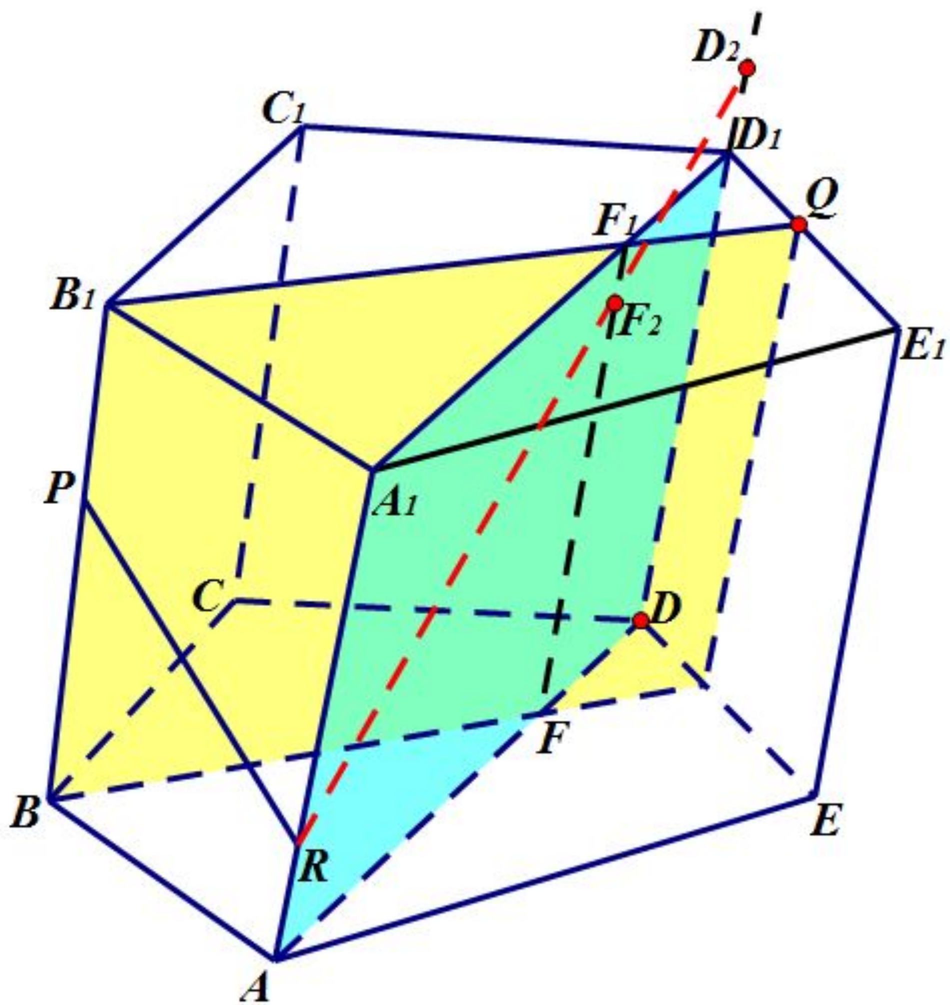


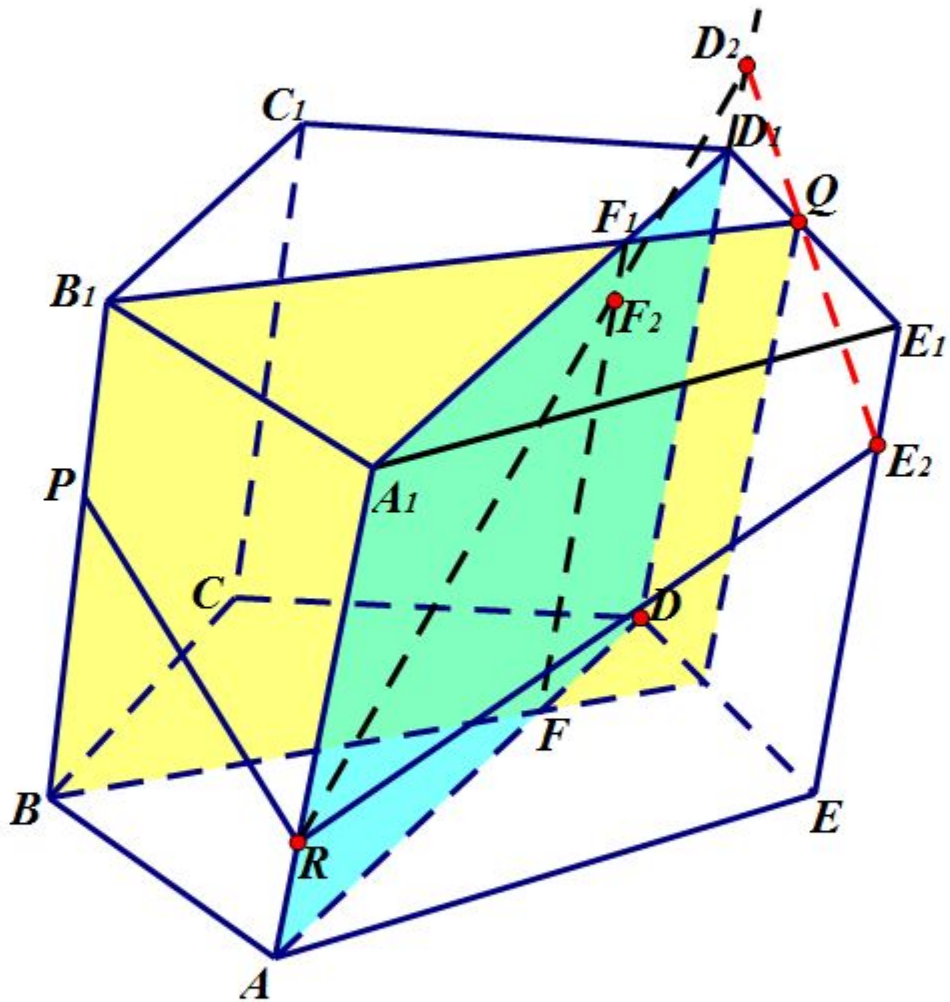
Проведем вспомогательную плоскость ADD_1.
FF_1 – линия пересечения ADD_1 и BB_1Q.

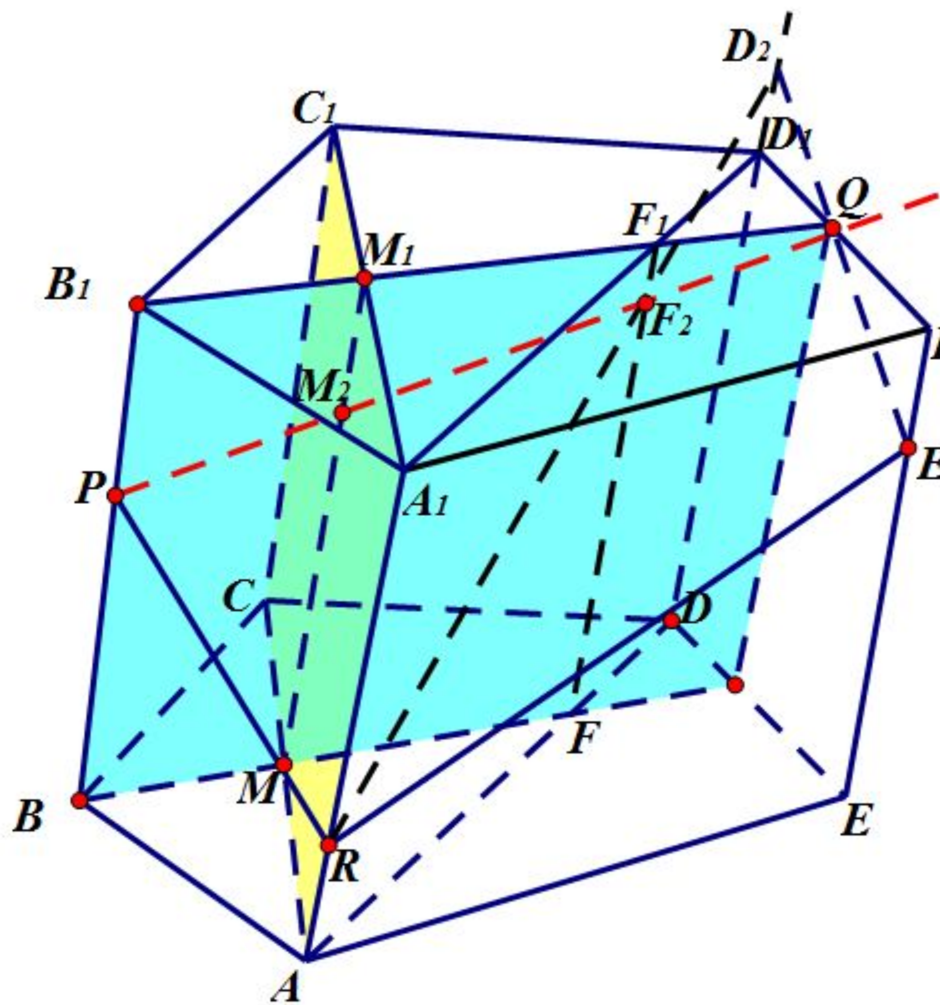


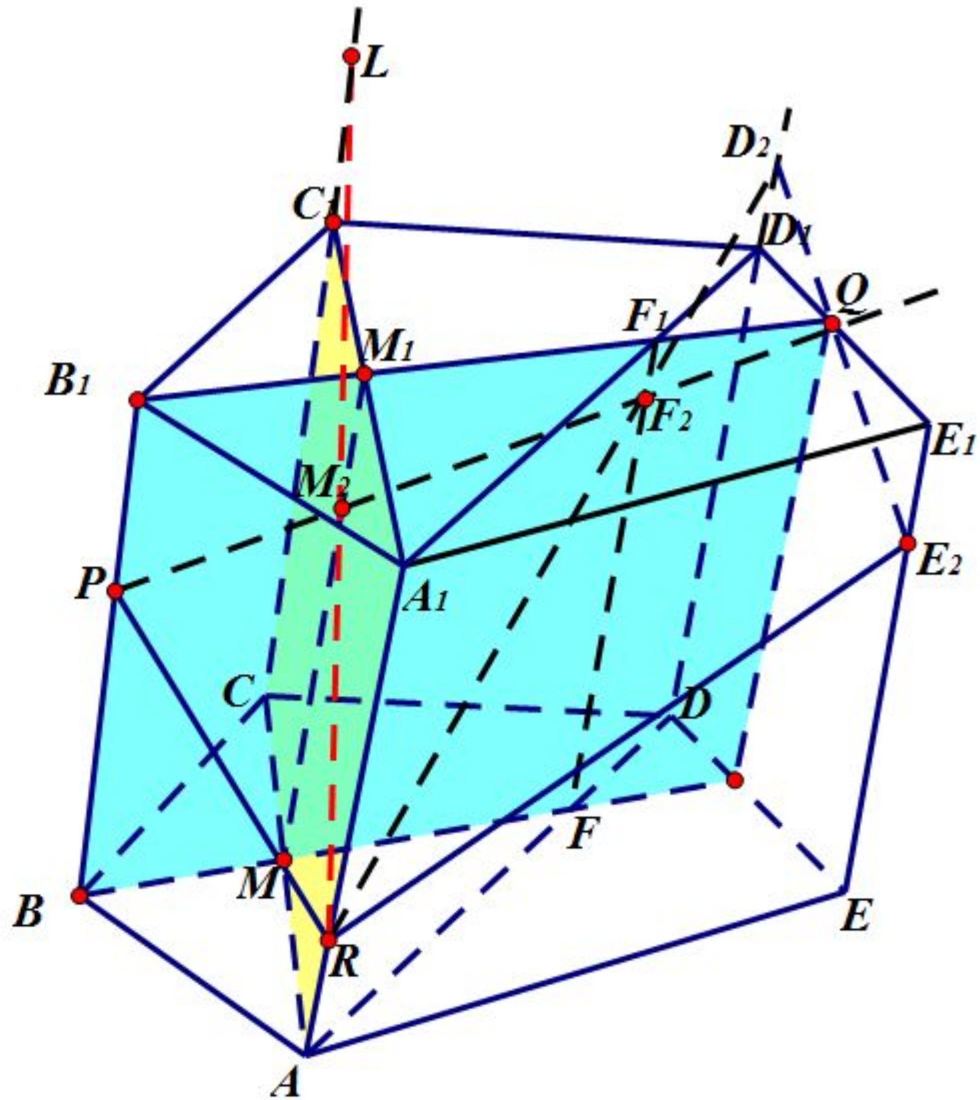
$PQ \cap FF_1 = F_2, F_2 \in PQR$

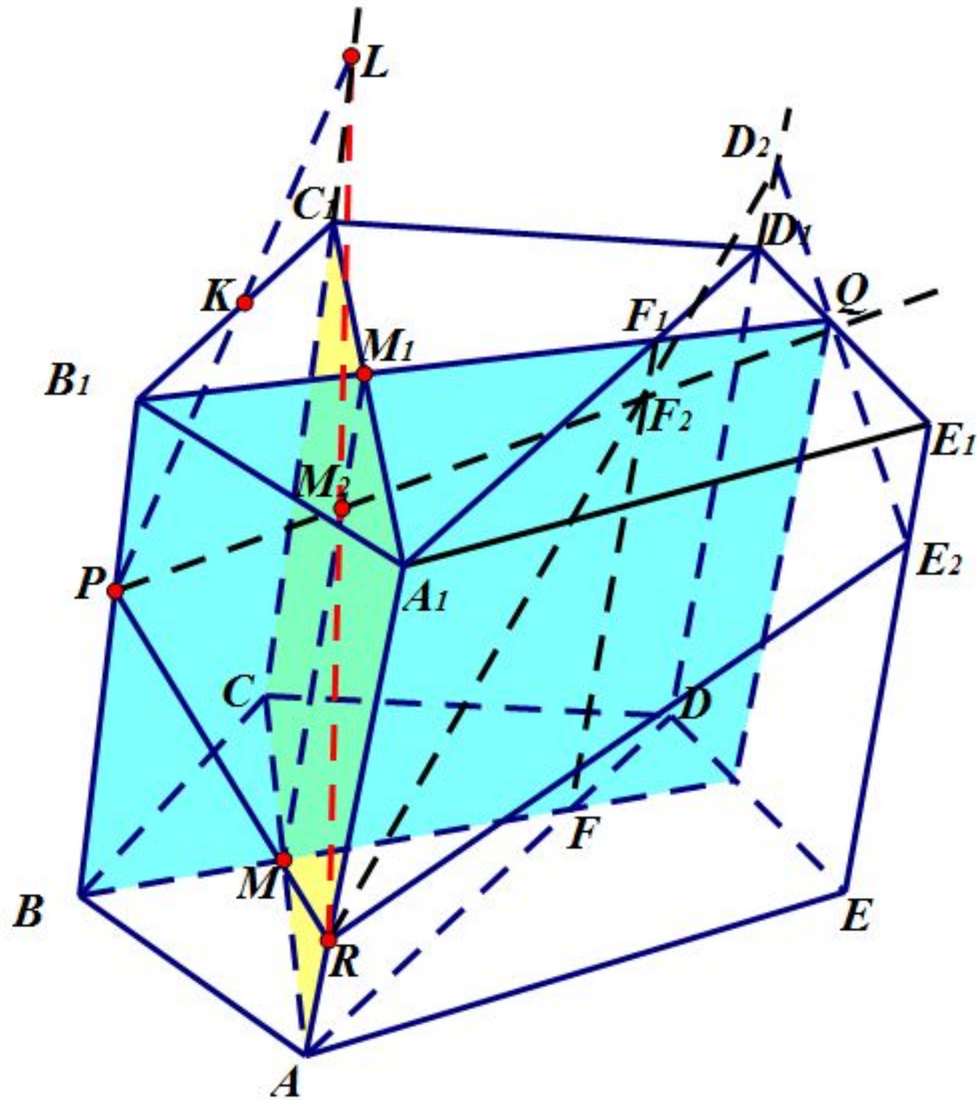


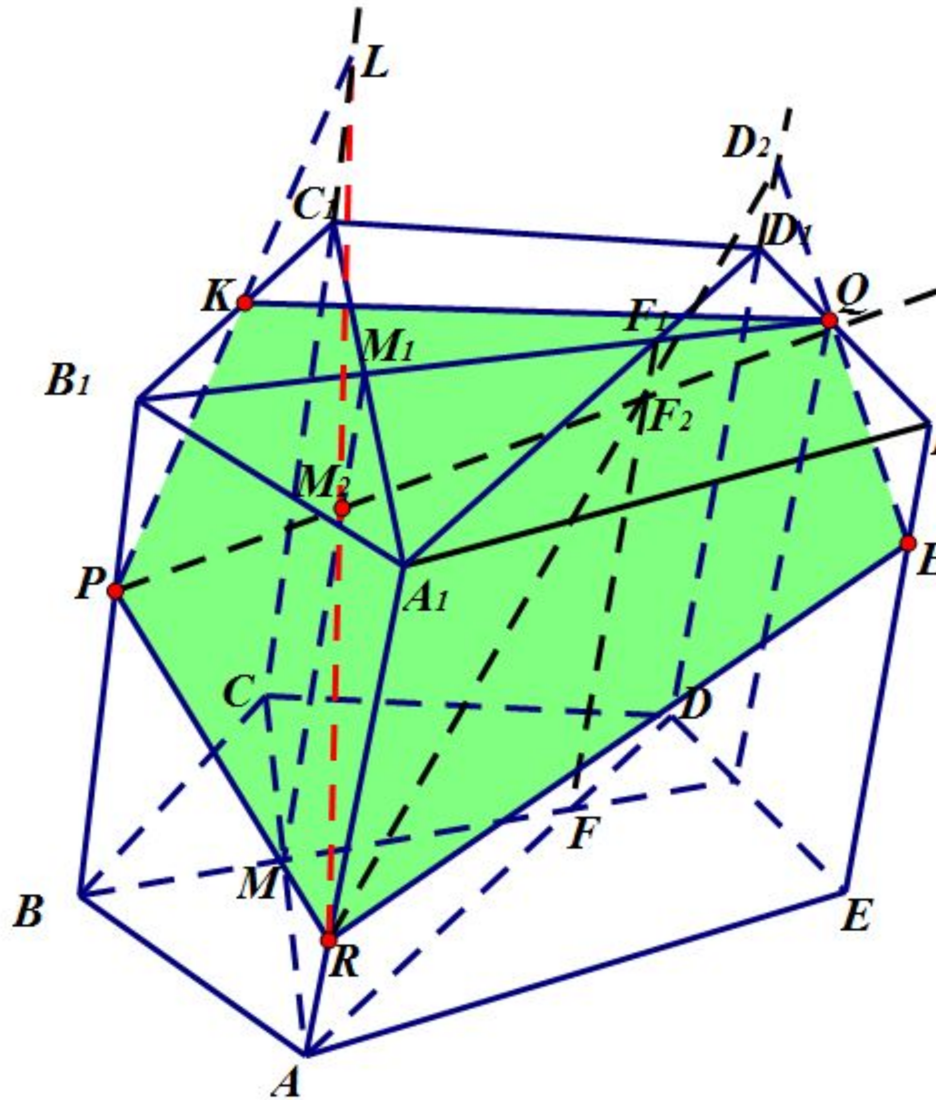

D_2
C_1
D_1
Q
F_1
B_1
F_2
E_1
P
A_1
C
D
F
B
E
R
A


D_2
C_1
D_1
Q
F_1
B_1
F_2
E_1
P
A_1
E_2
C
D
F
B
E
R
A

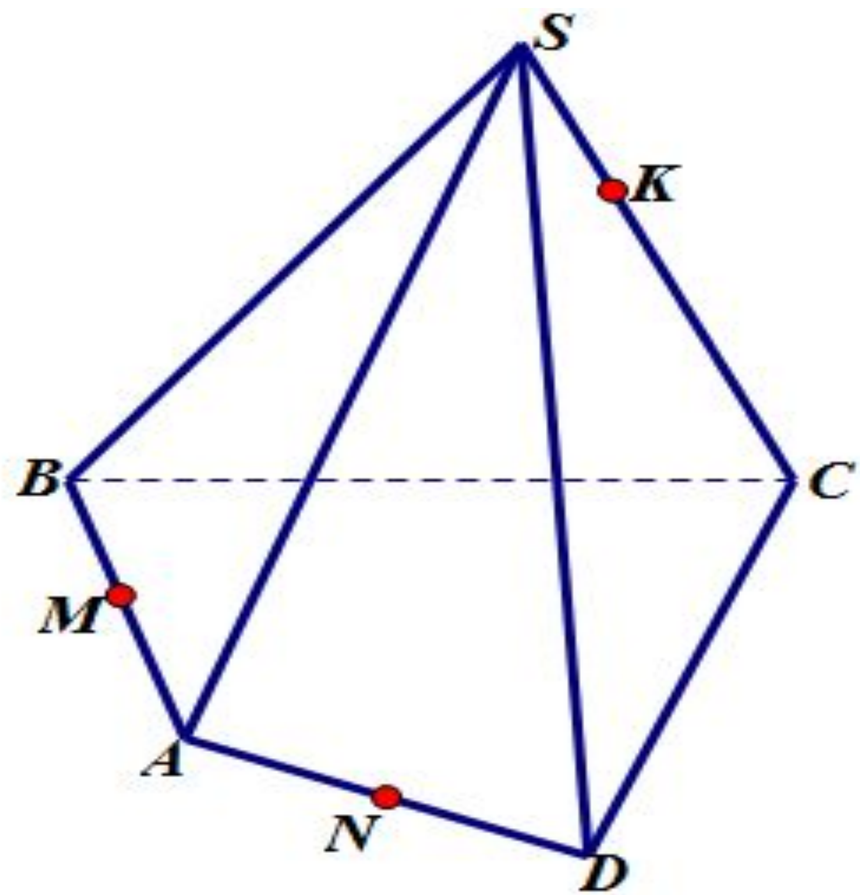

D2
C1
D1
Q
F1
M1
B1
F2
E1
M2
E2
P
A1
C
D
F
M
B
E
R
A

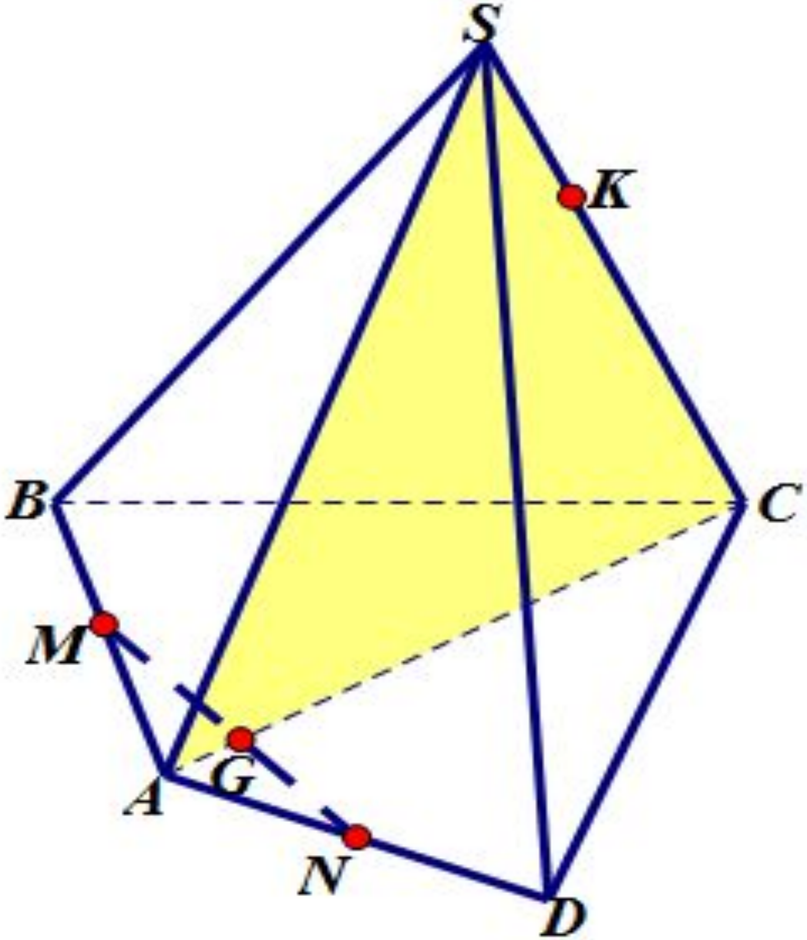

L
D_2
C_1
D_1
Q
F_1
M_1
B_1
F_2
E_1
M_2
E_2
P
A_1
C
D
F
M
B
E
R
A

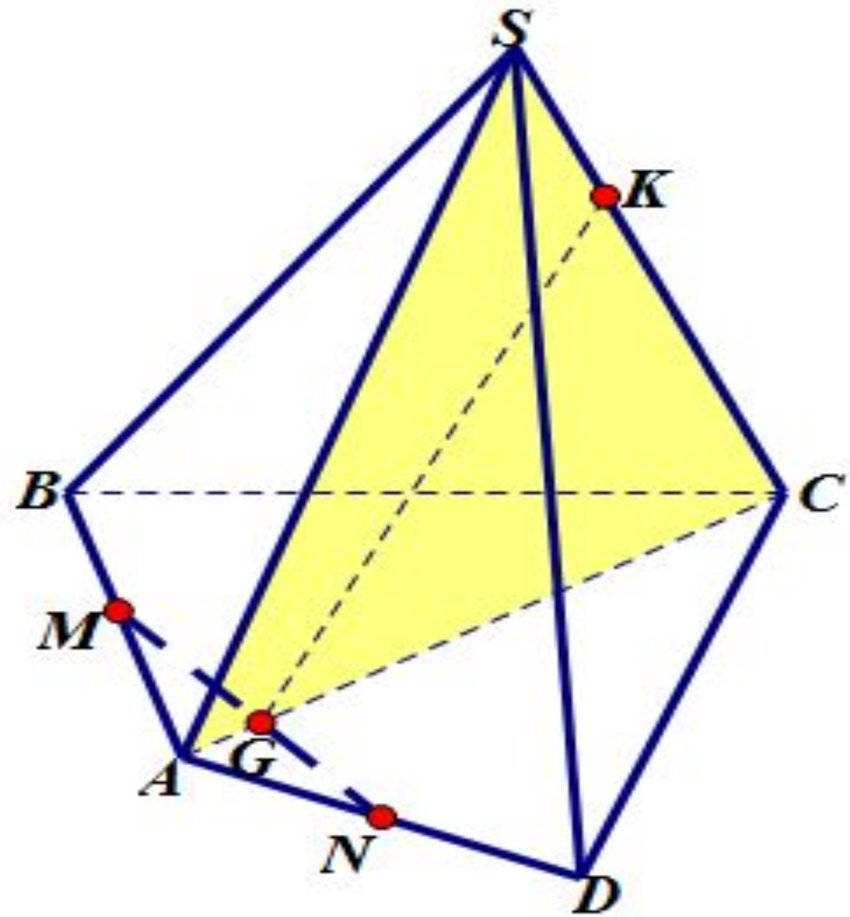

L
D_2
C_1
D_1
K
Q
F_1
M_1
B_1
F_2
E_1
M_2
E_2
P
A_1
C
D
F
M
B
E
R
A

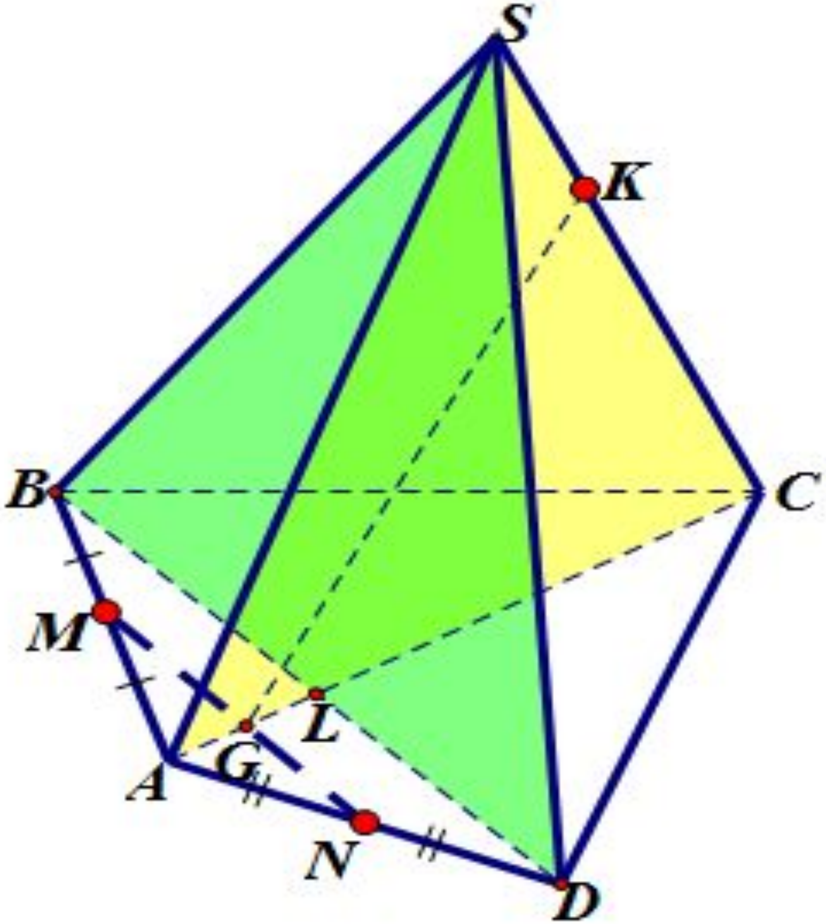

L
D2
C1
D1
K
Q
F1
M1
B1
F2
E1
M2
E2
P
A1
C
D
F
M
B
E
R
A

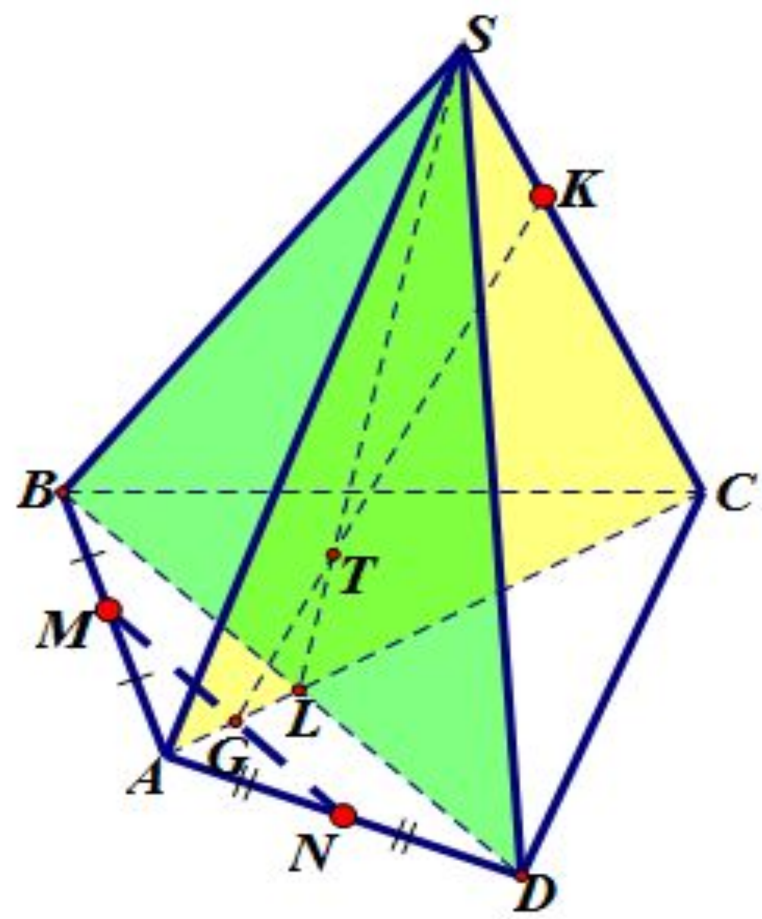
Задача. **Построить сечение пирамиды SABCD плоскостью MNK, если известно, что точки M и N- соответственно середины ребер AB и AD пирамиды SABCD, точка K принадлежит ребру SC.**

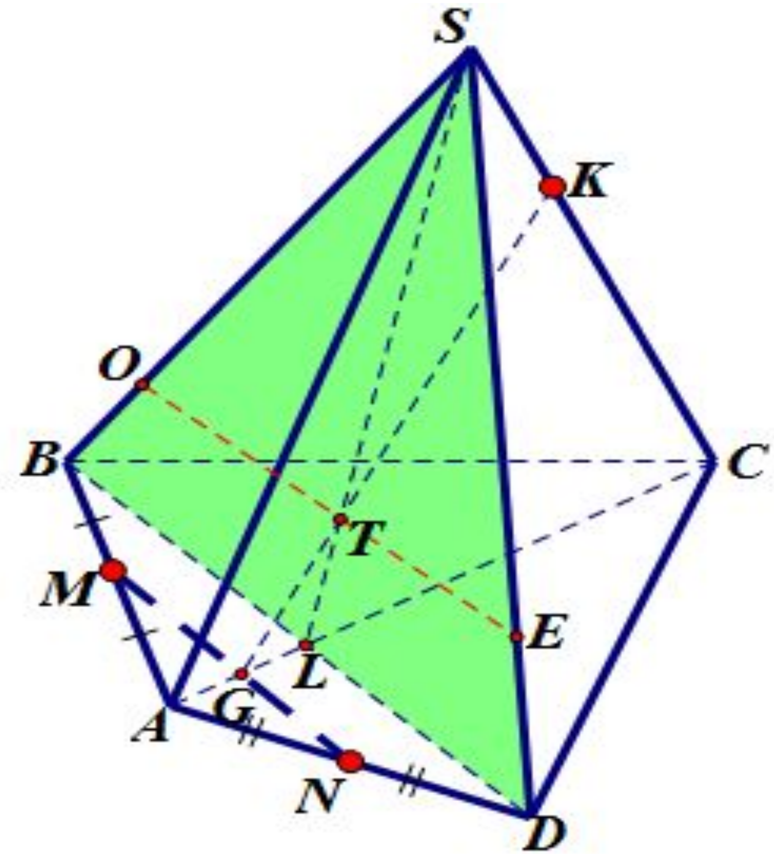


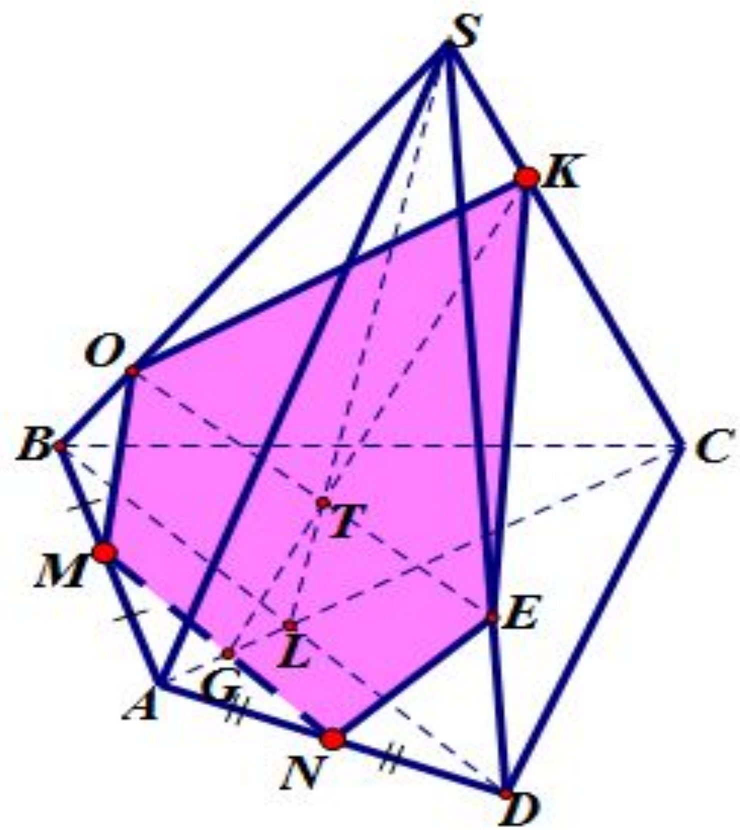

S
K
B
C
M
G
A
N
D


S
K
B
C
M
G
A
N
D


S
K
B
C
M
L
G
A
N
D


S
K
B
C
T
M
L
G
A
N
D


S
K
O
B
C
T
M
E
L
G
A
N
D

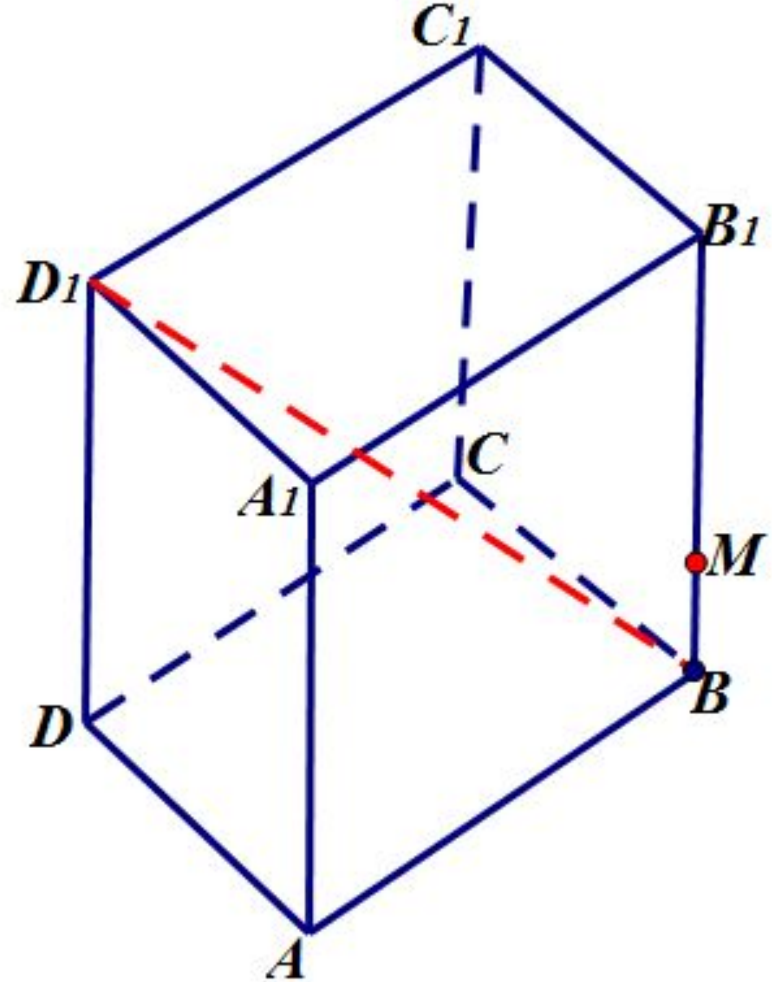

S
K
O
B
C
T
M
E
L
G
A
N
D

Задача

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M лежит на ребре BB_1 так, что $BM:MB_1=1:3$. Через точки M и C_1 параллельно BD_1 проведена плоскость β.

а) Докажите, что плоскость β проходит через середину ребра AA_1.

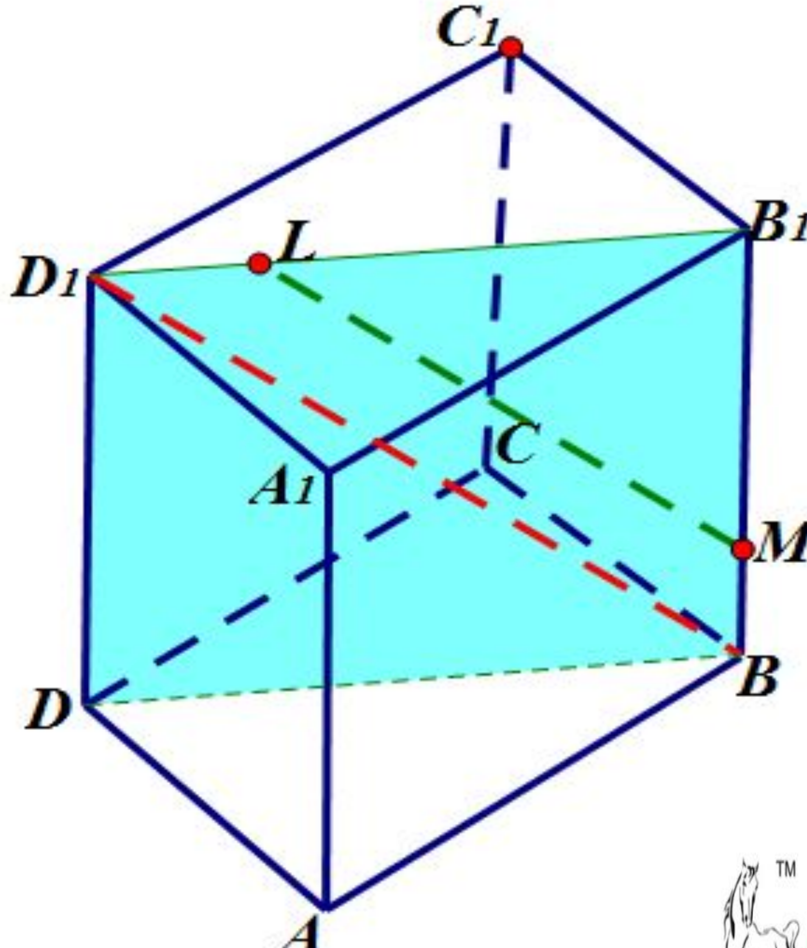
б) Найдите площадь сечения куба плоскостью β, если AB=12.



а) 1. ***Построение сечения.***

Шаг 1. Проведем LM || BD_1.

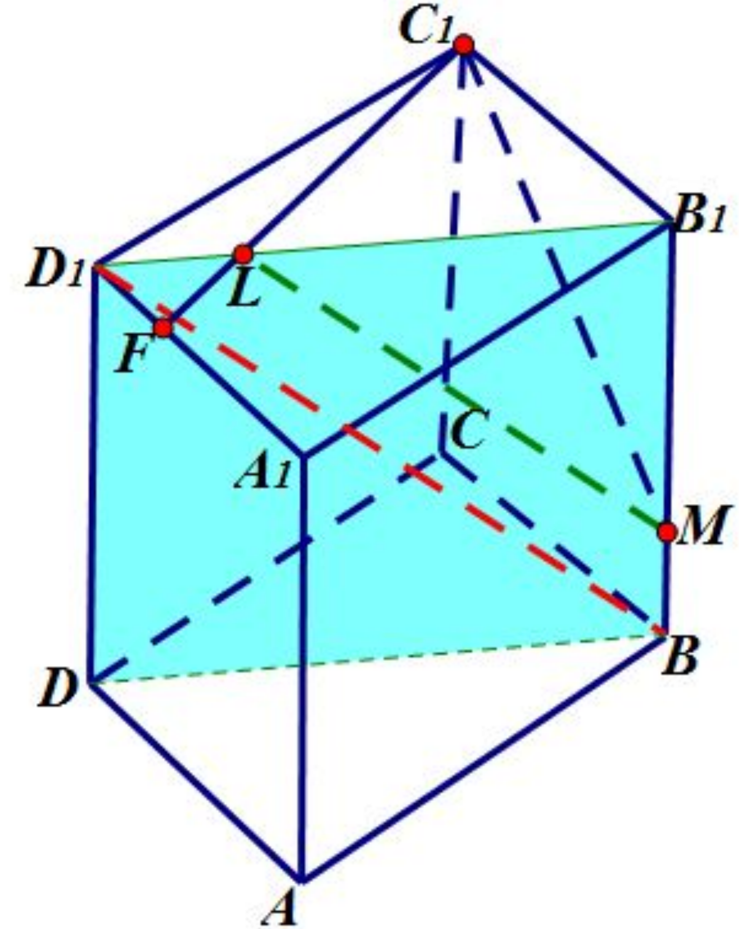
(Вспомогательная плоскость BB_1D_1D).



LM лежит в плоскости β.

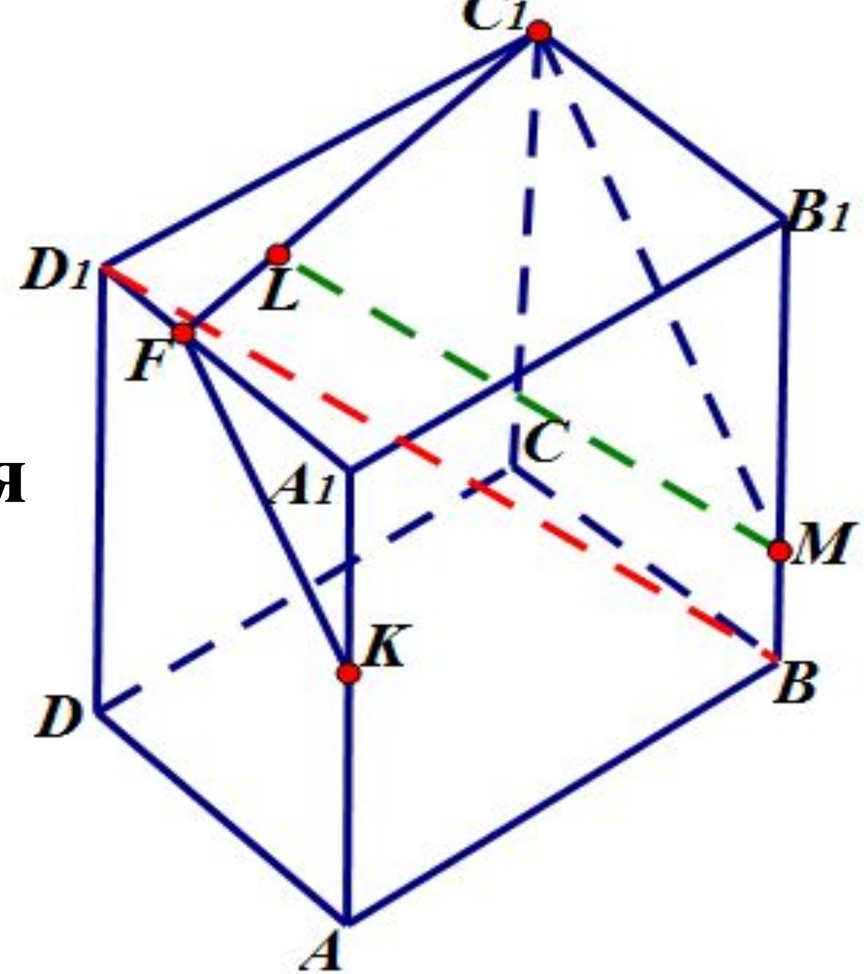
Шаг 2.

Проведем C_1L
в грани $A_1B_1C_1D_1$.
$F=C_1L\cap A_1D_1$.
C_1M – линия пересечения плоскости β и грани BB_1C_1C.
C_1M и CF
лежат в плоскости β.

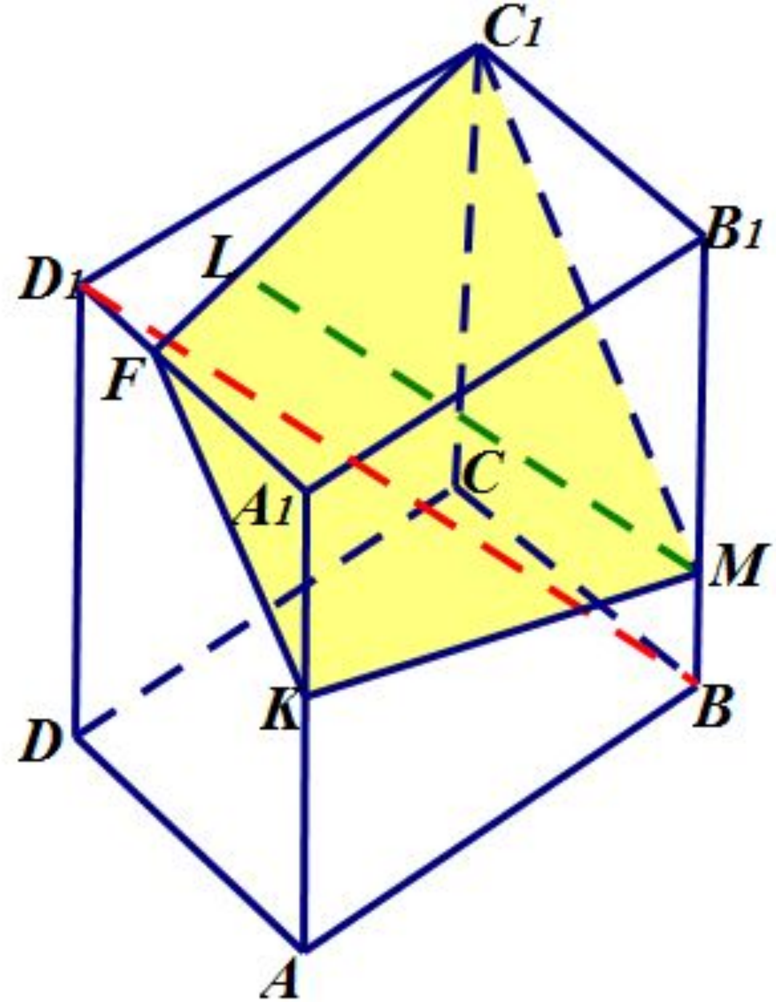


Шаг 3.

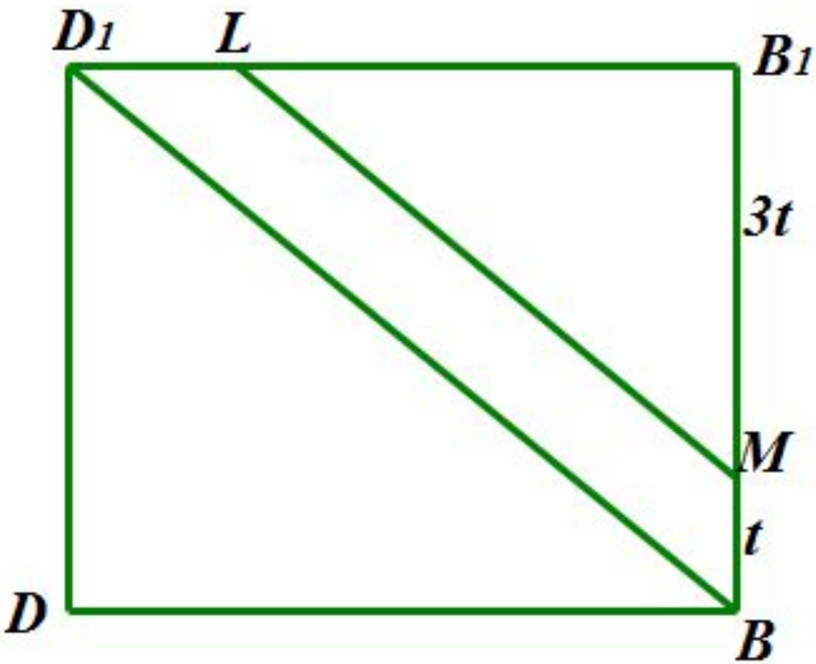
Проведем $FK \parallel C_1M$.
FK-линия пересечения грани AA_1D_1D и плоскости β.
KM – линия пересечения грани AA_1B_1B и плоскости β.

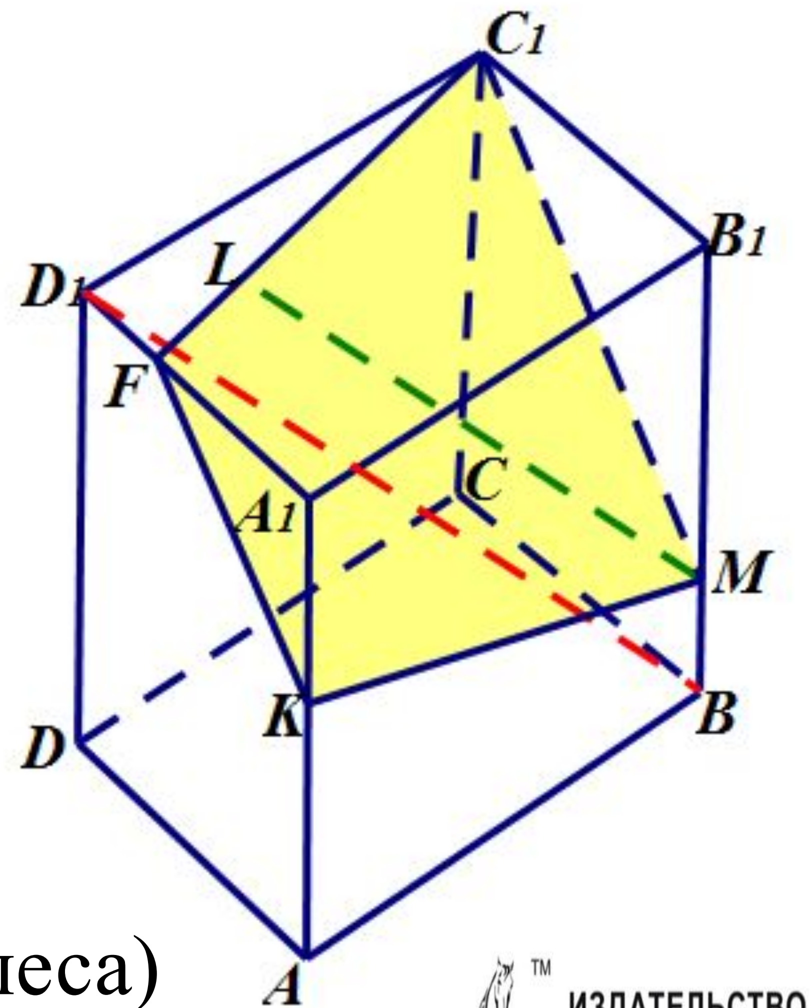


KFC_1M – искомое сечение.

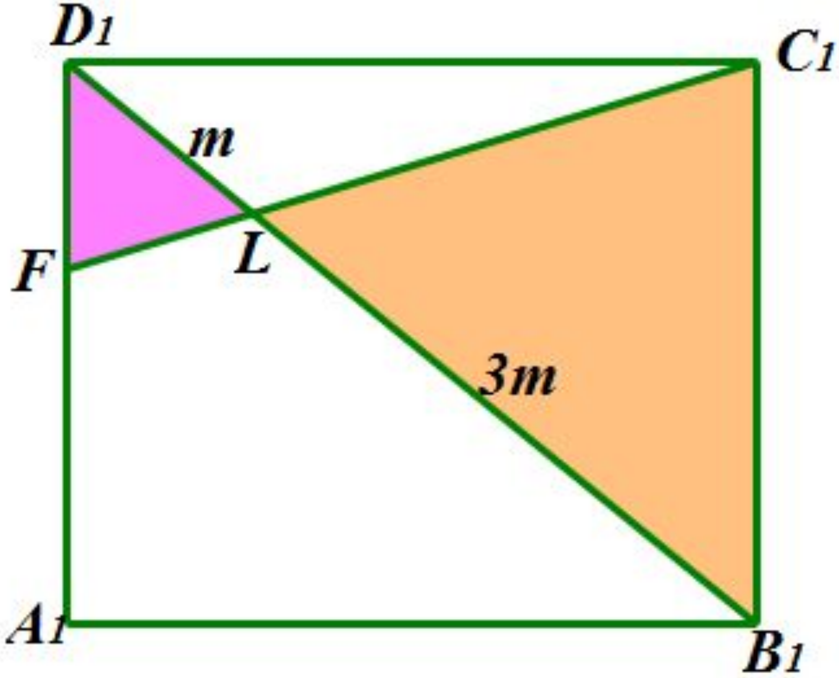


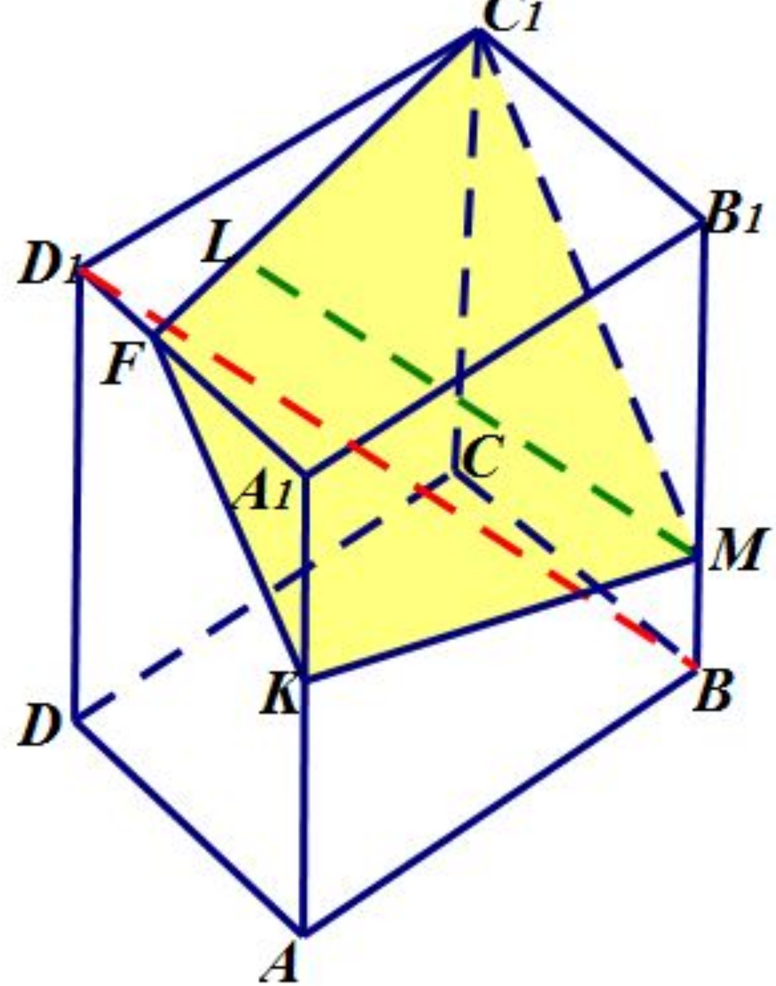
2. Доказательство





$B_1L:LD_1=3:1$ (по теореме Фалеса)





$D_1F:B_1C_1=1:3$,

$B_1C_1=A_1D_1$

$D_1F:FA_1=1:2$.

Проведем $D_1E \| C_1M$.

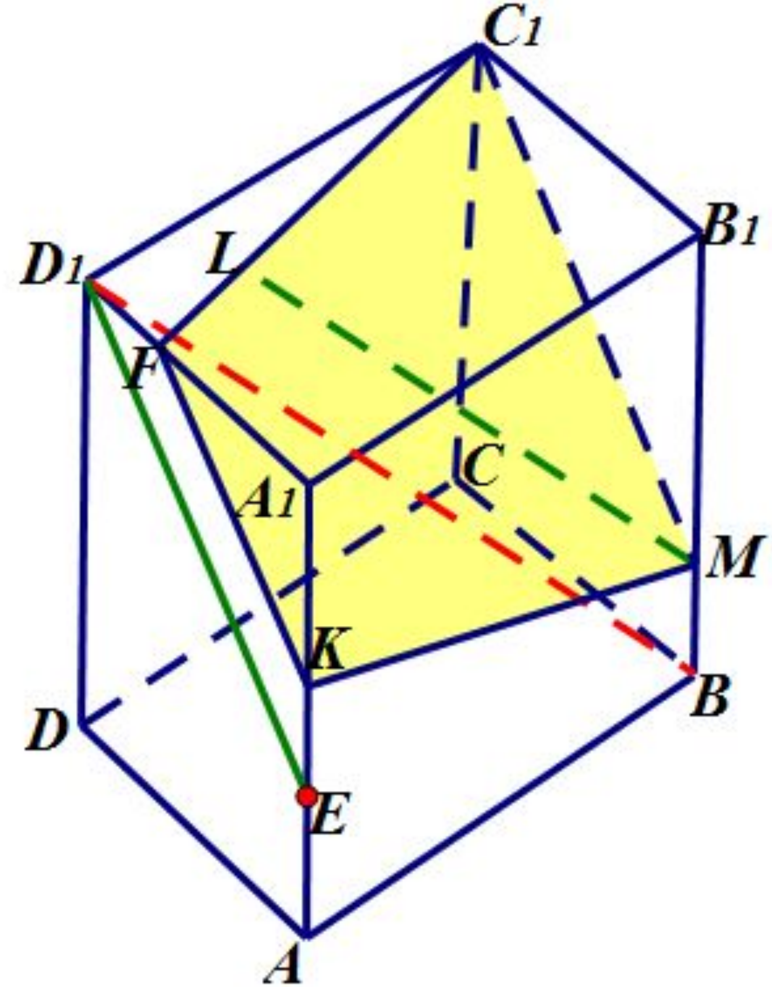
$A_1F:FD_1 = A_1K:KE = 2:1$.

$A_1E:EA = 3:1$.

Следовательно, $A_1K = KA$.

β проходит через середину ребра AA_1.

б)



Сечение KFC_1M – трапеция, AB=12 по условию.

$$S_{KFC_1M} = \frac{KF+MC_1}{2} \cdot \text{FH}$$

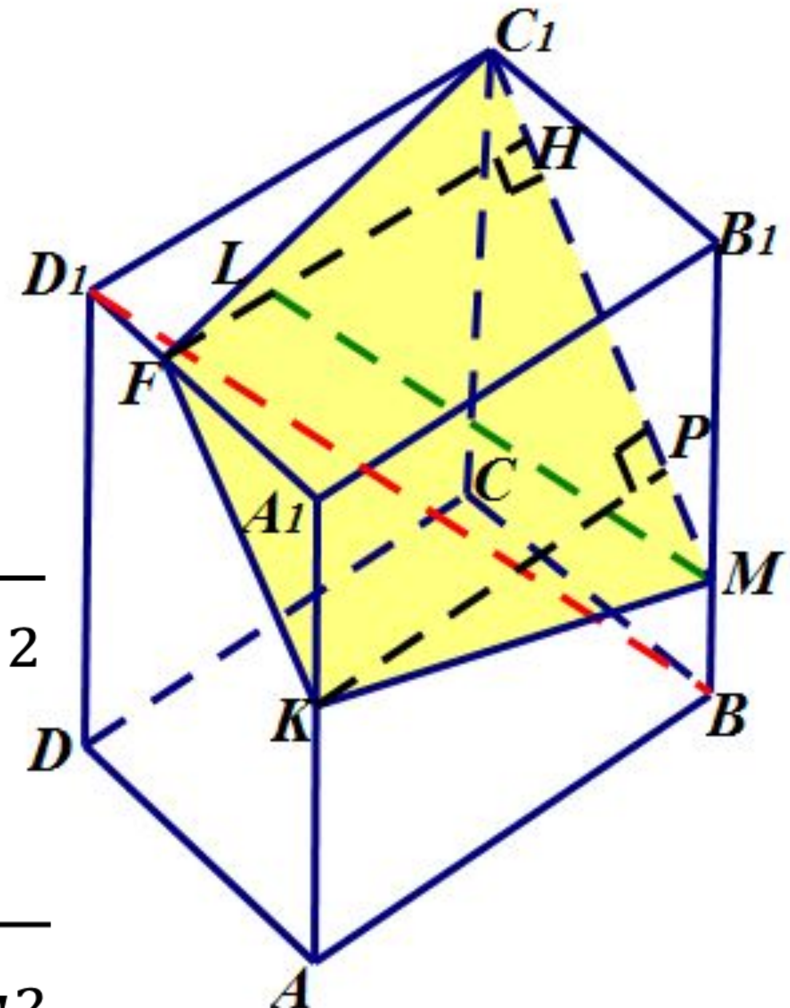
ΔKFA_1: KF=$\sqrt{KA_1{}^2 + A_1F^2}$

$$KA_1 = 6, FA_1 = 8.$$

KF=10.

ΔMB_1C_1: C_1M=$\sqrt{MB_1{}^2 + C_1B_1{}^2}$

$$C_1M = 15.$$



$\Delta F_1D_1C_1$: FC$_1$=$\sqrt{C_1D_1{}^2 + D_1F^2}$

$FC_1 = \sqrt{160}$. KM= $\sqrt{153}$.

KP=FH $\sqrt{MK^2 - MP^2} = \sqrt{{FC_1}^2 - {FC_1}^2}$

$$153 - x^2 = 160 - (5 - x)^2$$

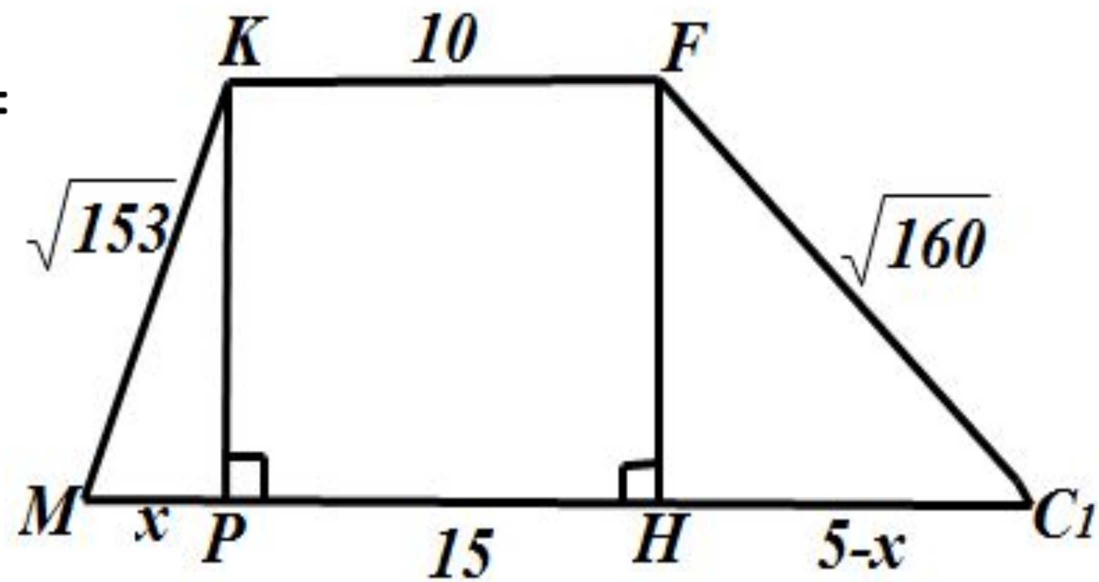
$10x=18$, $x=1{,}8$,

KP= $\sqrt{153 - 3{,}24} = \sqrt{149{,}76}$.

$S_{KFC_1M} = \frac{KF+MC_1}{2} \cdot$

FH=$\frac{10+15}{2} \cdot \sqrt{149{,}76} =$

$=30\sqrt{26}$.

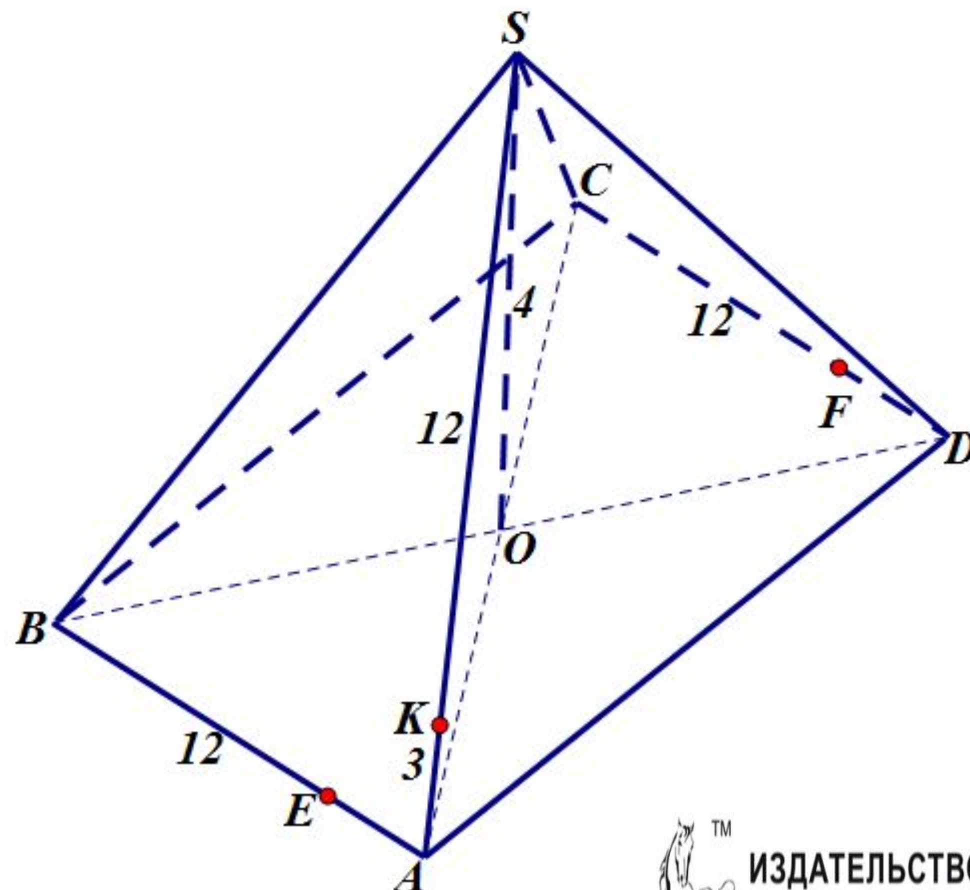


Задача 7
(№14 вариант 28 «Легион» ЕГЭ 2018)

В правильной четырехугольной пирамиде SABCD боковое ребро SA=12, а высота равна 4. На ребрах AB, CD и AB отмечены точки E, F и K соответственно, причем BE=CF=12, AK=3.

а) Докажите, что плоскости SBC и KEF параллельны.

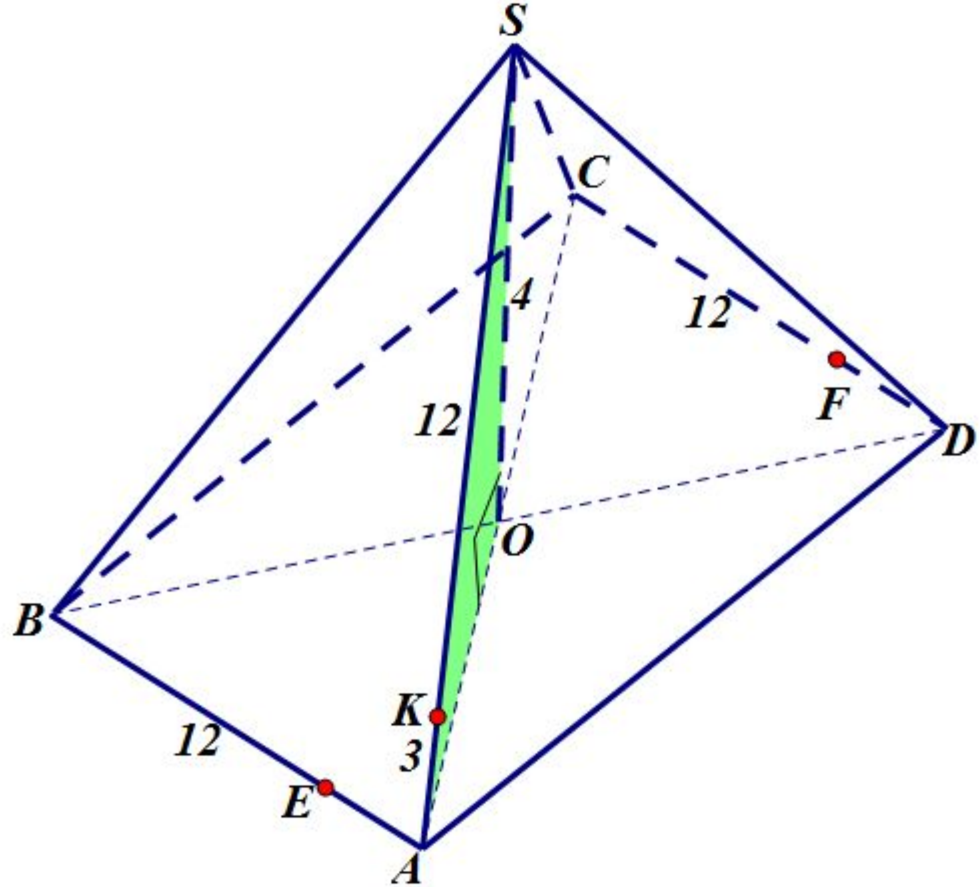
б) Найдите объем пирамиды KSBC.



Дано: SABCD – правильная пирамида, AS=12, SO – высота, SO=4. BE=CF=12, AK=3.

а) Докажите, что SBC || KEF;

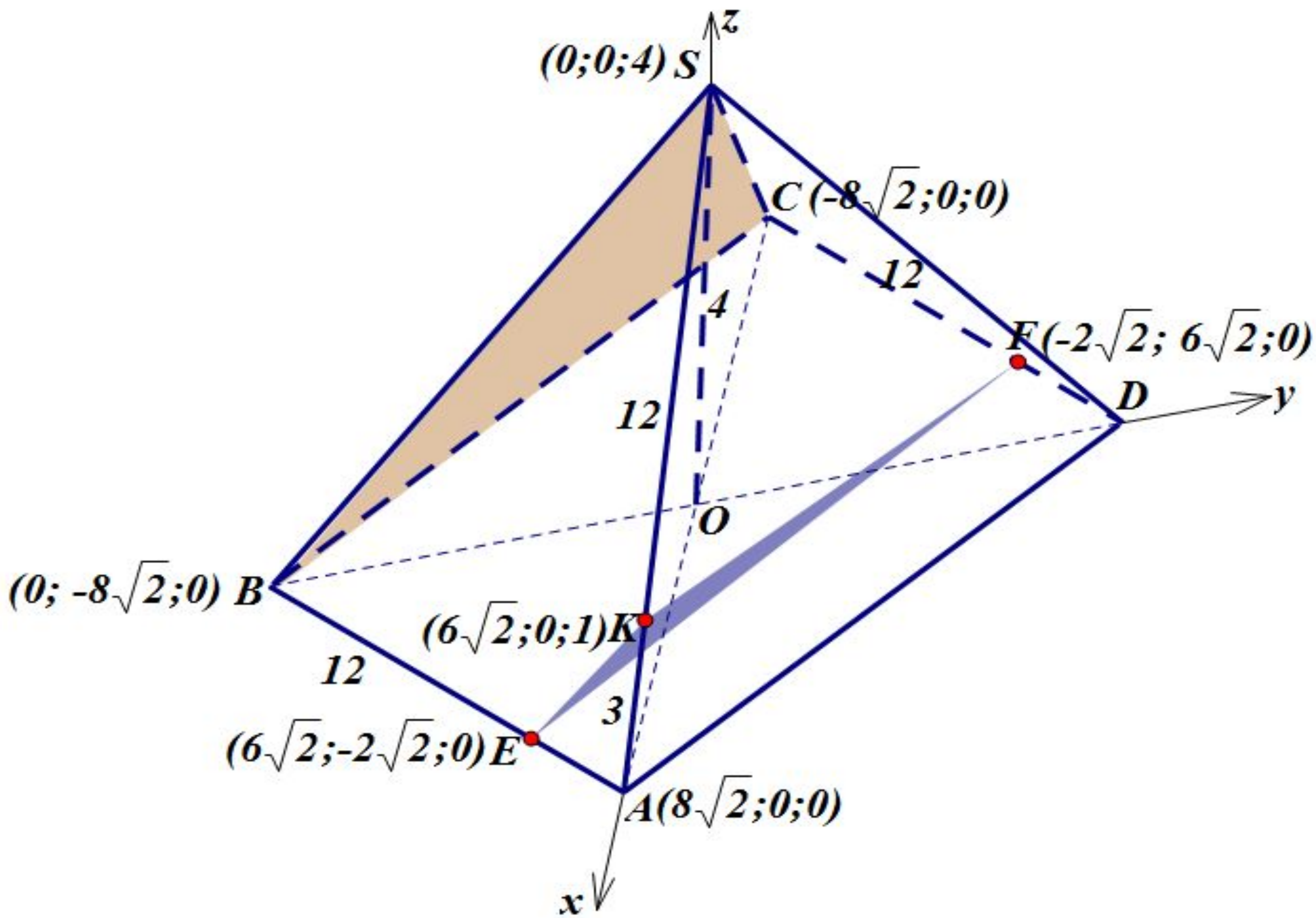
б) НайдитеV_{KSBC} .

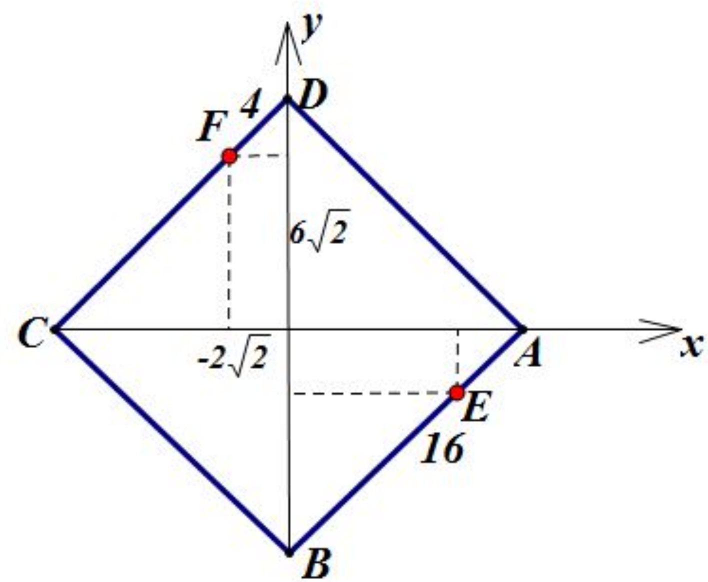


Решение.

$$AO=\sqrt{AS^2-SO^2}=\sqrt{12^2-4^2}=\sqrt{8\cdot16}=8\sqrt{2}$$

$$AC=2AO=16\sqrt{2} \qquad AB=16,\ AE=4$$


z
(0;0;4) S
C (-8√2;0;0)
12
4
F (-2√2; 6√2;0)
D
y
12
O
(0; -8√2;0) B
(6√2;0;1)K
12
3
(6√2;-2√2;0) E
A(8√2;0;0)
x


y
4
D
F
6√2
C
-2√2
A
x
E
16
B

Решение. ***Способ 1***

SBC || KEF $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1 || \vec{n}_2$ **(векторы нормалей).**

$\vec{n}_1=\{l;\ m;\ n\}$

$\overrightarrow{SB}=\{0;-8\sqrt{2};-4\}$, $\overrightarrow{SC}=\{-8\sqrt{2};0-4\}$;

$$\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{SB}=0,\\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{SC}=0;\end{cases}\quad\begin{cases}0\cdot l-m\cdot 8\sqrt{2}-4\cdot n=0,\\ -l\cdot 8\sqrt{2}+0\cdot m-4\cdot n=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}m\cdot 2\sqrt{2}=-n,\\ l\cdot 2\sqrt{2}=-n;\end{cases}$$

$\vec{n}_1=\{\frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ -1\}$

$$\begin{cases}\vec{n}_2\cdot\overrightarrow{KE}=0,\\ \vec{n}_2\cdot\overrightarrow{KF}=0.\end{cases}$$

$\vec{n}_2=\{\frac{\sqrt{2}}{4};\ \frac{\sqrt{2}}{4};\ -1\}$

Способ 2

SBC || KEF$\Leftrightarrow$(SB||EK и BC||EF)

ΔSBA~ΔAEK: $\frac{AB}{AE} = \frac{AS}{NA} = 4$, **$\angle$SAB – общий,**

$\Rightarrow$ SB||EK .

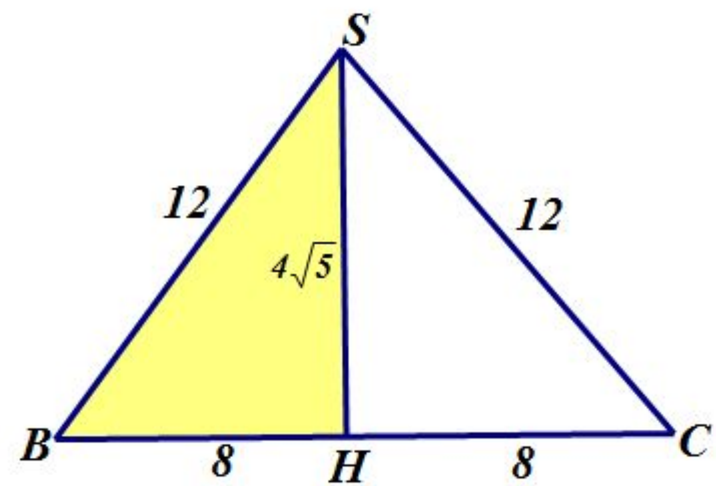
AE=FD=4, $\Rightarrow$EF||BC.

б) $V_{KSBC} = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot h$, где $h = \rho(K, SBC)$

$S_{SBC} = \frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin\angle SBC$ $\left(\cos\angle SBC = \frac{\overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\overrightarrow{SC}|}\right)$

или $S_{SBC} = \frac{1}{2} BC \cdot SH$,

где SH – высота ΔSBC.

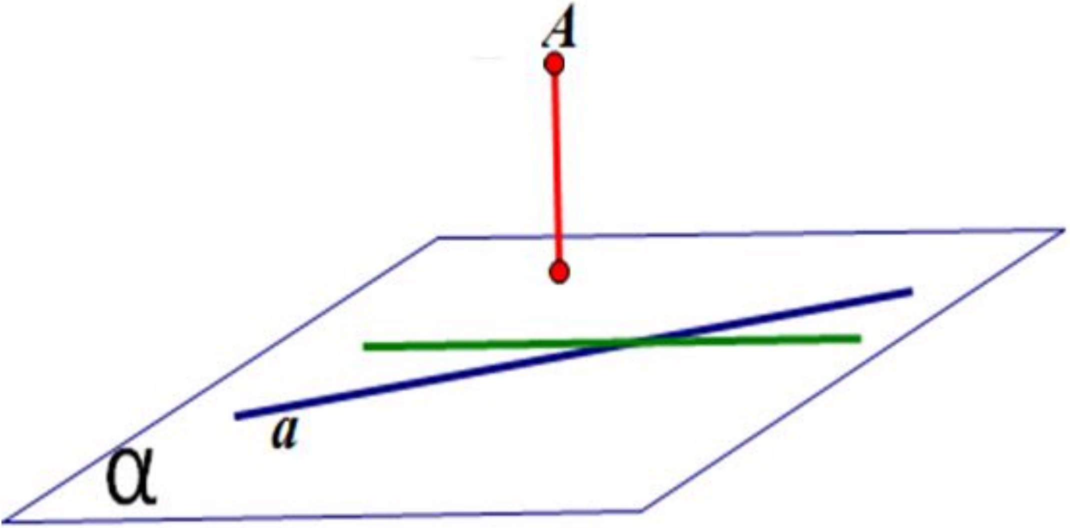


$S_{SBC} = \frac{1}{2} 16 \cdot 4\sqrt{5} = 32\sqrt{5}$

Уравнение плоскости SBC:

$\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y - z + d = 0$, где $\vec{n}_1 = \{\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; -1\}$ - вектор нормали к плоскости SBC.

d: $S(0;0;4) \in SBC$. $-4 + d = 0, d = 4$



ρ(A, α)= ρ

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

где (x_0, y_0, z_0) — координаты точки,

$ax+by+cz+d=0$ – уравнение плоскости.

- BSC: $\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y - z + 4=0$

K($6\sqrt{2}$; 0;1)

$$\rho(K, SBC)=\frac{|\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 6\sqrt{2}+ \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot 0 - 1\cdot 1 + 4|}{\sqrt{2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+1}} = \frac{6\cdot 2}{\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

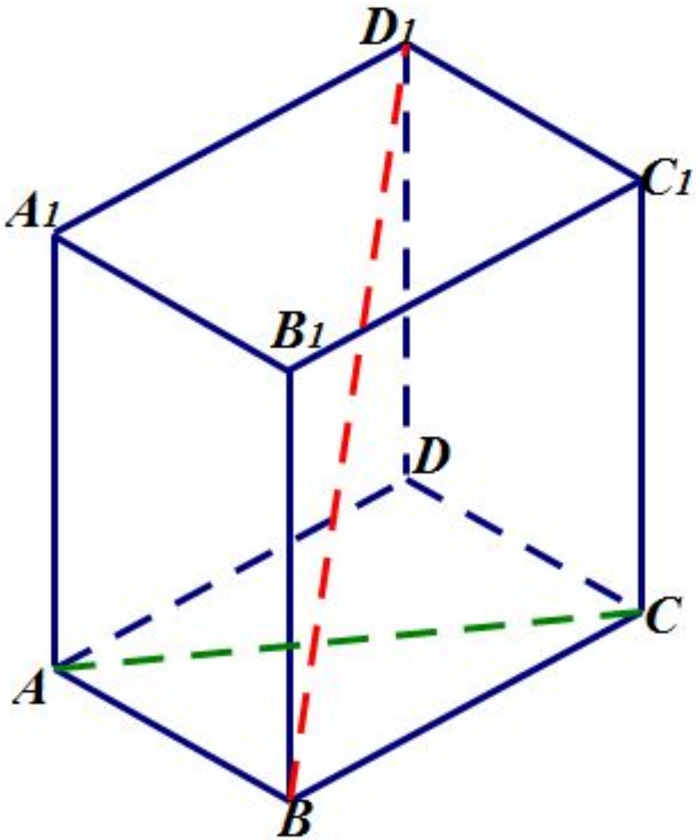
$$V_{KSBC} =\frac{1}{3} S_{SBC} \cdot h=\frac{1}{3}\cdot 32\sqrt{5}\cdot\frac{12\sqrt{5}}{5} =128$$

Задача. (Досрочный экзамен 2017 г.)

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью γ содержащей прямую BD_1 и параллельно прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

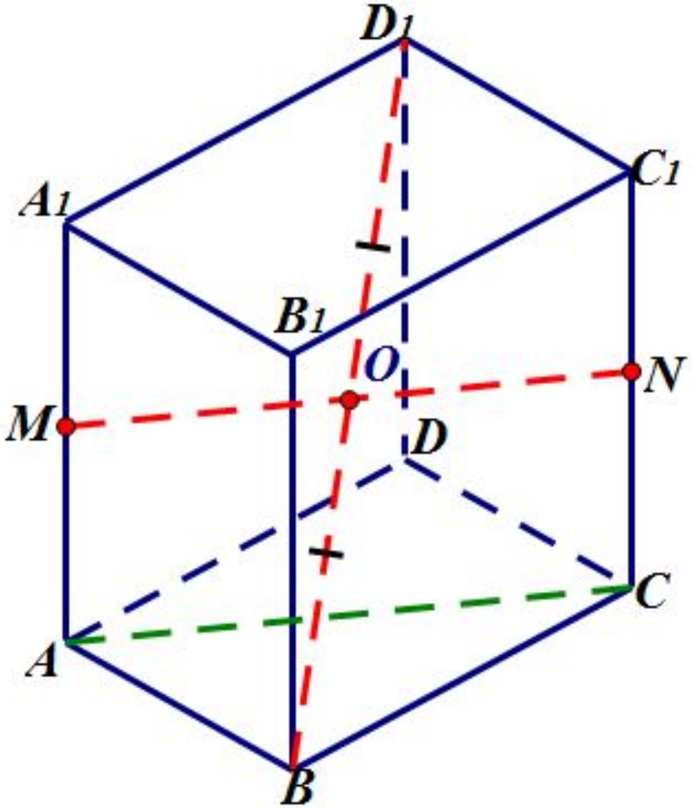
б) Найдите угол между плоскостями γ и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

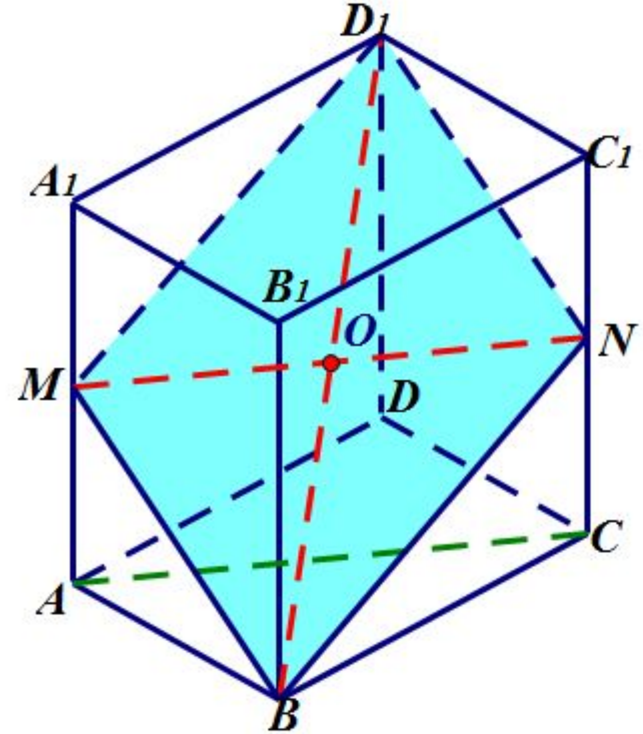


а) Шаг 1

O – середина BD_1

$MN \parallel AC$

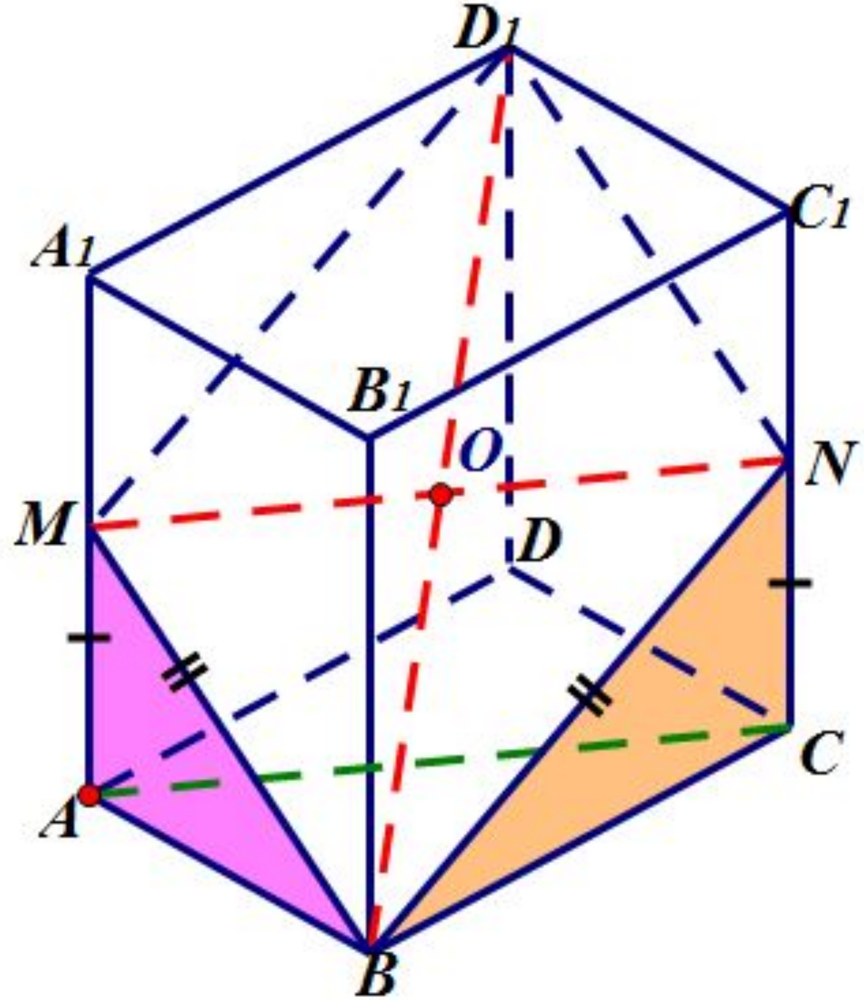




BMD_1N по условию – ромб

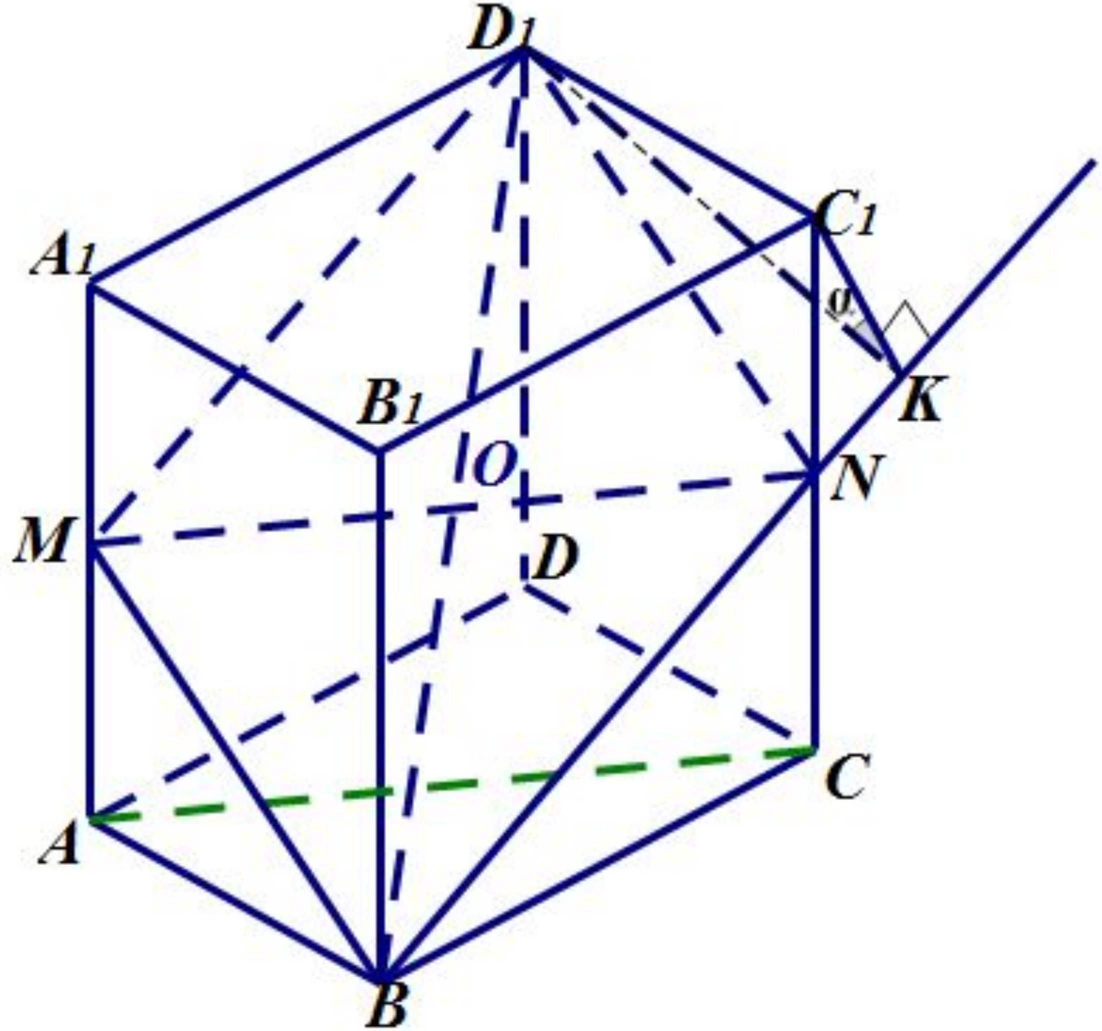
Шаг 2

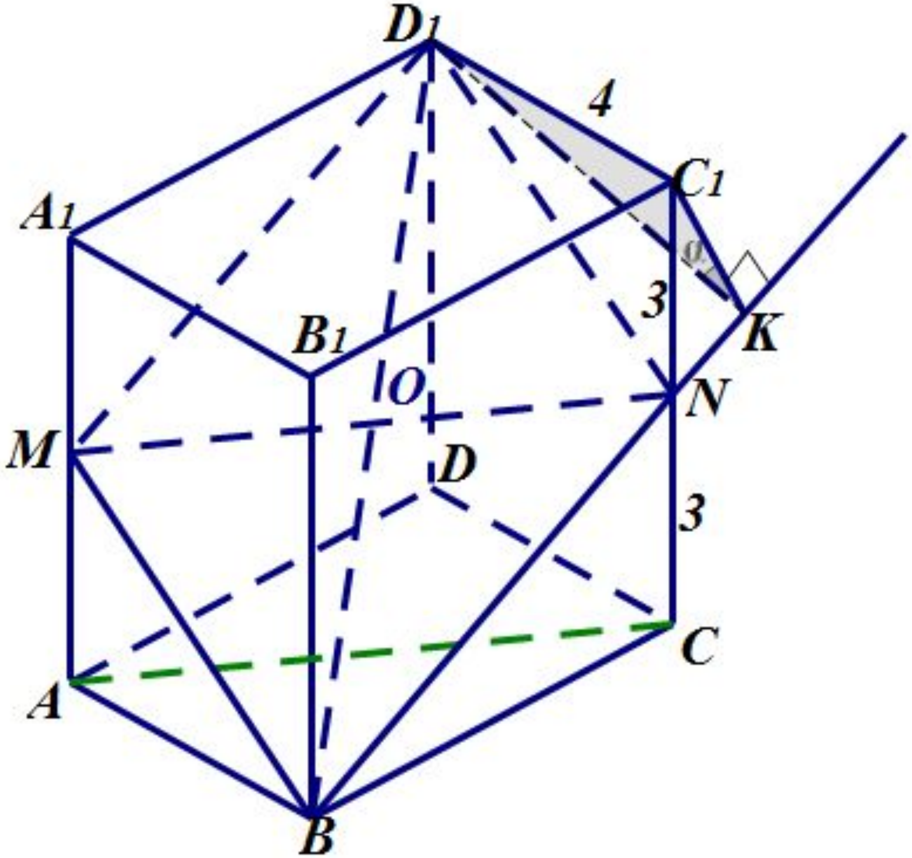
ΔABM=ΔBNC
по катету и гипотенузе,
откуда AB=BC,
значит прямоугольник
ABCD – квадрат.

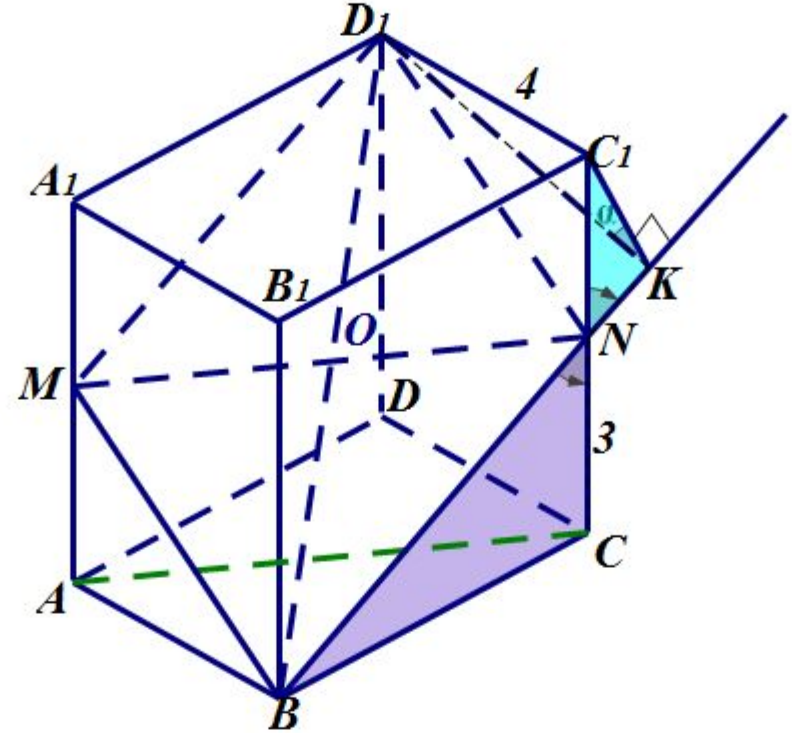


$\Rightarrow D_1K \perp BN \Rightarrow$

$\angle D_1KC$ – искомый. Пусть $\angle D_1KC = \alpha$







$$\frac{BC}{C_1K} = \frac{BN}{C_1N}$$

$$\frac{4}{C_1K} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{3}$$

$$tg\alpha = \frac{D_1C_1}{C_1K}$$

$$C_1K = \frac{12}{5}$$

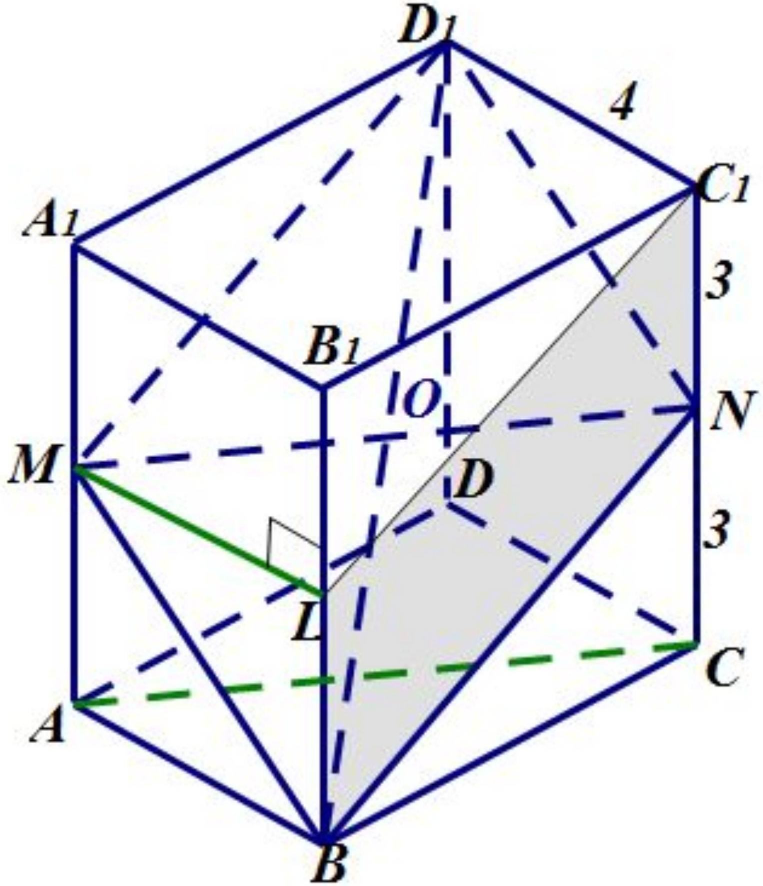
$$tg\alpha = \frac{4\cdot 5}{12} = \frac{5}{3}$$

$$tg\alpha = \frac{4}{C_1K}$$

$$\alpha = arctg\frac{5}{3}$$

Способ 2

Параллелограмм BNC_1L – проекция ромба BMD_1N на плоскость BCC_1.



$$S_{BLC_1N} = S_{BMD_1N} \cdot \cos\alpha$$

$$BL \cdot BC = \frac{1}{2} BD_1 \cdot MN \cdot \cos\alpha$$

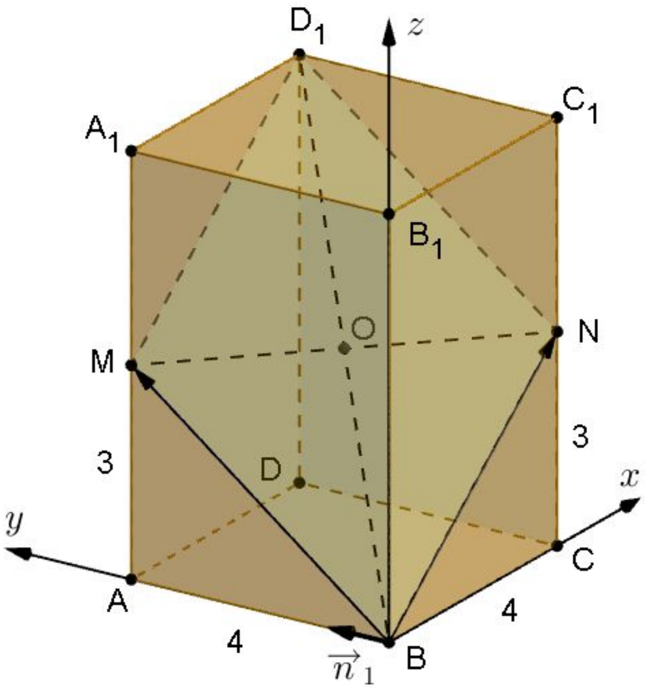
$$3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$$

Способ 3

б) 1) Введем систему координат как показано на рисунке. Координаты нужных точек: $B(0;0;0)$, $M(0;4;3)$, $N(4;0;3)$.



2) Искомый угол между плоскостями α равен углу между нормалями к ним. Нормаль к плоскости BCC_1 задаётся вектором $\vec{n_1}(0;1;0)$.

3) Найдём нормаль к плоскости сечения BMD_1N, которая задаётся вектором $\vec{n_2}(x;y;z)$.
$\overrightarrow{BM}(0;4;3)$, $\overrightarrow{BN}(4;0;3)$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{BM}\cdot\vec{n_2}=0, \\ \overrightarrow{BN}\cdot\vec{n_2}=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4y+3z=0, \\ 4x+3z=0. \end{cases}$$

Пусть $x=1$, тогда

$$\begin{cases} 4y+3z=0, \\ 4+3z=0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4y-4=0, \\ 3z=-4; \end{cases} \quad \begin{cases} y=1, \\ z=-\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Значит, $\vec{n_2}\left(1;1;-\dfrac{4}{3}\right)$.

$$4)\,\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|0\cdot1+1\cdot1+0\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2+\frac{16}{9}}}=\frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Значит $\alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$.

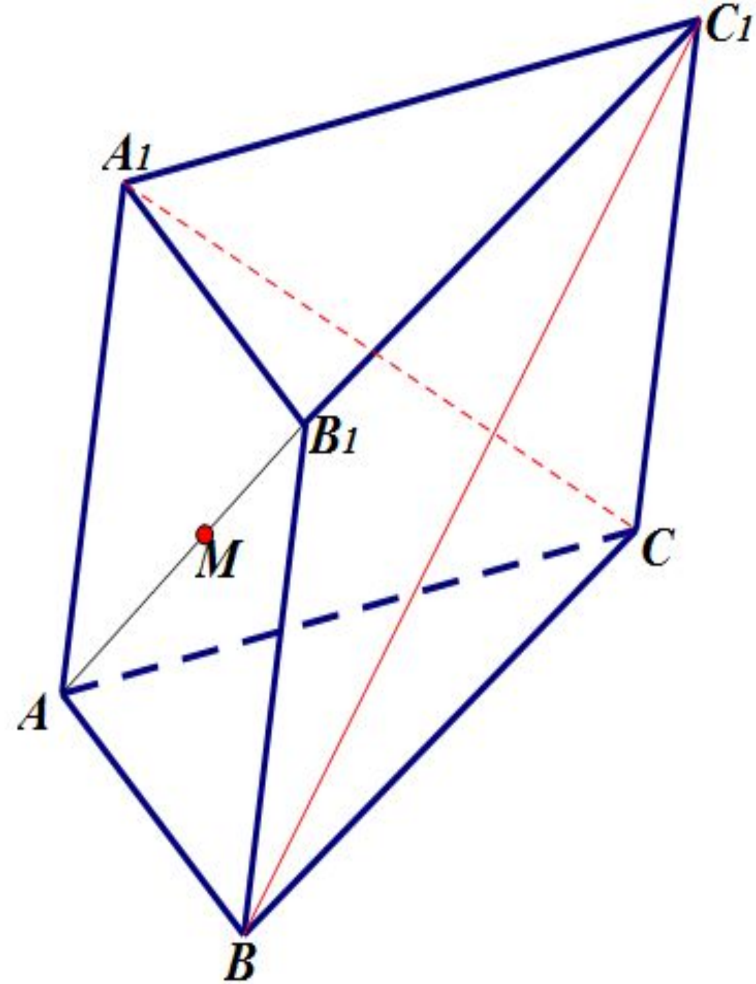
Ответ: $\arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$.

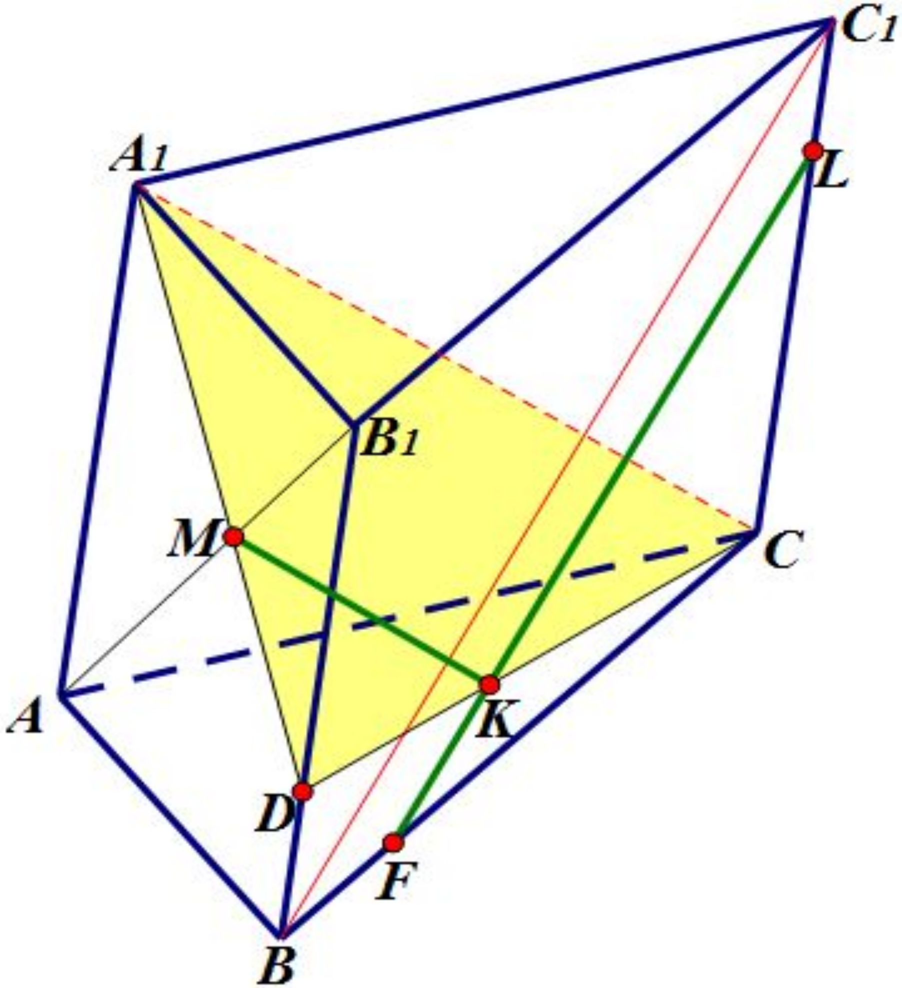
Задача

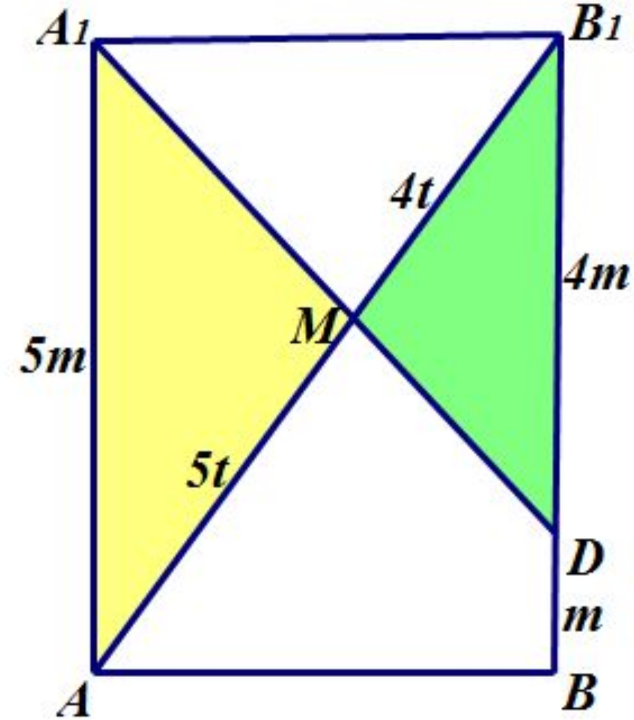
На диагонали AB_1 грани ABB_1A_1 треугольной призмы взята точка M так, что $AM:MB_1=5:4$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку M, параллельно диагоналям A_1C и BC_1 двух других граней.

б) Найдите, в каком отношении плоскость сечения делит ребро CC_1.



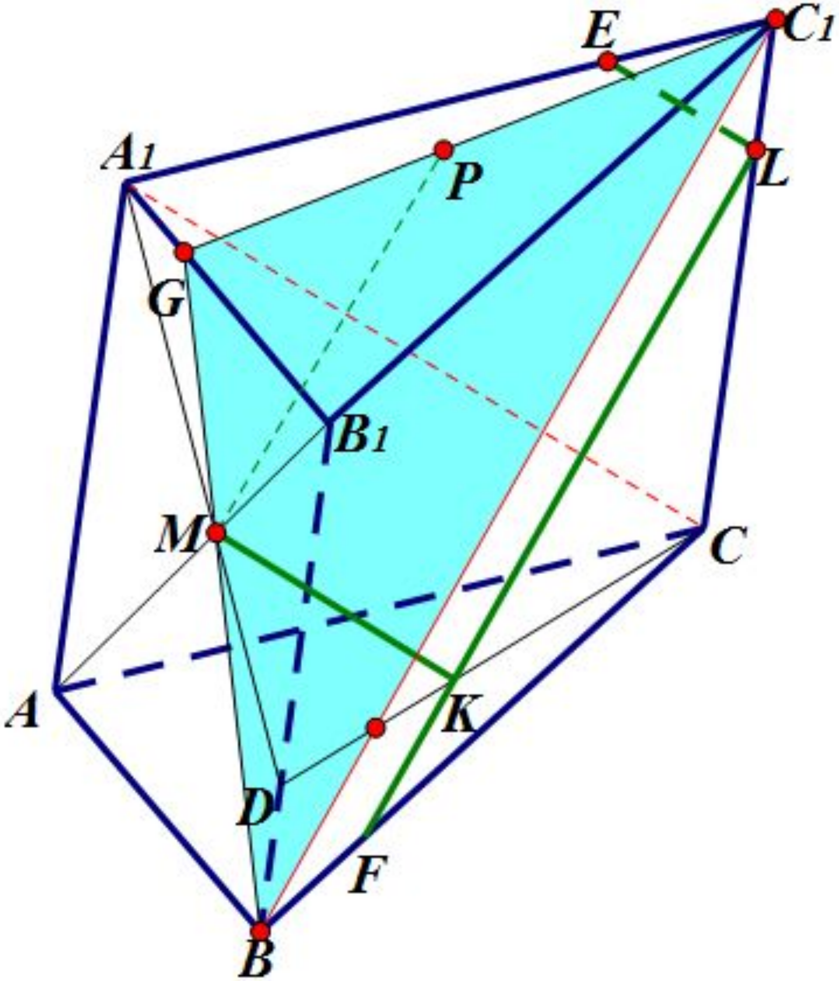




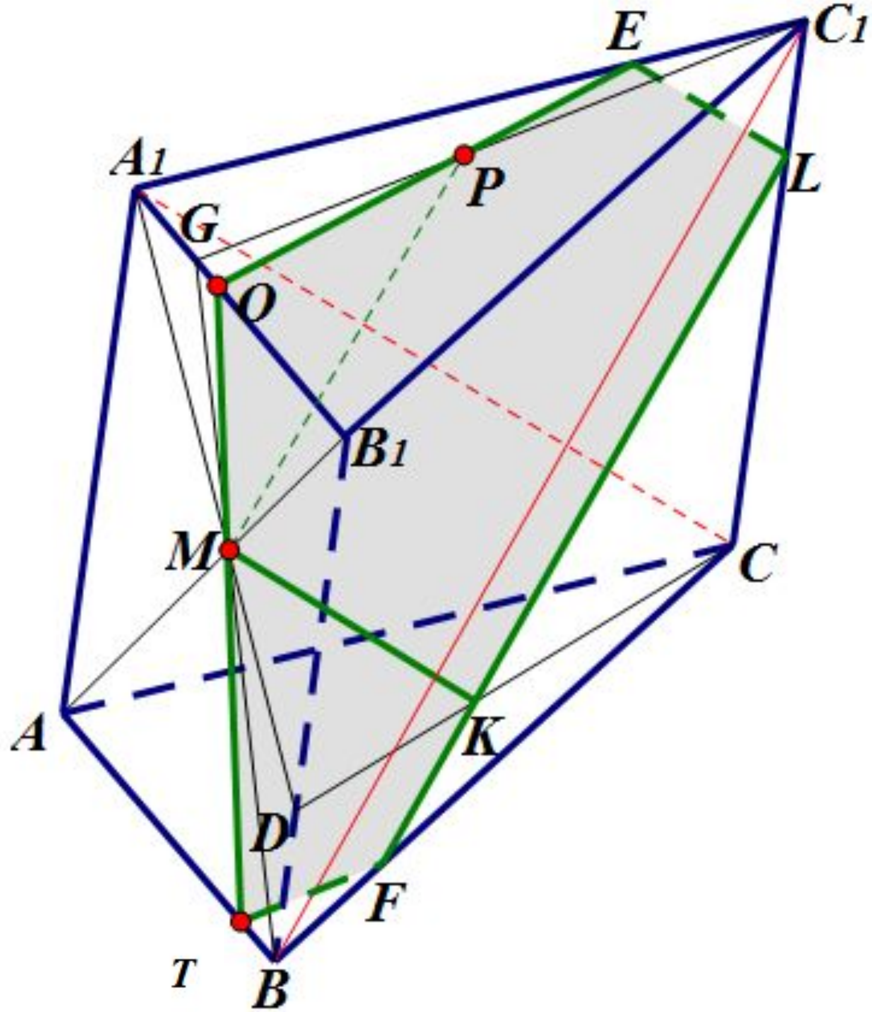
$$BD=\frac{1}{5}BB_1=\frac{1}{5}CC_1$$

$$DM:MA_1=DK:KC=4:5$$

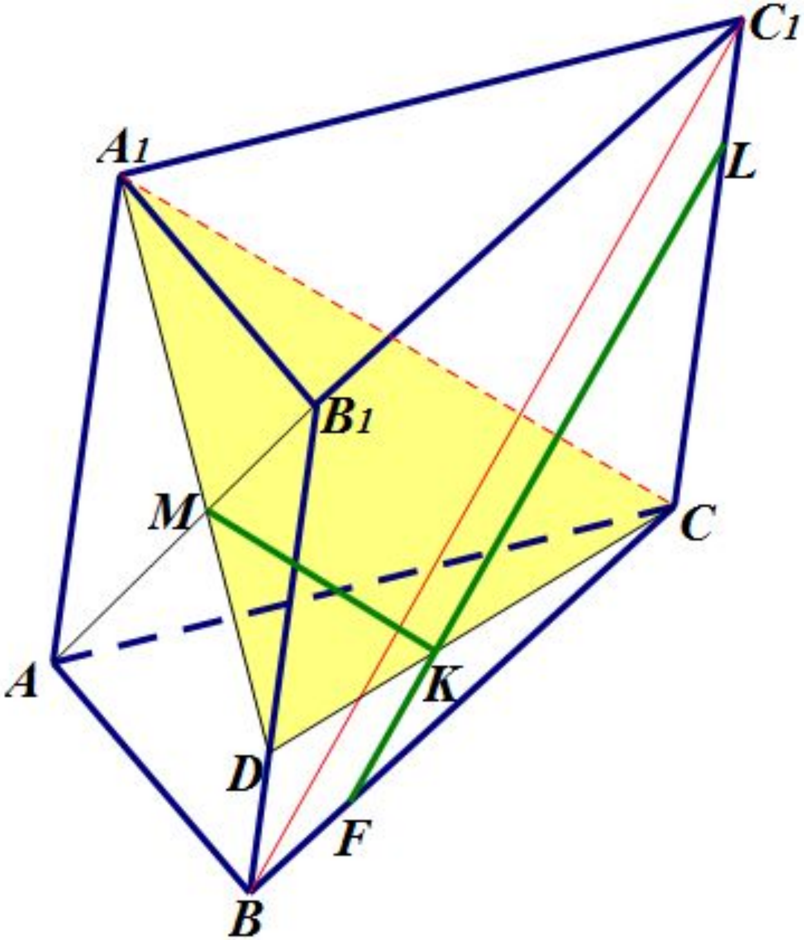
$$DK=\frac{4}{9}CD$$

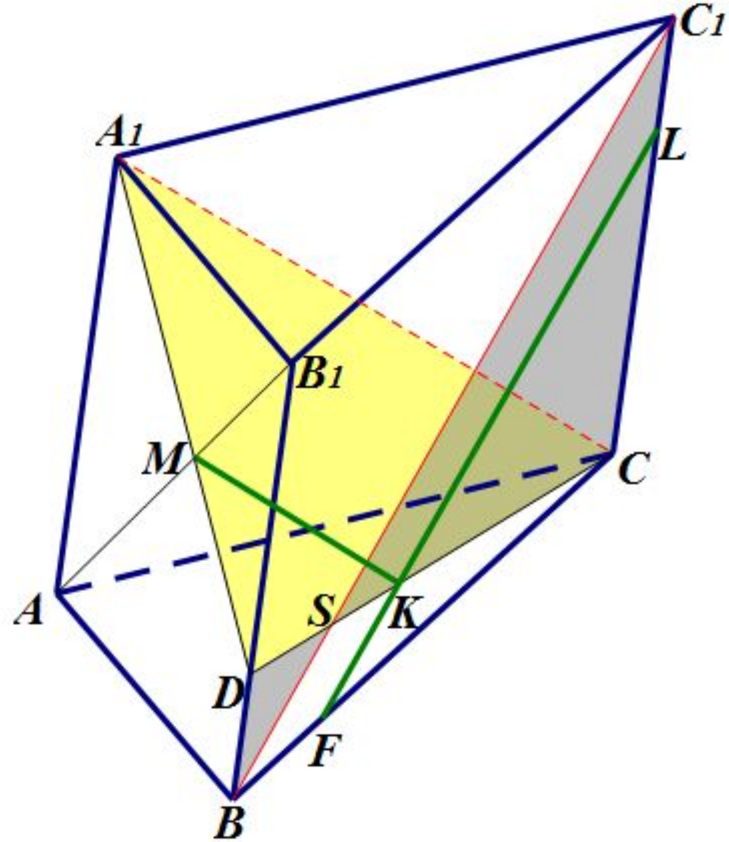


E
C1
A1
P
L
G
B1
M
C
A
K
D
F
B



E
C1
A1
P
L
G
O
B1
M
C
A
K
D
F
T
B





$$CD = 6SD$$

$$SK = DK - DS = \frac{4}{9}CD - \frac{1}{6}CD = \frac{5}{18}CD$$

$$CK : KS = CL : LC_1 = \frac{5}{9} : \frac{5}{18} = 2:1$$

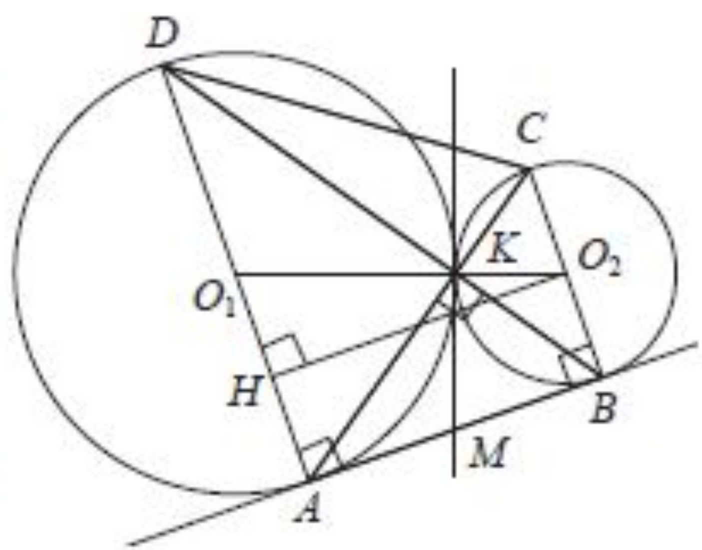
Демонстрационный вариант ЕГЭ 2018 задание 16

Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение. а) Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, прямоугольный.



Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично, получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

б) Пусть, для определённости, первая окружность имеет радиус 4, а вторая — радиус 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда

$$S_{AKD} = 16S.$$

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0{,}8$ и $S_{AKB} = 4S = 3{,}2$.

Ответ: 3,2.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

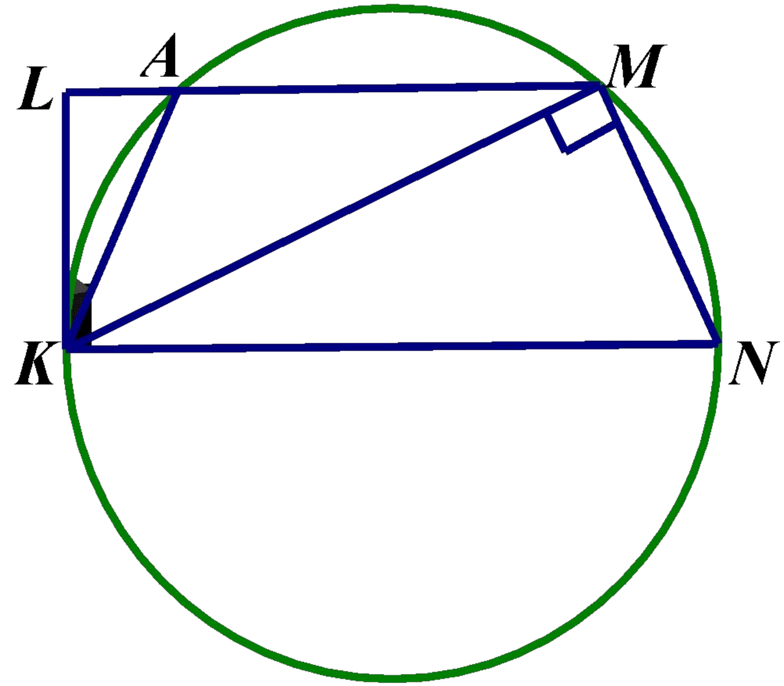
Задача 1 (задание 16 ЕГЭ 2017)

основная волна

В прямоугольной трапеции KLMN с основаниями KN и LM (KN>LM) окружность, построенная на большем основании как на диаметре, пересекает меньшее основание в точках A и M.

а) Докажите, что угол AKL равен углу MKN.

б) Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника KLO, если $KL=3\sqrt{6}$, $LM=6LA$.

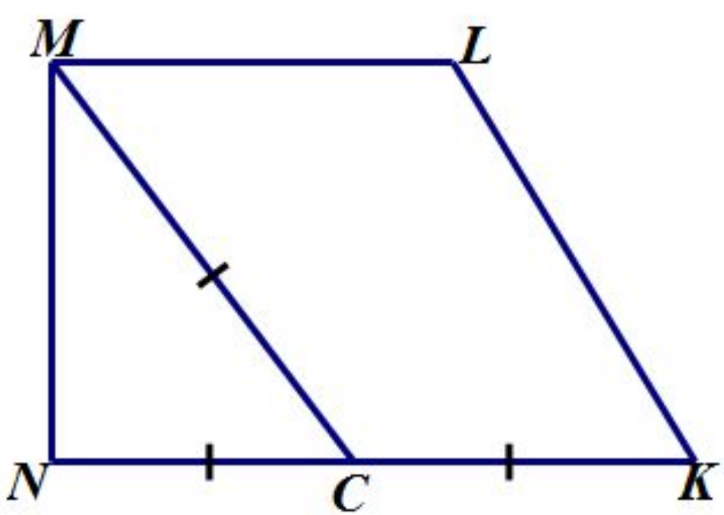


Рассмотрим два случая:

1. ∠ MNK= 90°.

MC=NC,

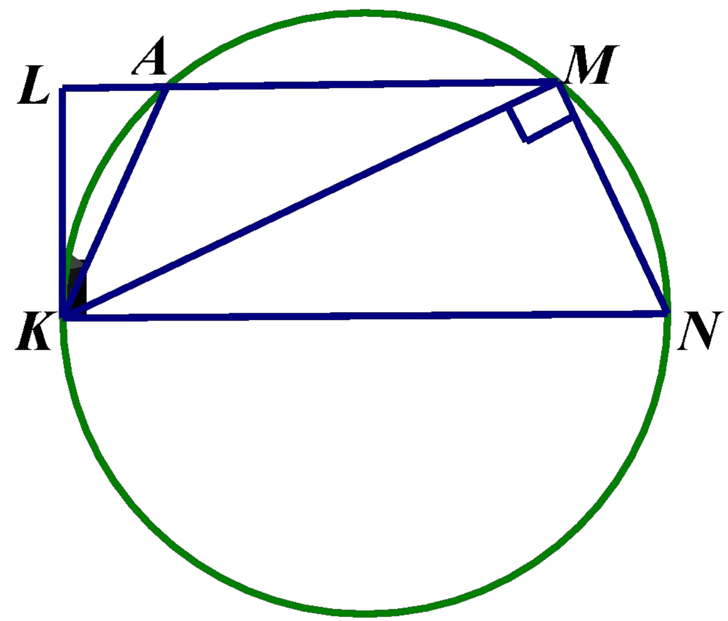
что невозможно (катет не равен гипотенузе).



2. ∠ LKN= 90°.

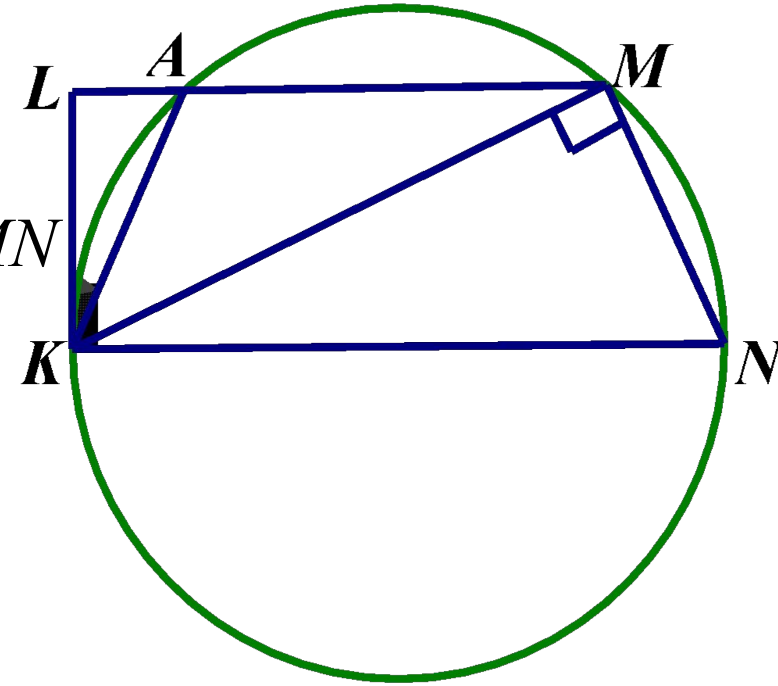
KN - диаметр, следовательно, KL – касательная,

AK – хорда.



Решение.

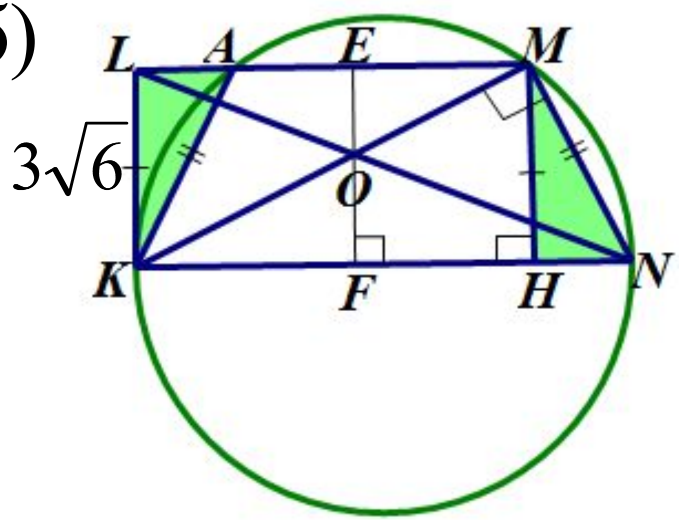
а) $\angle AKL = \frac{1}{2} \cup AK$, $\angle MKN = \frac{1}{2} \cup MN$



$\cup AK = \cup MN$

$\angle AKL = \angle MKN$.

б)



$$\frac{AL}{LK} = \frac{LK}{LM} \qquad \frac{AL}{3\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6AL}$$

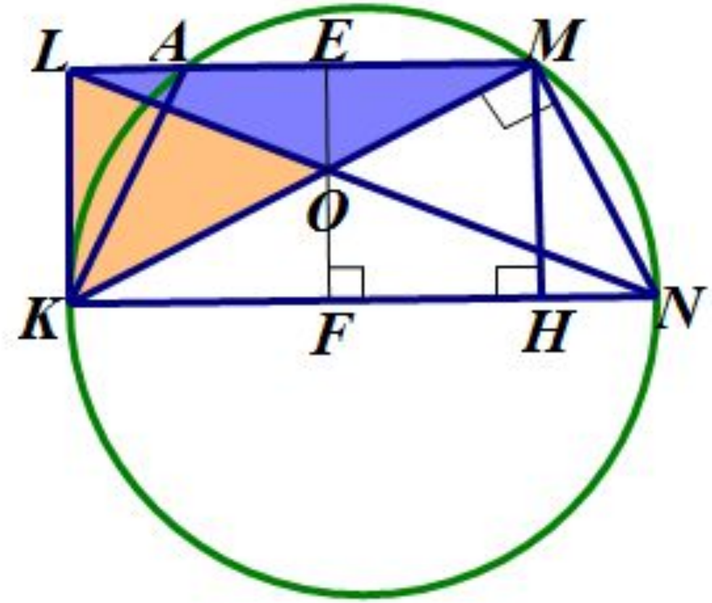
$6AL^2 = 6 \cdot 9$, $AL = 3$, $LM = 18$,

$\Delta AKL = \Delta MHN \Rightarrow AL = HN$

$KN = KH + HM =$
$= LM + LA = 18 + 3 = 21.$

$\Delta ALK \sim \Delta LKM$, $LM = 6LA$

$S_{LOK} = S_{LKM} - S_{LOM}$



$$S_{LKM} = \frac{1}{2} LK \cdot LM = \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot 18 = 27\sqrt{6}$$

$$S_{LOM} = \frac{1}{2} LM \cdot OE = 9 \cdot OE$$

$\Delta LOM \sim \Delta KON$

$$\frac{LM}{NK} = \frac{OE}{OF} \qquad \frac{LM}{NK} = \frac{OE}{EF - OE}$$

$$\frac{18}{21} = \frac{OE}{3\sqrt{6} - OE} \qquad \frac{OE}{3\sqrt{6} - OE} = \frac{6}{7}$$

$$OE = \frac{18\sqrt{6}}{13}$$

$$S_{LOM} = 9 \cdot \frac{18\sqrt{6}}{13} = \frac{162\sqrt{6}}{13}$$

$$S_{LOK} = 27\sqrt{6} - \frac{9 \cdot 18\sqrt{6}}{13} =$$

$$= 9\sqrt{6}\left(3 - \frac{18}{13}\right) =$$

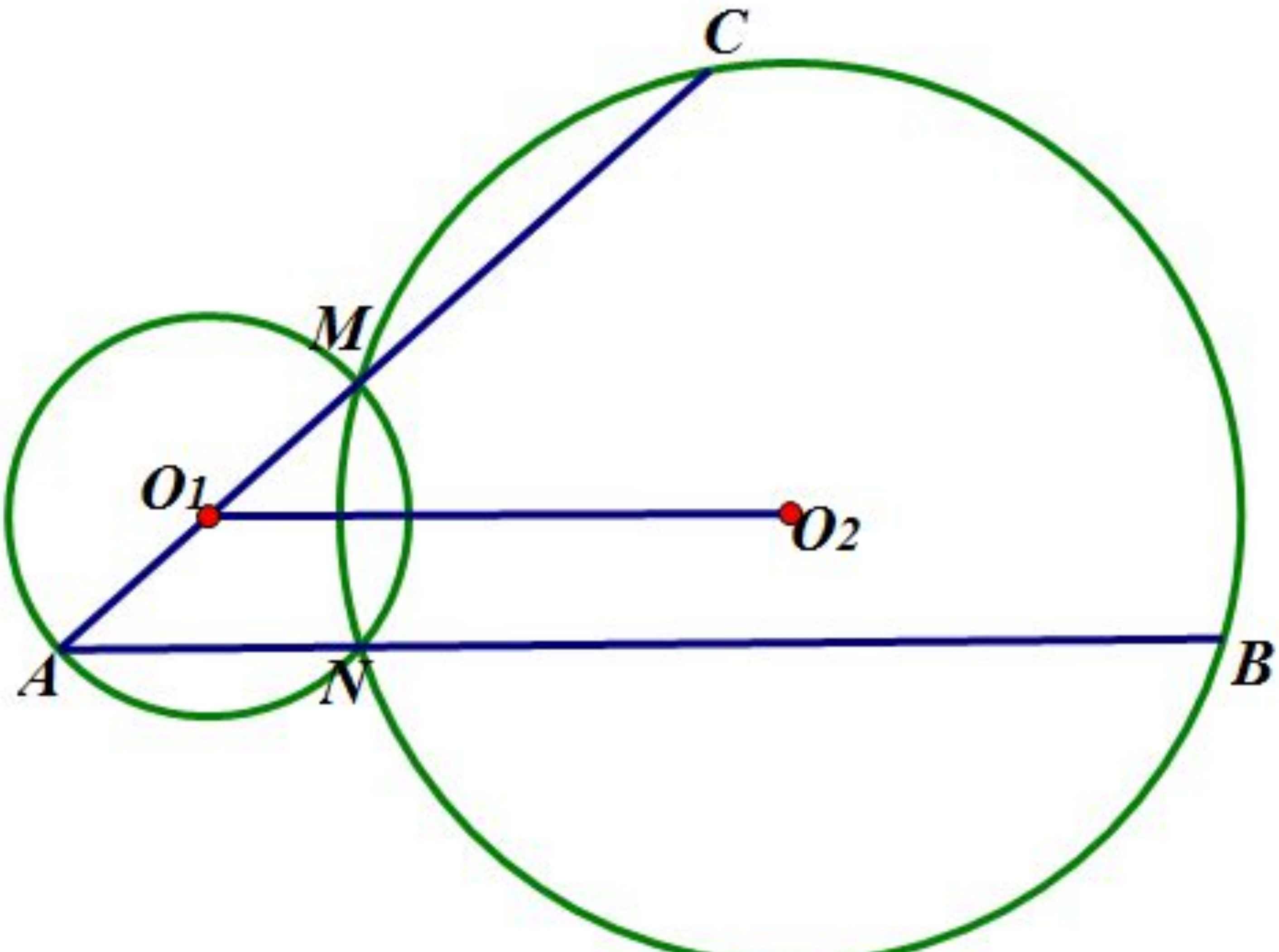
$$= \frac{9 \cdot 21\sqrt{6}}{13} = \frac{189\sqrt{6}}{13}$$

Задача
(№16 вариант 15 «Легион» ЕГЭ 2018)

Две окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках M и N, причем точки O_1 и O_2 лежат по разные стороны от прямой MN. Продолжение диаметра AM первой окружности и хорды AN этой же окружности пересекают вторую окружность в точках C и B соответственно.

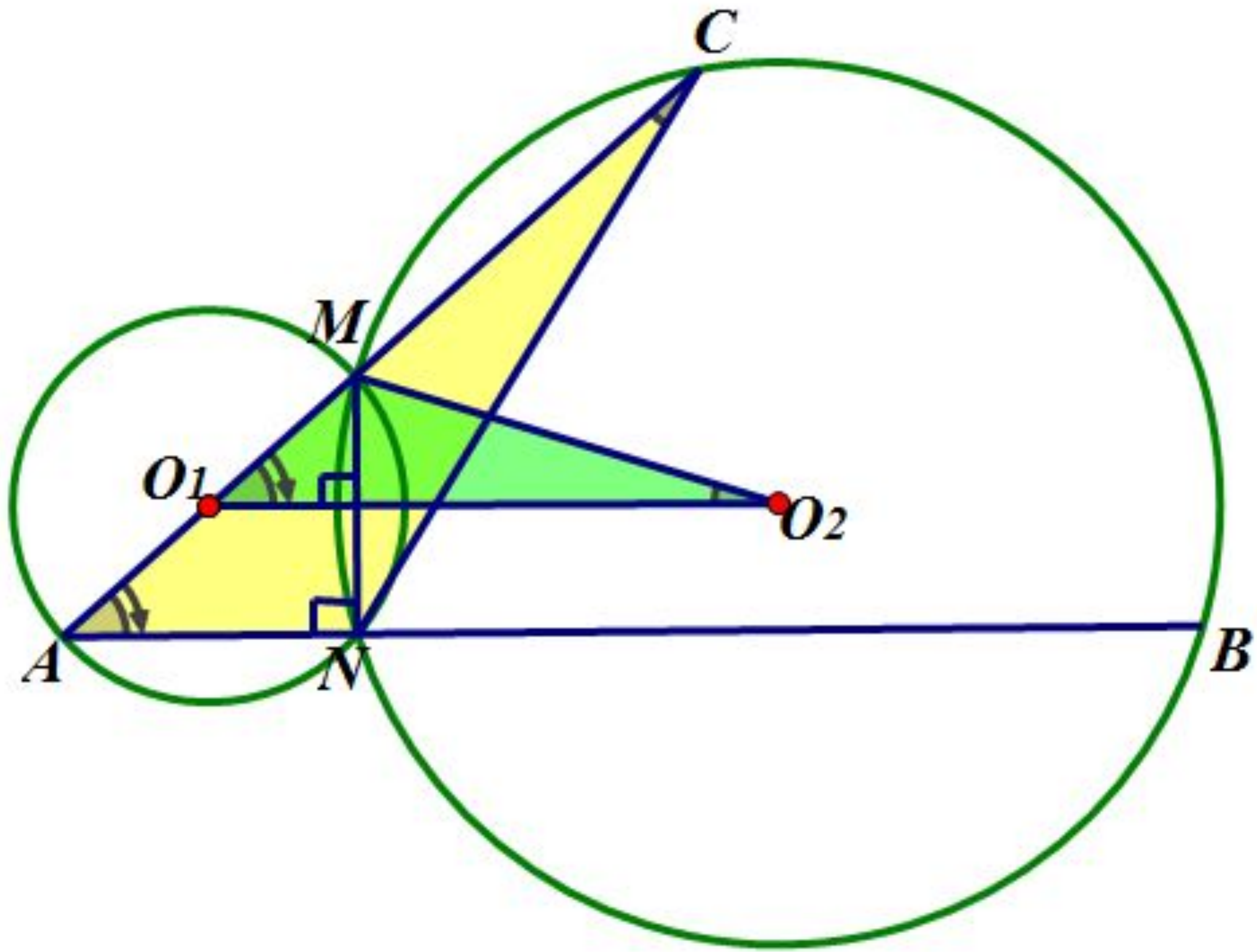
а) Докажите, что треугольники ANC и O_1MO_2 подобны;

б) Найдите MC, если $\angle CMB = \angle NMA$, а радиус второй окружности в 2,5 раза больше радиуса первой и MN=2.

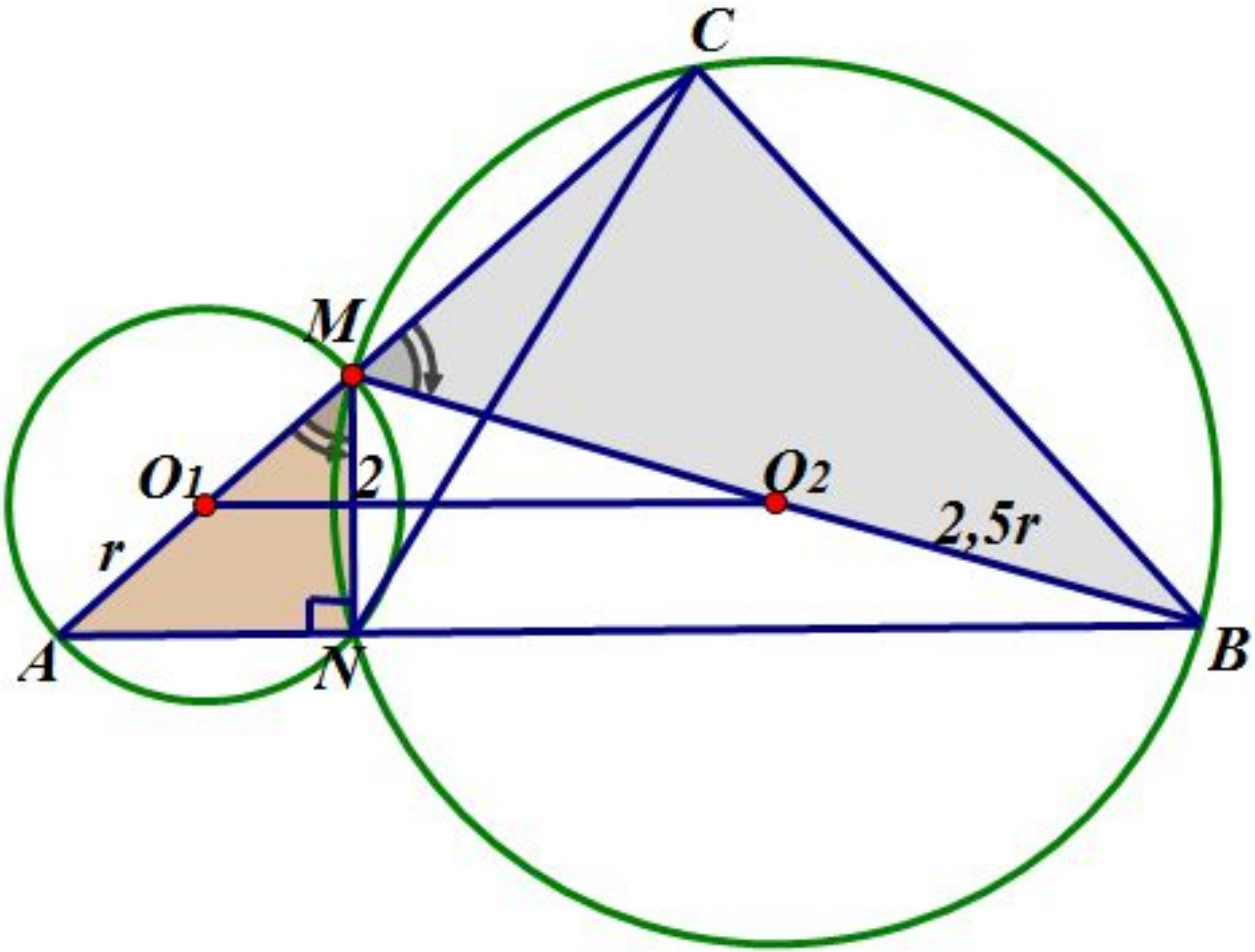

C
M
O1
O2
A
N
B

Решение.

а)



б)

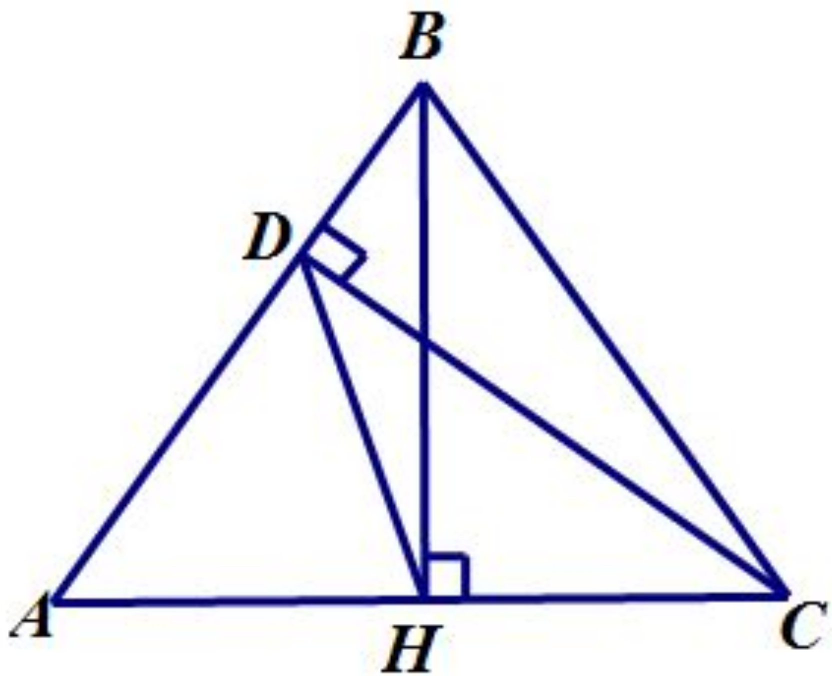


$$\frac{MC}{MN} = \frac{MB}{AM} \qquad \frac{MC}{2} = \frac{5r}{2r}$$

MC=5

Задача 4

Доказать, что прямая, проходящая через основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от этого треугольника подобный ему треугольник.



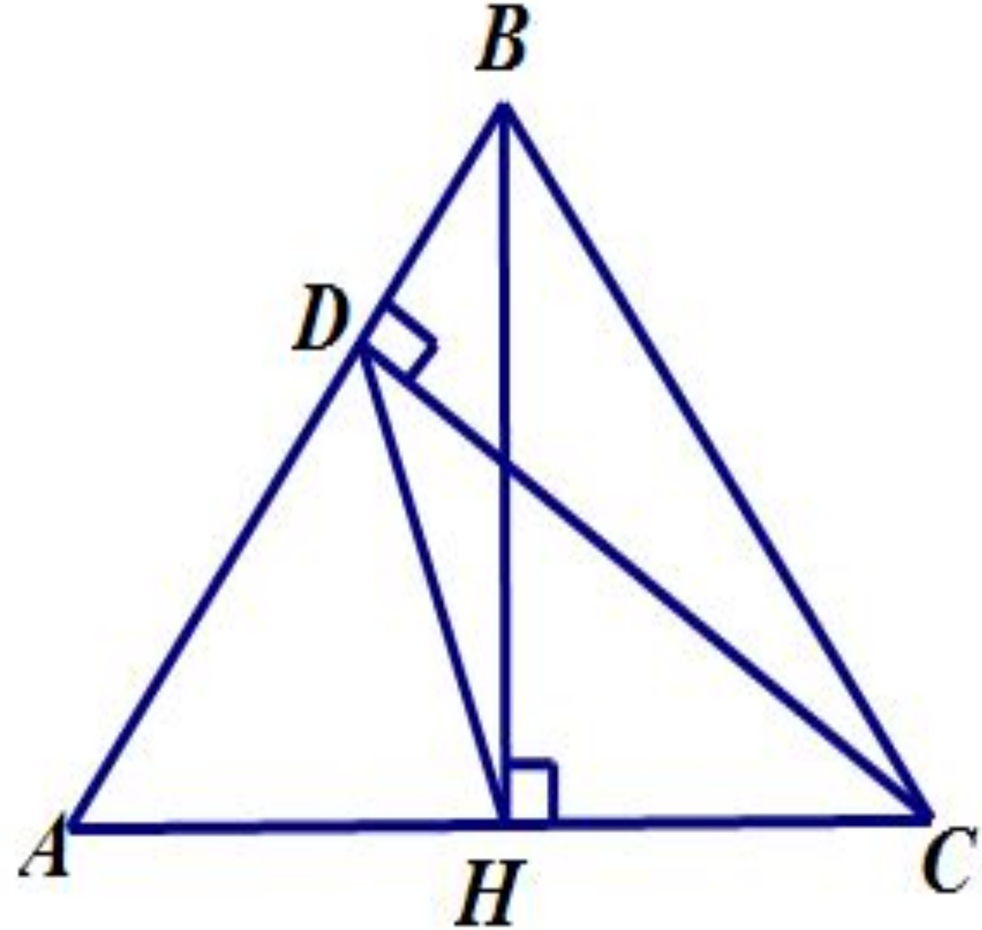
Решение.

Дано: ΔABC – остроугольный,

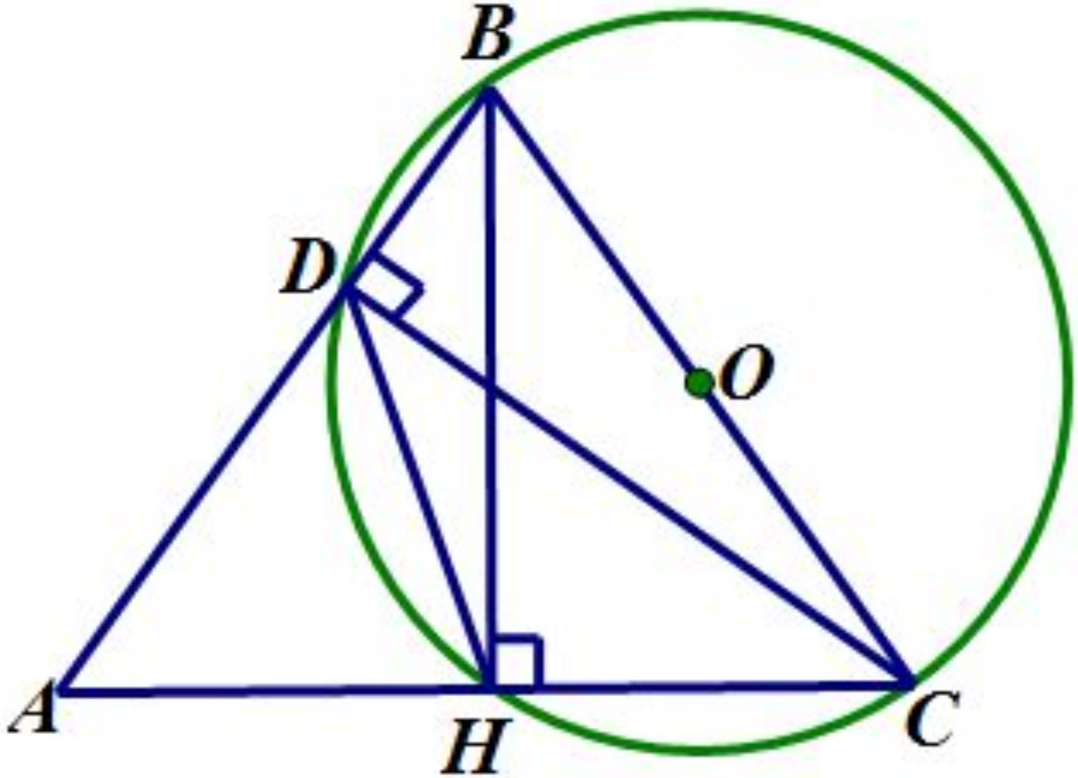
BH, CD – высоты.

Доказать:

ΔABC ~ ΔADH.



Построим вспомогательную окружность, с центром в точке O (середина BC), которая пройдет через точки H и D.

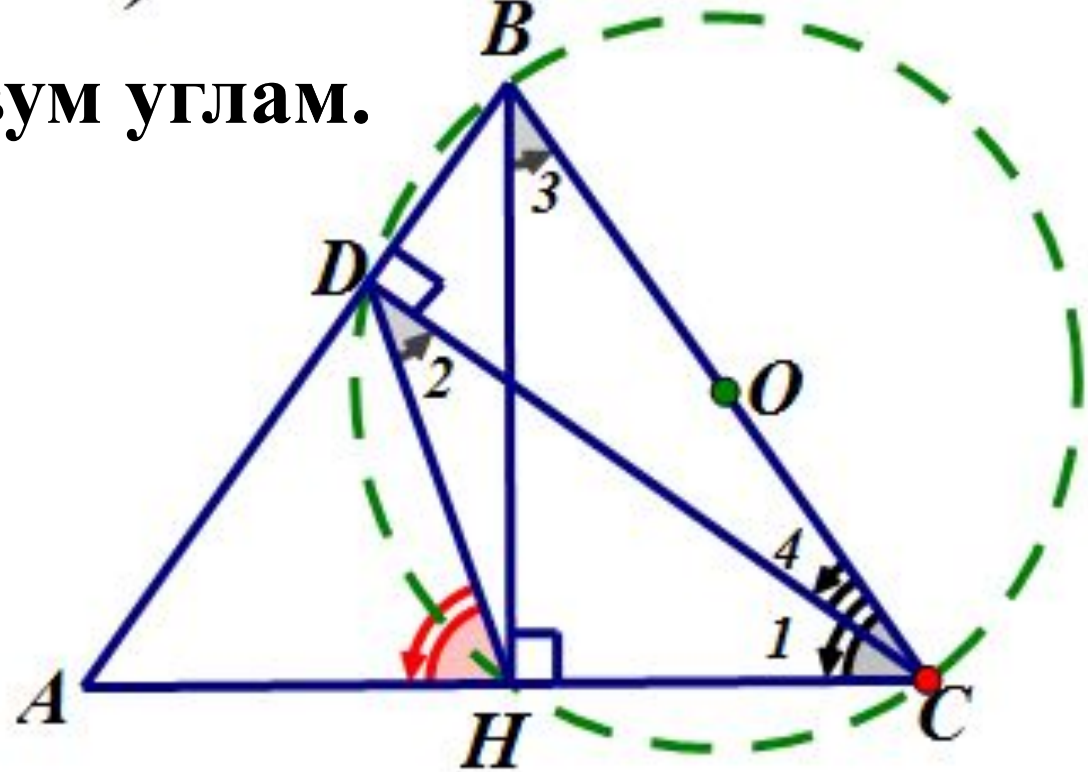


$\angle 1 = \angle C - \angle 4 = \angle C - (90° - \angle B)$

$\angle AHD = \angle 1 + \angle 2 = \angle 1 + \angle 3 =$

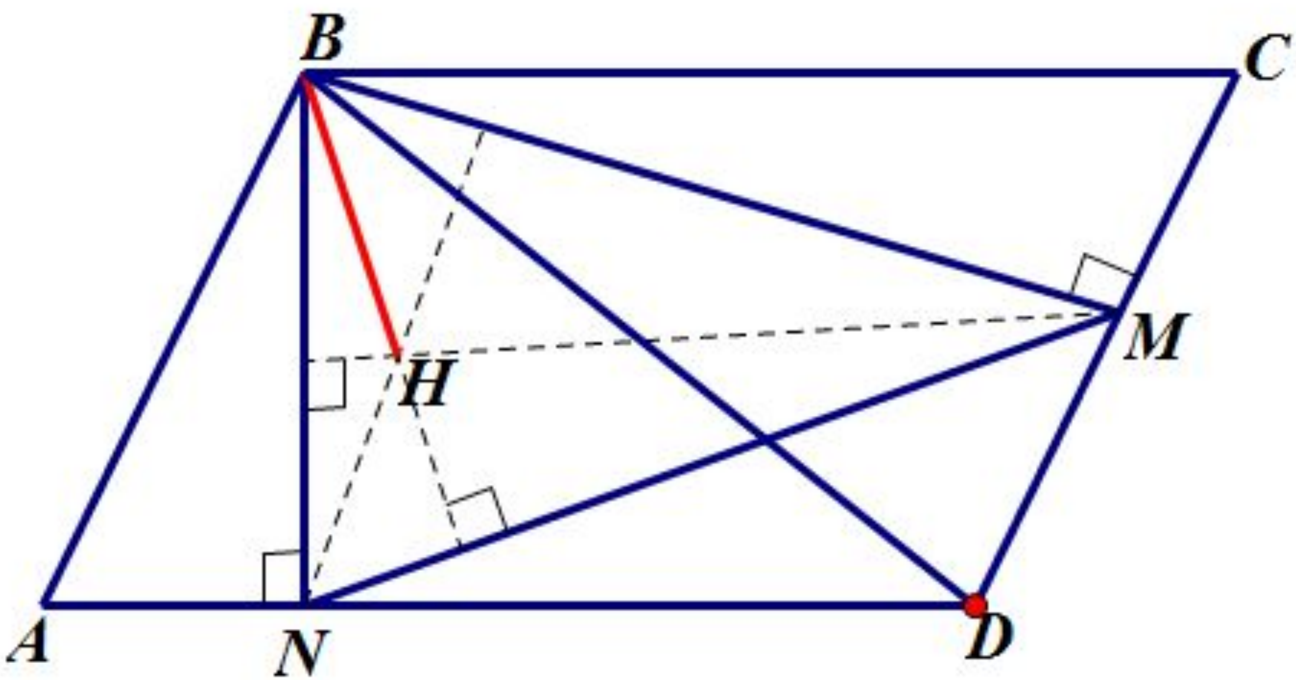
$= \angle C - (90° - \angle B) + (90° - \angle C) = \angle B$

ΔABC~ΔADH по двум углам.



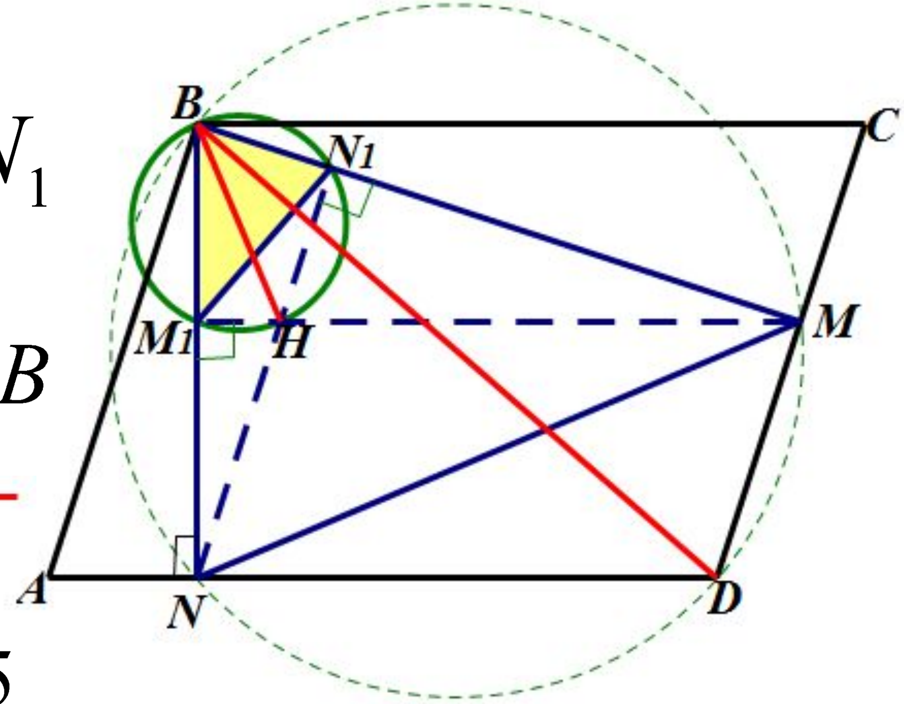
Задача

В параллелограмме ABCD проведены высоты BN и BM. Известно, что MN=15, BD=17. Найти расстояние от точки B до точки H – точки пересечения высот треугольника BMN.



Решение.

$$\Delta BMN \sim \Delta BM_1N_1$$



$$\frac{BM_1}{BM} = \frac{M_1N_1}{MN} = \frac{BH}{BD} = \cos B$$

$$\frac{M_1N_1}{15} = \frac{BH}{17} \quad \Rightarrow M_1N_1 = \frac{15}{17}BH$$

$$BH = \frac{M_1N_1}{\sin B} \qquad \sin B = \frac{15}{17} \qquad \cos B = \frac{8}{17}$$

$$BH = 8$$

Ответ. 8

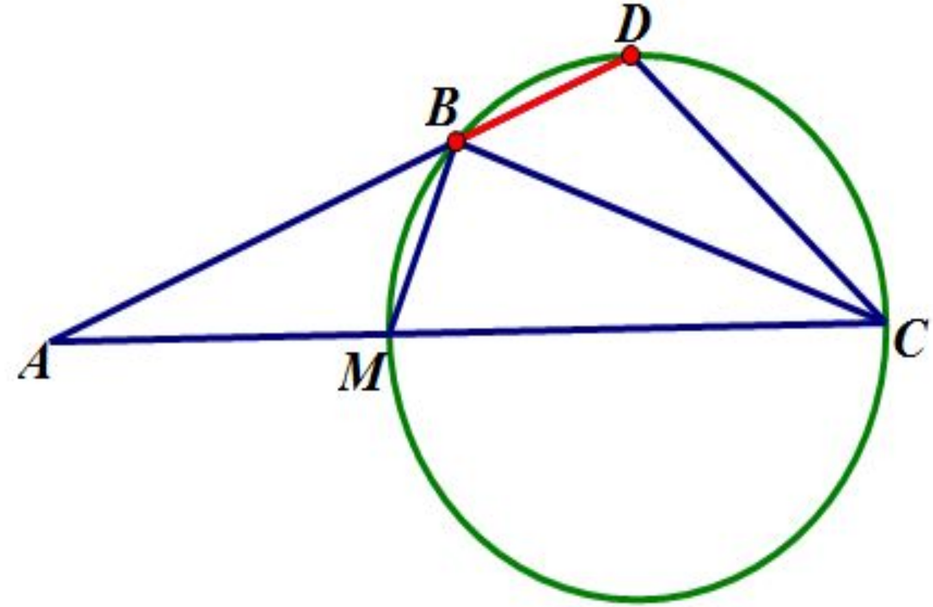
Задача

В треугольнике ABC точка M – середина AC.

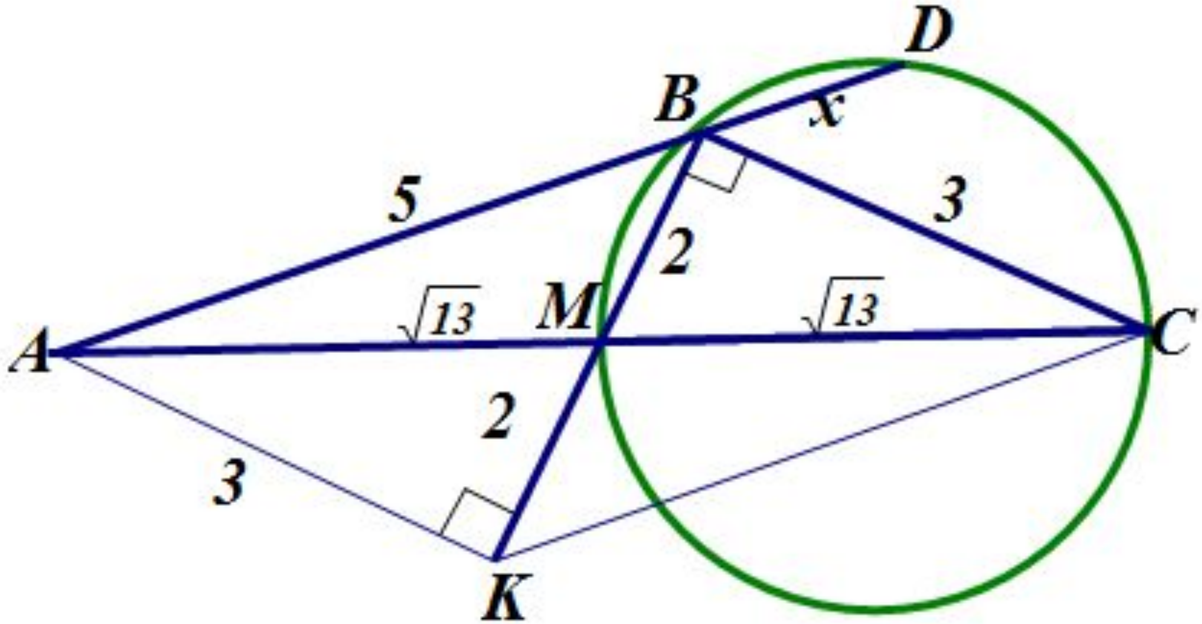
а) Докажите, что длина отрезка BM больше полуразности, но меньше полусуммы длин сторон AB и BC.

б) Окружность проходит через точки B, C, M. Найдите длину хорды этой окружности, лежащей на прямой AB, если известно, что

AB=5, BC=3, BM=2.



б)



AB·AD=AC·AM

$$5 \cdot (5 + x) = 2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}$$

$x=0,2$