Преобразования Лапласа

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-pt}\,dt,$$

устанавливает соответствие между функциями действительной переменной *t* и функциями комплексной переменной *p*. Функцию времени *x(t)*, входящую в интеграл Лапласа, называют *оригиналом*, а результат интегрирования – функцию *X(p)* - *изображением* функции *x(t)* по Лапласу.

$$\mathit{\Gamma}^{1}\left[X(p)\right] = x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)e^{pt}\,dp$$

Изображение производной некоторой функции равно изображению самой функции, умноженному на параметр преобразования *P*

Таблица преобразований Лапласа

$x(t)\ (t > 0)$	$X(s) = L[x(t)]$
$1(t)$	$1/s$
$\delta(t)$	1
t t^n	$1/s^2$ $n!/s^{n+1}$
e^{at} e^{-at}	$1/(s-a)$ $1/(s+a)$
$t \cdot e^{at}$	$1/(s-a)^2$
$t^n \cdot e^{at}$	$n!/(s-a)^{n+1}$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t)$ $\sin(\omega t+\varphi)$	$s/(s^2+\omega^2)$ $[\sin(\varphi)\cdot s+\cos(\varphi)\cdot\omega]/(s^2+\omega^2)$
$\cos(\omega t+\varphi)$	$[\cos(\varphi)\cdot s-\sin(\varphi)\cdot\omega]/(s^2+\omega^2)$
$e^{at}\cdot\sin(\omega t)$	$\omega/[(s-a)^2+\omega^2]$
$e^{at}\cdot\cos(\omega t)$	$(s-a)/[(s-a)^2+\omega^2]$
$e^{at}\cdot\sin(\omega t+\varphi)$ $e^{at}\cdot\cos(\omega t+\varphi)$	$[\sin(\varphi)\cdot(s-a)+\cos(\varphi)\cdot\omega]/[(s-a)^2+\omega^2]$ $[\cos(\varphi)\cdot(s-a)-\sin(\varphi)\cdot\omega]/[(s-a)^2+\omega^2]$

Характеристики САУ

Математическое описание линейного непрерывного динамического элемента системы сводится к описанию связи между его входом и выходом. Данная связь может быть задана в виде:

1) линейного дифференциального уравнения;
2) передаточной функции;
3) частотных характеристик;
4) временных характеристик;

Передаточной функцией звена $W(p)$ называется отношение изображений Лапласа выходной и входной величин при нулевых начальных условиях.

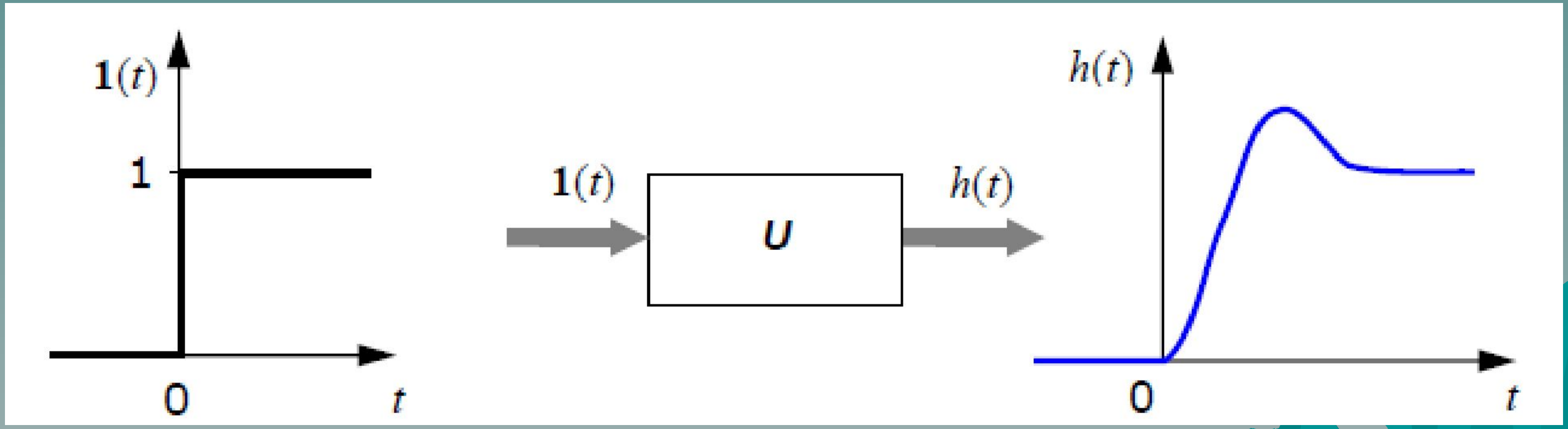
$$\boxed{W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}.}$$

Временные характеристики

Переходная функция

Переходная функция звена представляет собой реакцию на выходе звена, вызванную подачей на его вход единичного ступенчатого воздействия. ***Единичное ступенчатое воздействие (единичная ступенчатая функция)*** – это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы и далее остается неизменным.

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



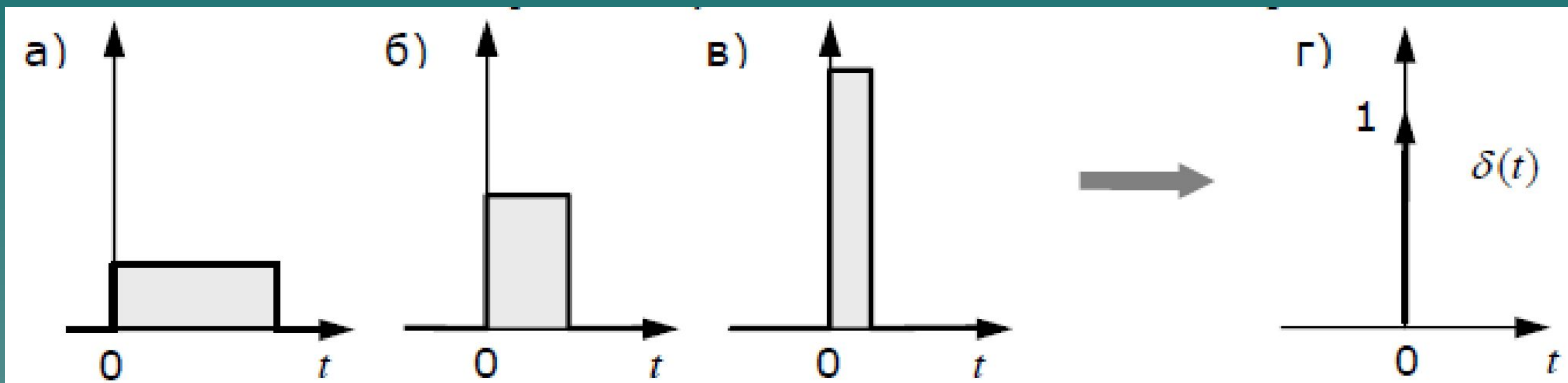
Переходная функция

Переходная характеристика наглядно представляет переход объекта от одного статического состояния к другому. Следовательно, переходная характеристика характеризует динамические свойства системы.

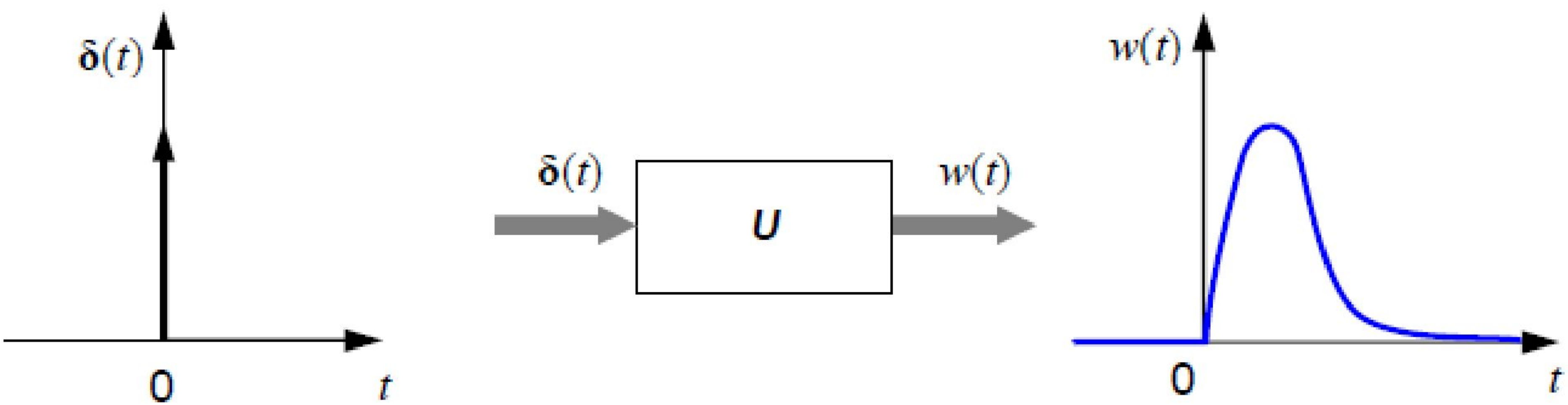
$Y(p) = \dfrac{W(p)}{p}$ - преобразование Лапласа для выходного сигнала системы

$h(t) = L^{-1}\left[\dfrac{W(p)}{p}\right]$ - переходная функция

Импульсная характеристика (весовая функция)



Реакция системы на единичный импульс (дельта-функцию) называется ***импульсной характеристикой***



Импульсная характеристика (весовая функция)

Весовая функция эта характеристика представляет собой реакцию звена на единичный импульс. ***Единичный импульс (единичная импульсная функция***, или ***дельта-функция)*** – это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Единичный импульс – это импульс, площадь которого равна единице при длительности, равной нулю, и высоте, равной бесконечности.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

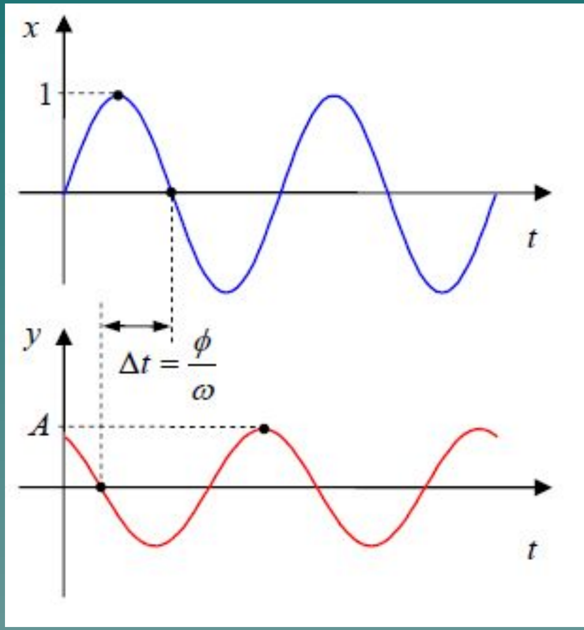
$$L[\delta(t)] = 1$$

$$w(t) = L^{-1}\{W(p)]$$

Частотные характеристики

Частотные характеристики описывают установившиеся вынужденные колебания на выходе звена, вызванные гармоническим воздействием на входе

$$x = x_{\max} \sin \omega t \qquad y = y_{\max} \sin(\omega t + \varphi)$$



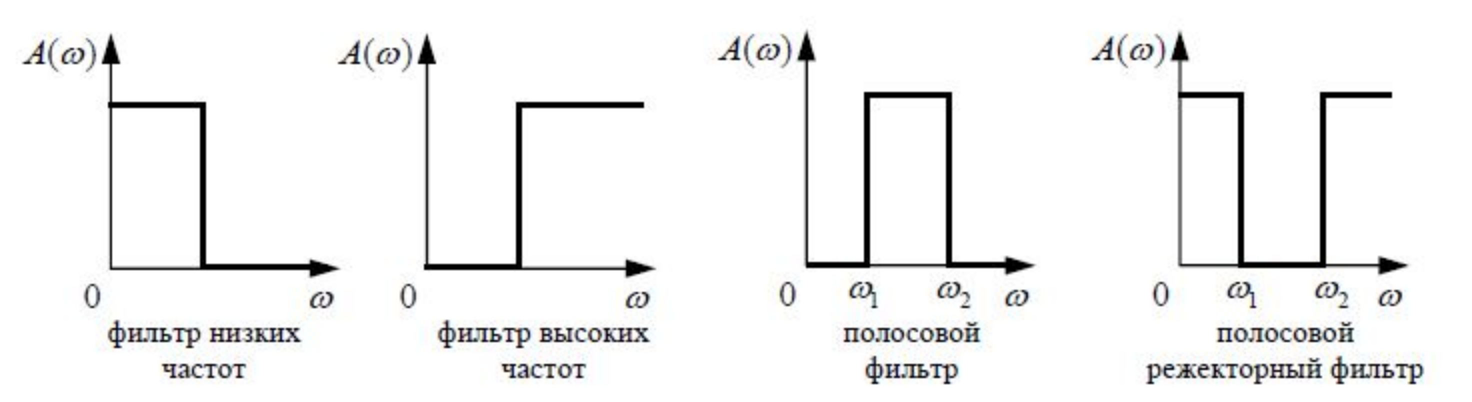
По окончании переходного процесса на выходе звена будут существовать гармонические колебания с той же частотой, что и входные колебания, но отличающиеся в общем случае по амплитуде и фазе.

$$W(jw) = W(p)\,\big|_{p=jw} \qquad W(jw) = P(w) + jQ(w)$$

$$|W(jw)| = \sqrt{P^2(w) + Q^2(w)} \qquad A(\omega) = |W(j\omega)|, \qquad A = y_{max} / x_{max}$$

амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), показывает во сколько раз изменяется амплитуда выходного синусоидального сигнала в зависимости от частоты входного сигнала;

Частотные характеристики

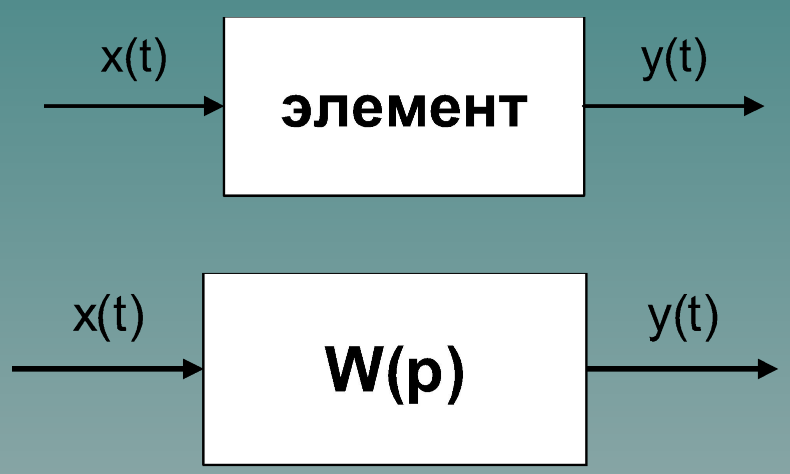


$$\varphi(w) = arctg\frac{Q(w)}{P(w)}$$

Фазочастотная характеристика (ФЧХ) показывает фазовый сдвиг выходного синусоидального сигнала относительно входного в зависимости от частоты входного сигнала;

Типовые динамические звенья

Динамическим звеном называется любой элемент системы автоматического управления, имеющий определенное математическое описание, т.е. для которого известна передаточная функция.



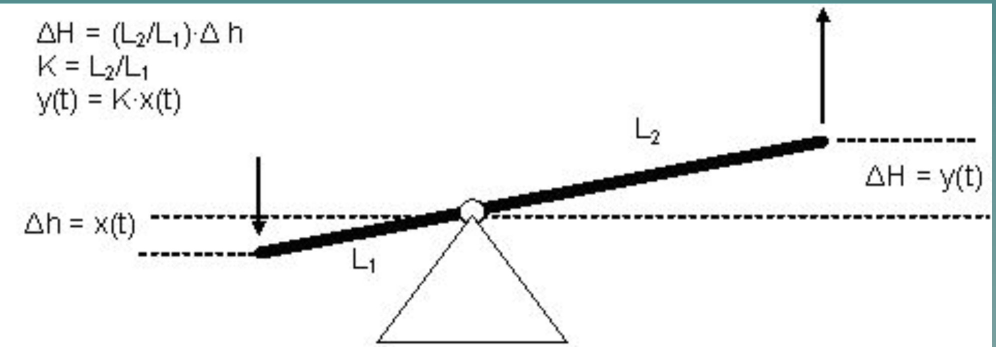
Усилительное (пропорциональное) звено

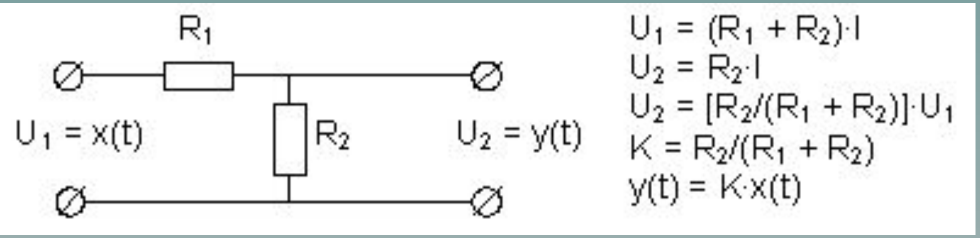
Передаточная функция $W(p) = K$ где К – коэффициент усиления.

Математическое описание звена $y(t) = K \cdot x(t)$

Физическая реализация звена.

Примерами таких звеньев могут служить, рычажный механизм, жесткая механическая передача, редуктор, электронный усилитель сигналов на низких частотах, делитель напряжения и др.





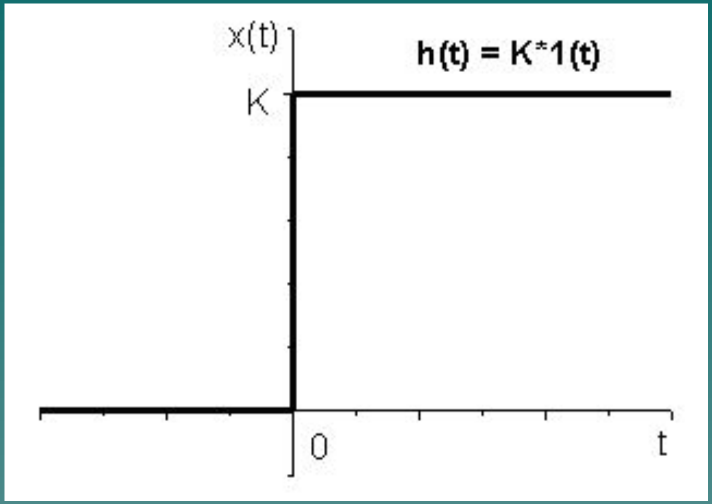
Усилительное (пропорциональное) звено

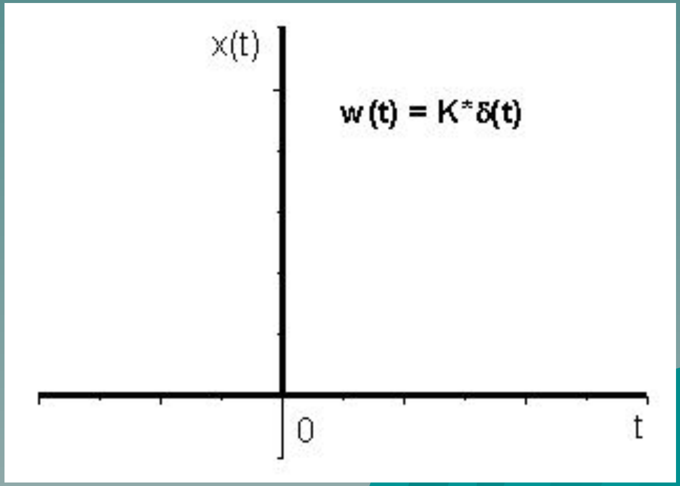
Переходная функция.

$$h(t) = L^{-1}[W(s)/s] = L^{-1}[K/s] = K \cdot 1(t)$$

Весовая функция.

$$w(t) = L^{-1}[W(s)] = K \cdot \delta(t)$$





Усилительное (пропорциональное) звено

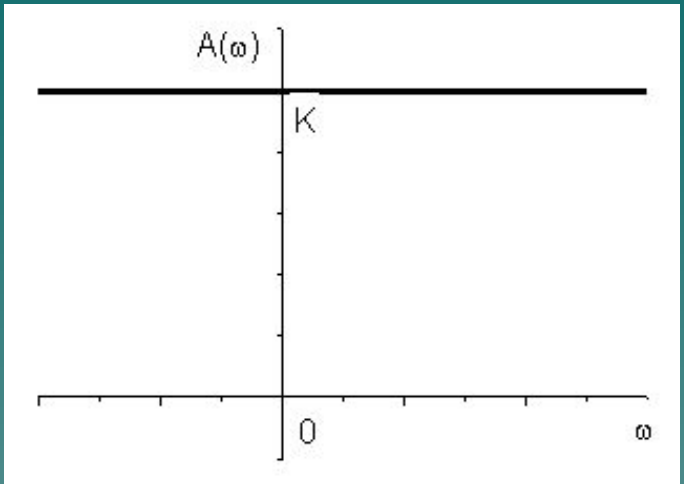
Частотные характеристики

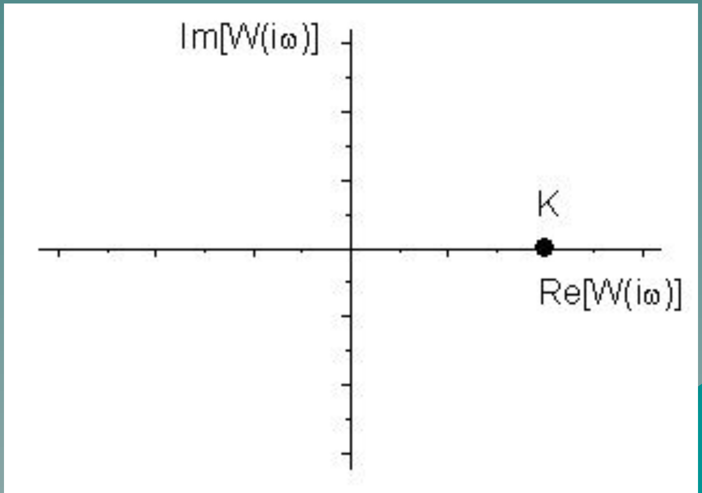
$W(j\omega) = K = K + 0 \cdot j$

$A(\omega) = \sqrt{K^2 + 0^2} = K$

$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(0/K) = 0$

$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg(K)$





Апериодическое звено

Передаточная функция. $W(p) = K/(T \cdot p + 1)$

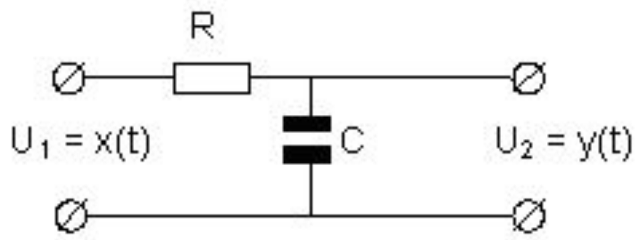
где K – коэффициент усиления; T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней.

Математическое описание звена

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t)$$

Физическая реализация звена.

Примерами апериодического звена могут служить: электрический RC-фильтр; термоэлектрический преобразователь; резервуар с сжатым газом и т. п.



$I = C \cdot dU_2/dt$

$U_1 = U_2 + R \cdot I = U_2 + RC \cdot dU_2/dt$

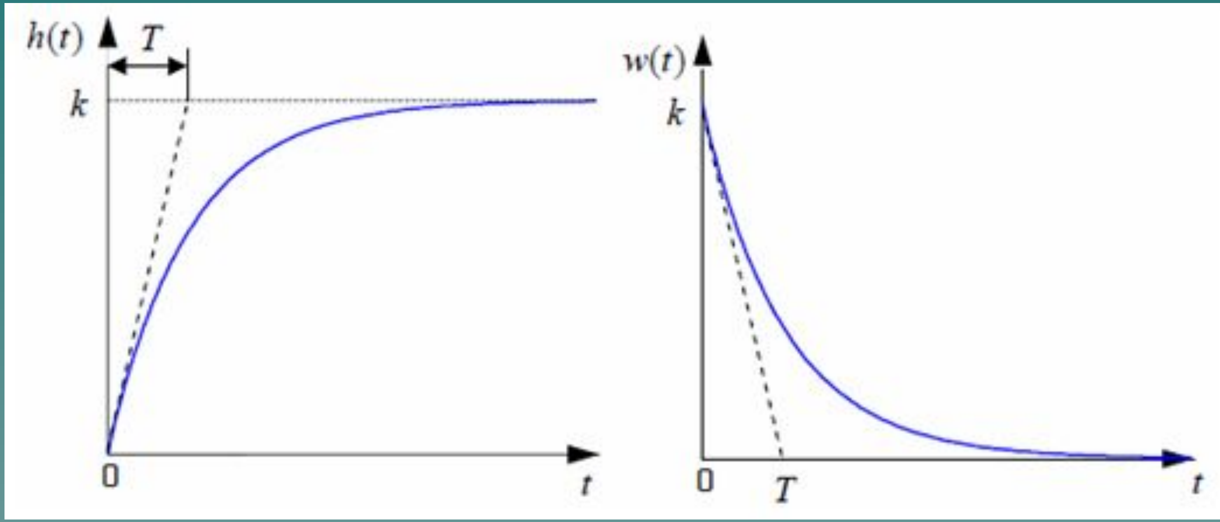
$T \cdot dy(t)/dt + y(t) = x(t)$

$T = C \cdot R$

Апериодическое звено

Переходная функция. $h(t) = L^{-1}[W(p)\cdot 1(t)] = K\cdot(1 - e^{-t/T})$

Весовая функция. $w(t) = L^{-1}[W(p)] = (K/T)\cdot e^{-t/T}$



Предельное значение переходной характеристики равно k , а касательная к ней в точке $t = 0$ пересекается с линией установившегося значения при $t = T$. Переходная и импульсная характеристики выходят на установившееся значение (с ошибкой не более 5%) примерно за время $3T$. Это позволяет определять постоянную времени экспериментально, по переходной характеристике звена.

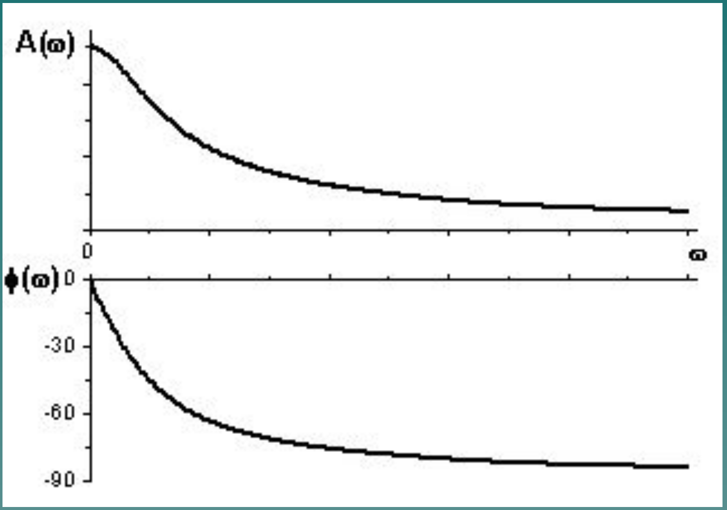
Апериодическое звено

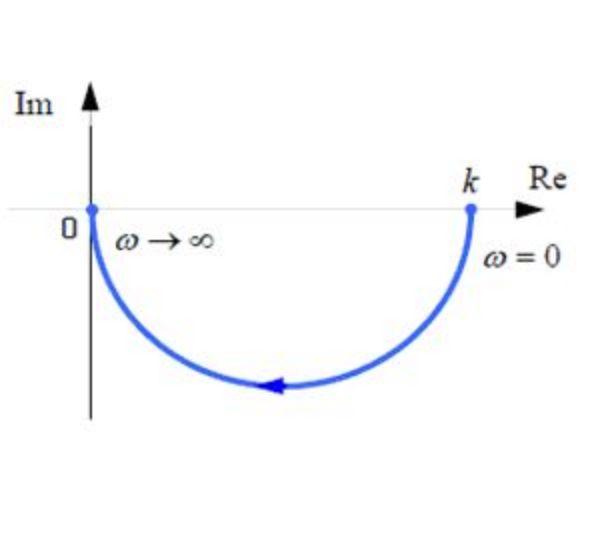
Частотные характеристики

$$W(j\omega)=\frac{k}{Tj\omega+1}=\frac{k(1-Tj\omega)}{T^2\omega^2+1}=\frac{k}{T^2\omega^2+1}-\frac{jkT\omega}{T^2\omega^2+1}.$$

$$A(w)=\frac{K}{\sqrt{T^2\cdot\omega^2+1}}$$

$$\varphi(\omega)=-arctg(T\omega)$$





Колебательное звено

Передаточная функция

$$W(p) = K/[T^2 \cdot p^2 + 2T \cdot \xi \cdot p + 1]$$

где K – коэффициент передачи; T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней. (T > 0); ξ – коэффициент (декремент) затухания, который характеризует рассеяние энергии в звене

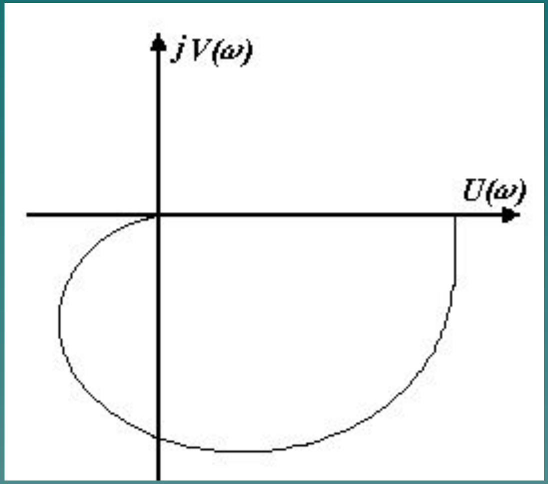
Математическое описание звена

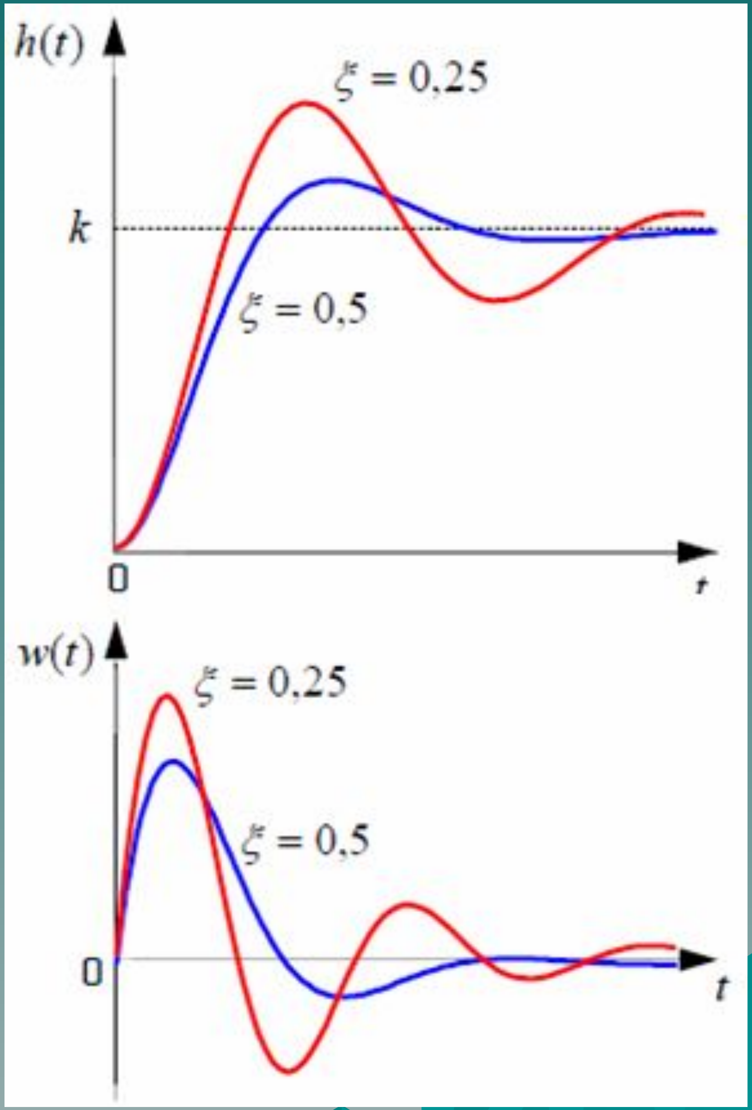
$$T^2 \cdot d^2y(t)/dt^2 + 2T\,\xi \cdot dy(t)/dt + y(t) = K \cdot x(t)$$

Физическая реализация звена

Примером колебательного звена является электрический колебательный контур, груз на пружине, маятник, стрелочный прибор

Колебательное звено





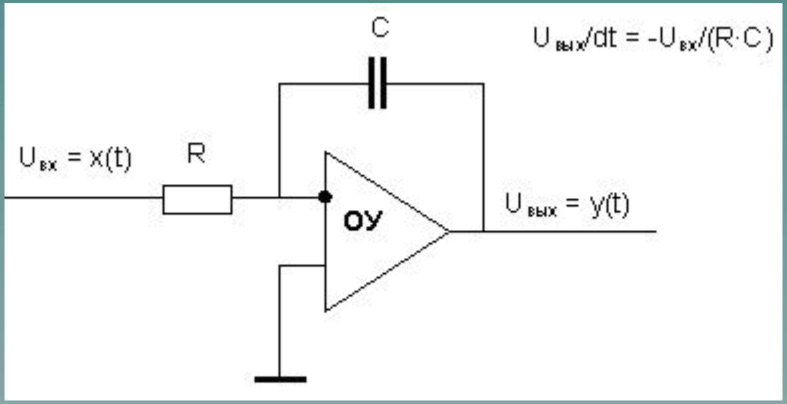
Интегрирующее звено

Передаточная функция $W(p) = K/p$

Математическое описание звена $$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot x(t),$$

Физическая реализация звена

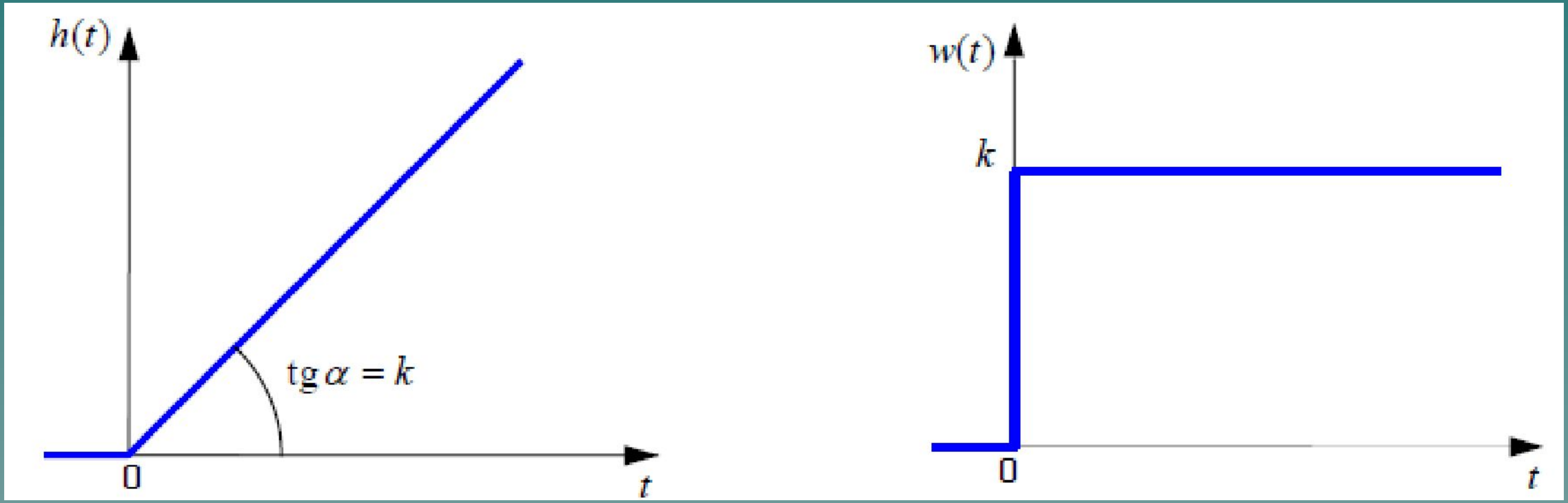
Примерами интегрирующего звена являются: резервуар, наполняемый жидкостью; электродвигатель постоянного тока; операционный усилитель в режиме интегрирования.



Интегрирующее звено

Переходная функция $h(t) = K \cdot t$

Весовая функция $w(t) = K \cdot 1(t)$

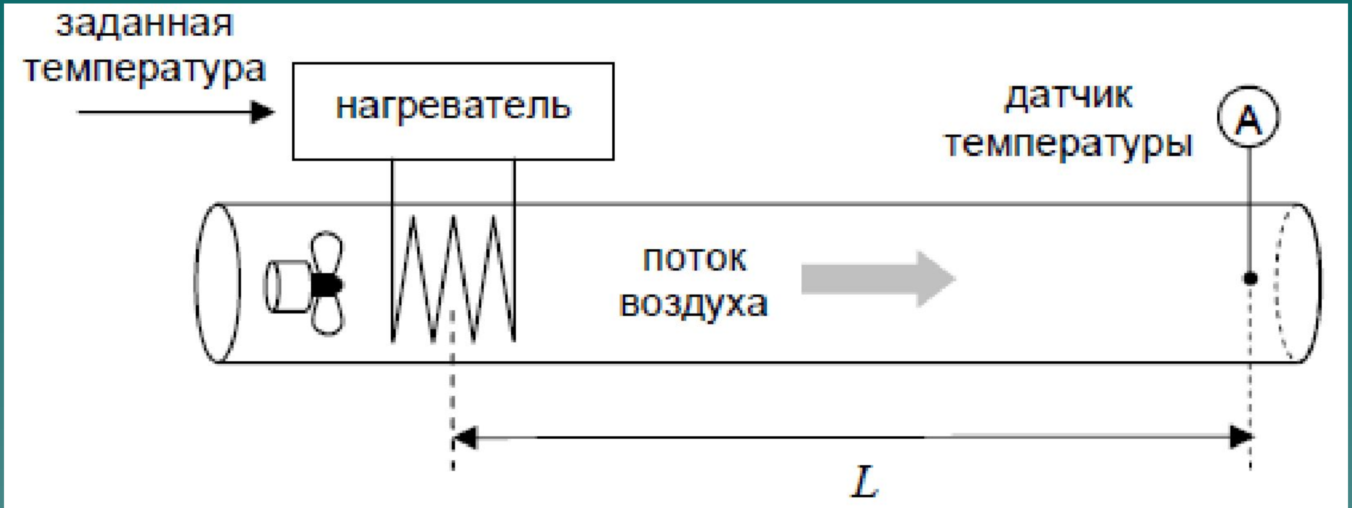


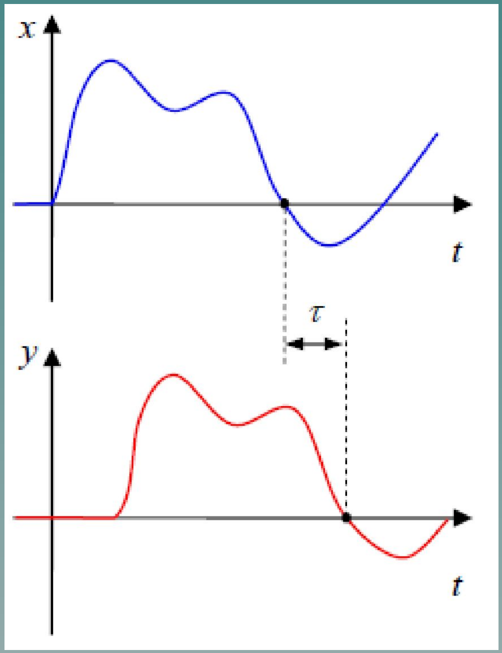
Дифференцирующее звено

$$W(s) = T \cdot p$$

$$h(t) = k\delta(t), \quad w(t) = k\frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Запаздывание





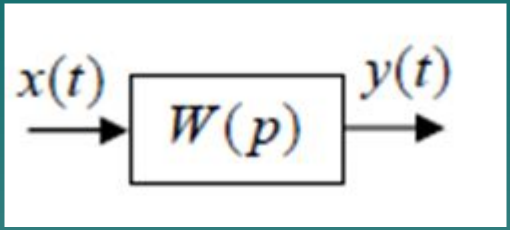
Звено с чистым запаздыванием – это такое звено, у которого выходной сигнал полностью повторяет входной сигнал с некоторой задержкой во времени.

$$W_\tau(s) = e^{-s\tau}$$

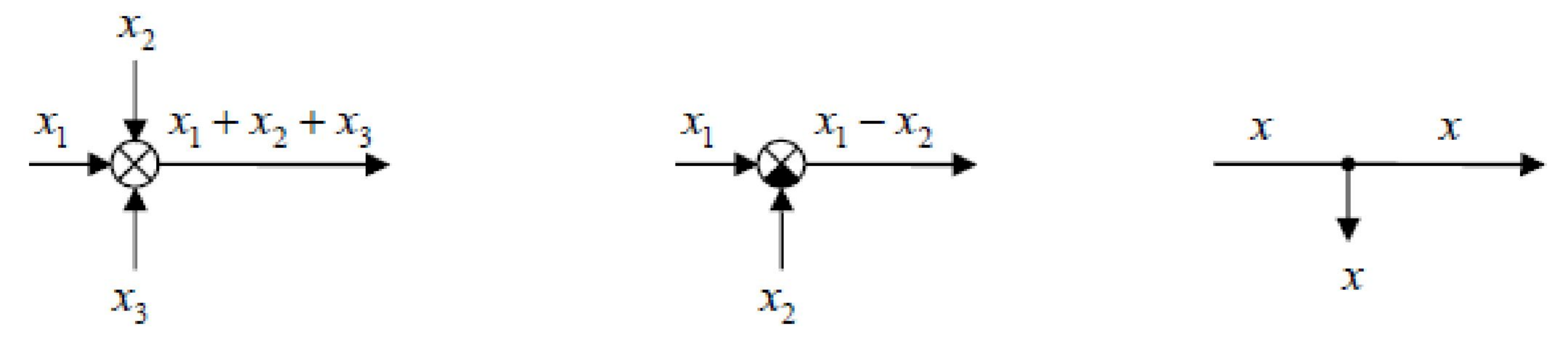
где τ – время чистого запаздывания

$$A(j\omega) = \left| W_\tau(j\omega) \right| = 1, \quad \phi(j\omega) = \arg W_\tau(j\omega) = -\omega\tau .$$

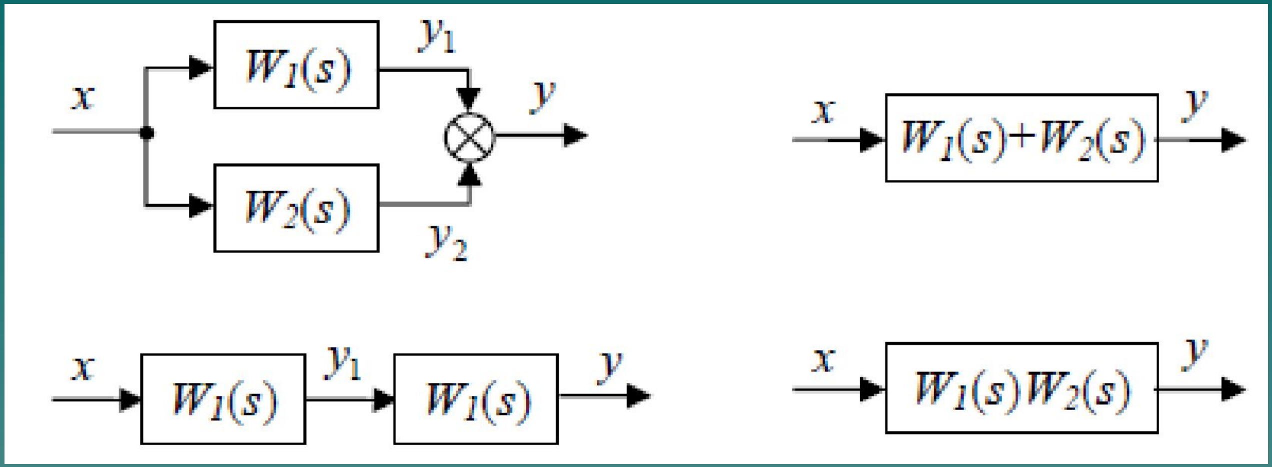
Условные обозначения

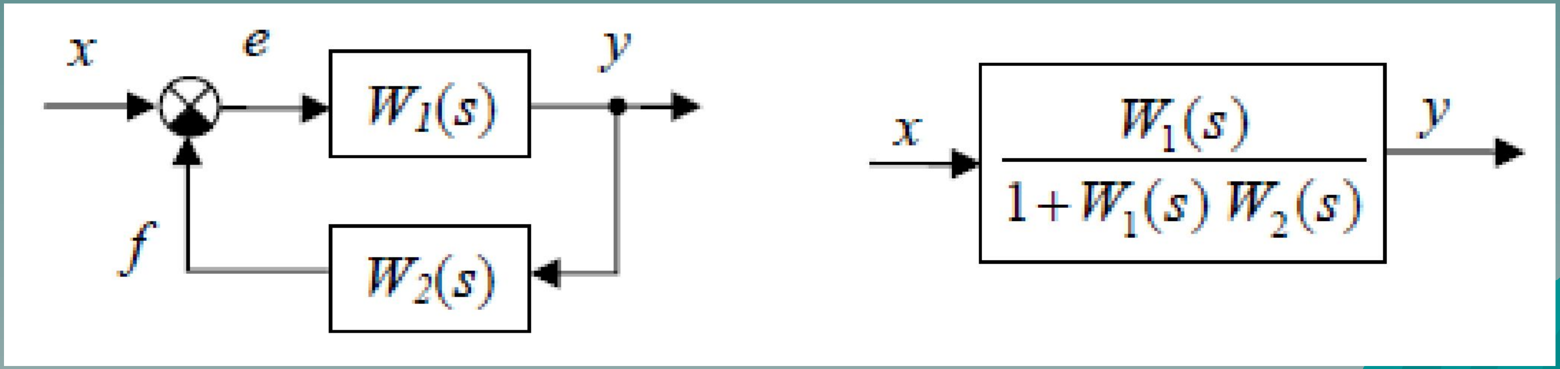


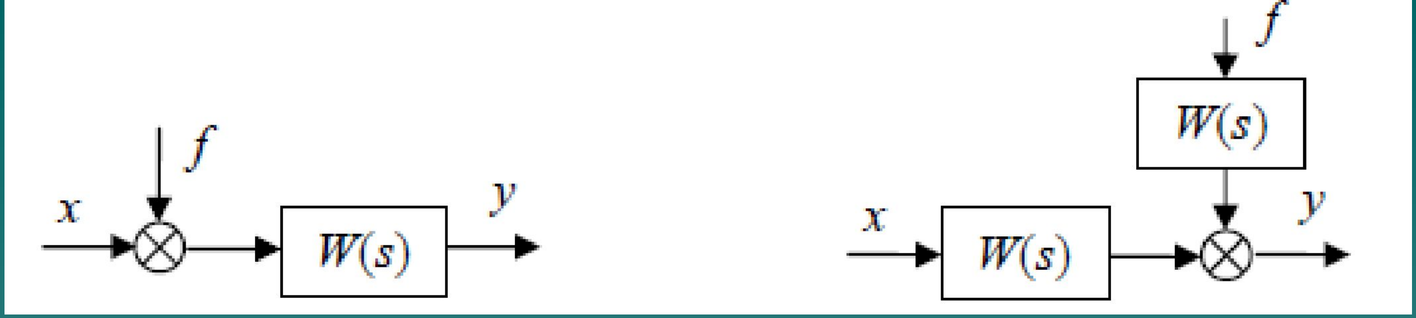
Суммирование

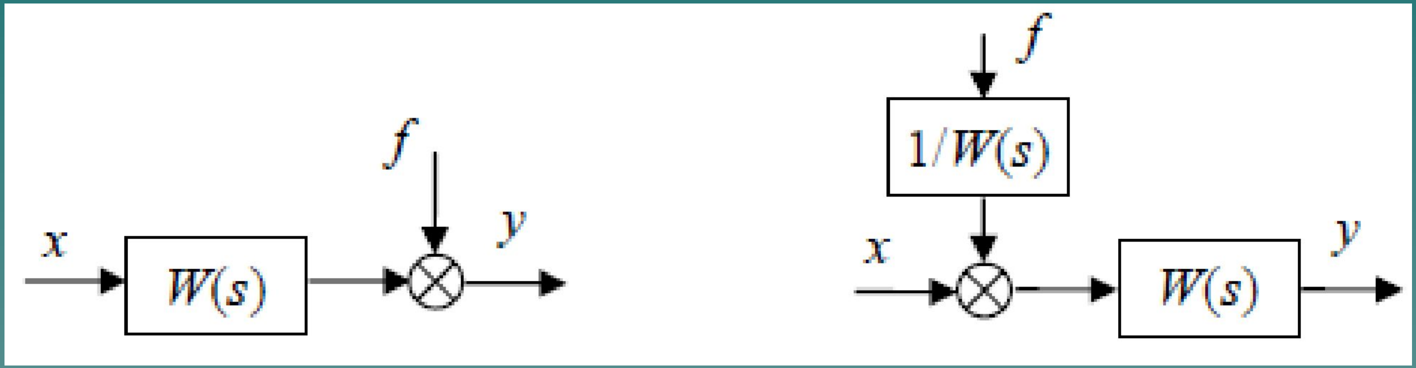


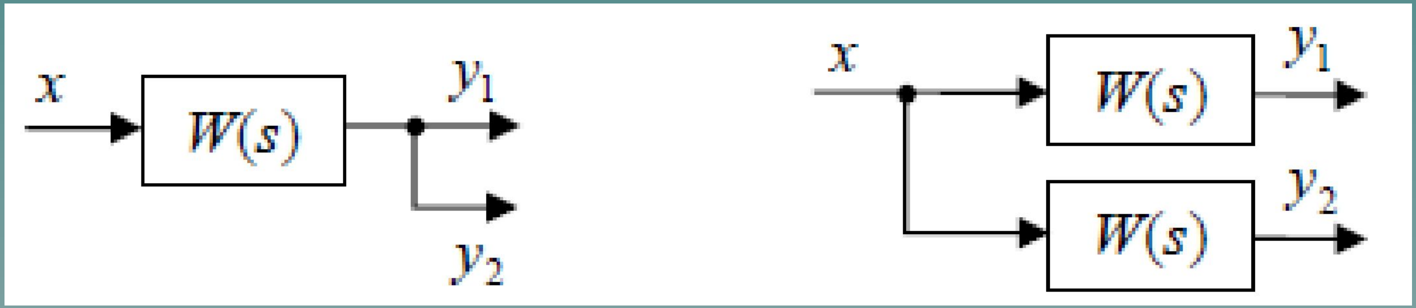
Правила преобразования

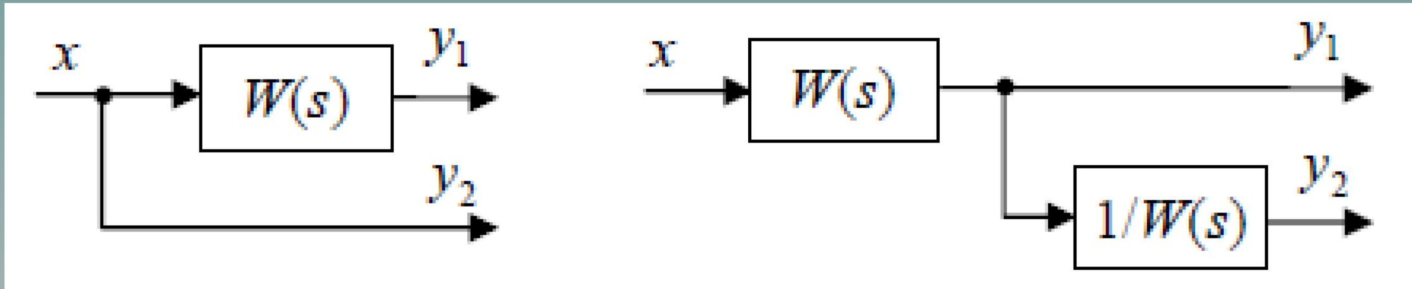




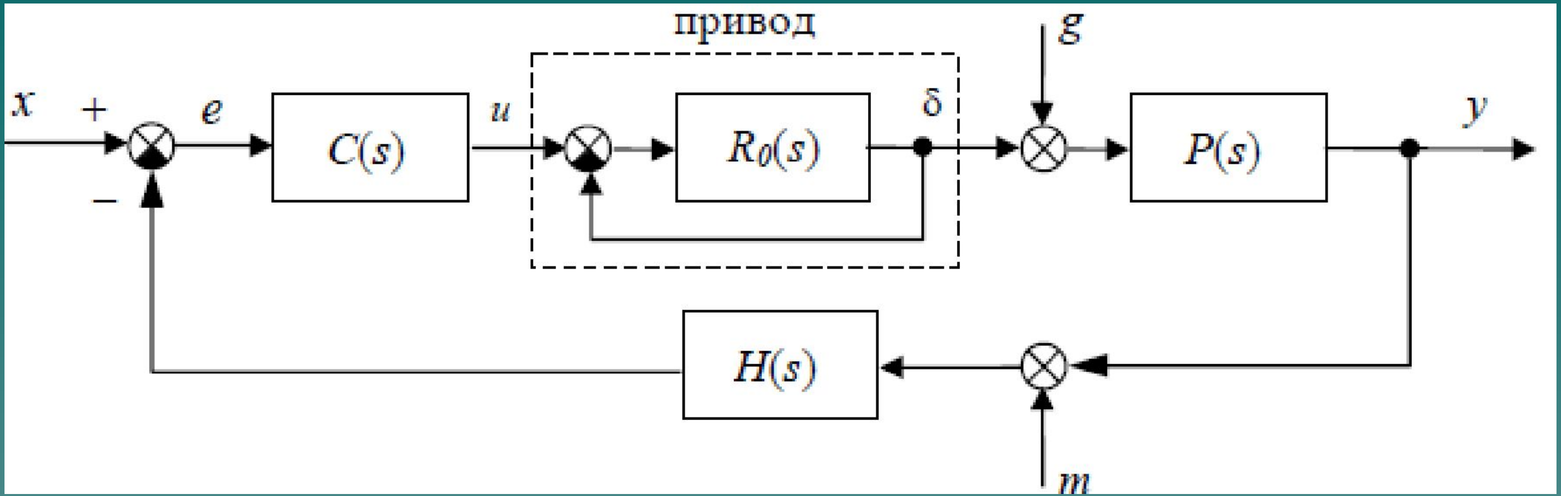

f
x
W(s)
y
f
W(s)
x
W(s)
y


f
x
W(s)
y
f
1/W(s)
x
W(s)
y

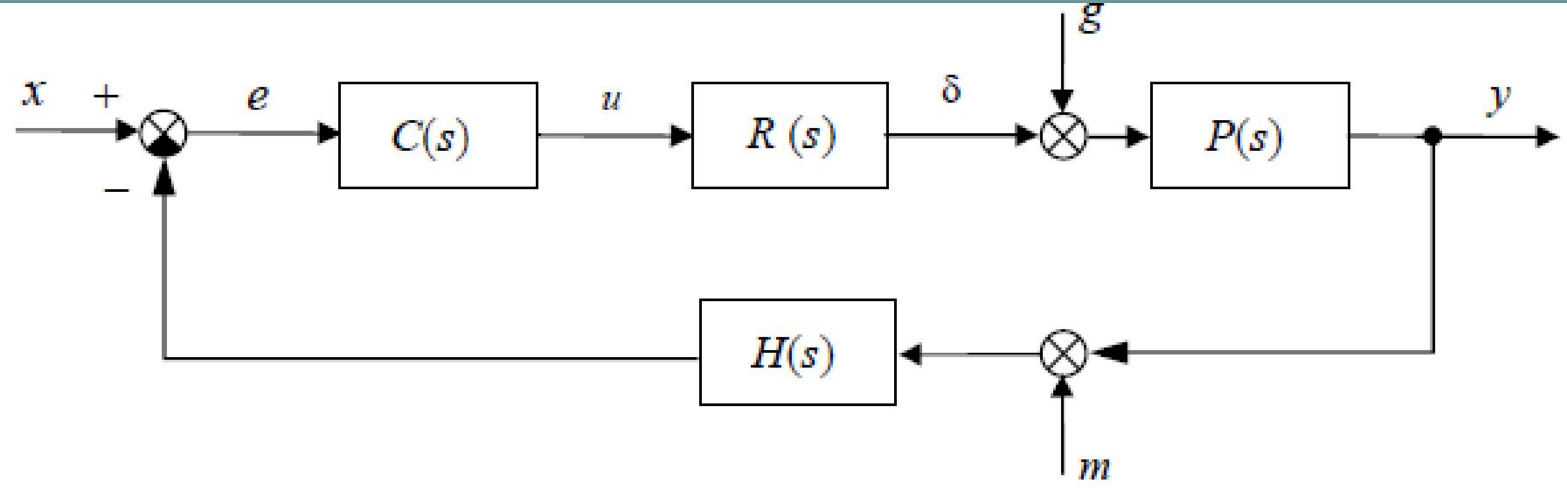

x
W(s)
y1
y2
x
W(s)
y1
W(s)
y2

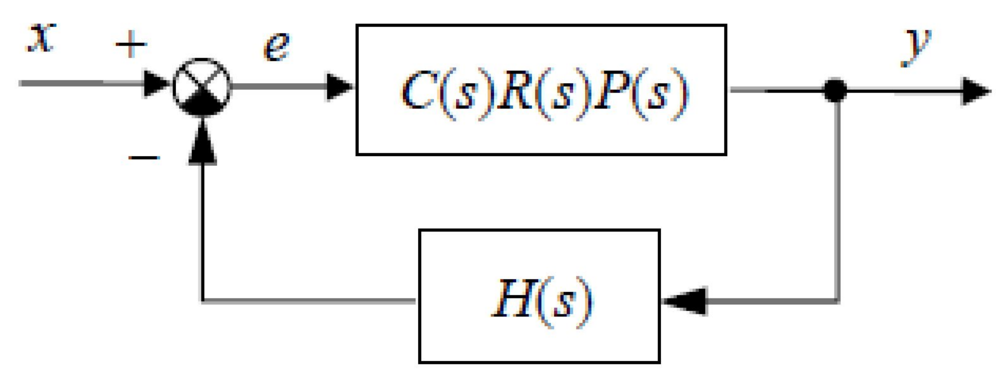

x
W(s)
y1
y2
x
W(s)
y1
1/W(s)
y2

Типовая одноконтурная система

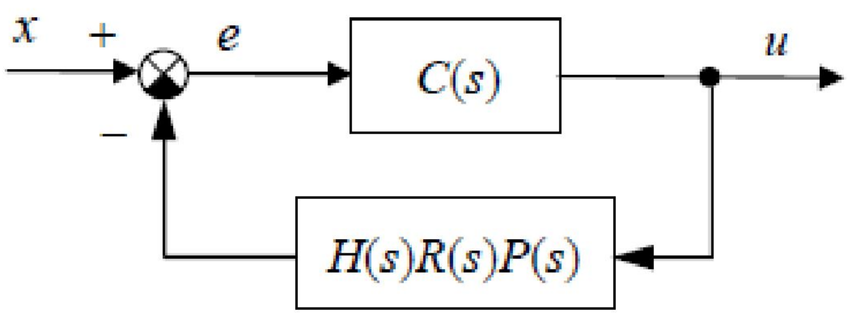


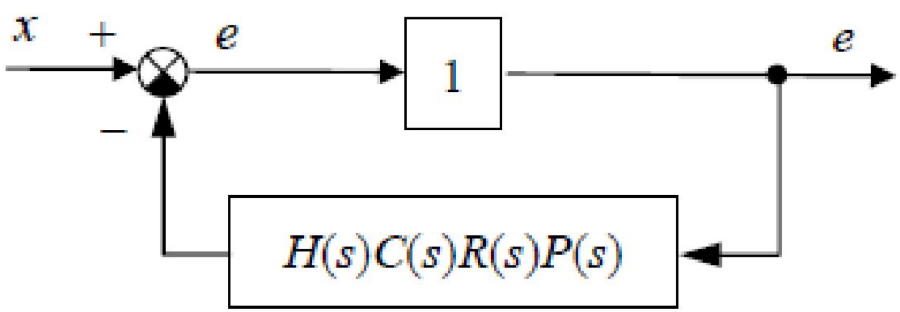
$$R(s) = \frac{R_0(s)}{1 + R_0(s)}.$$





$$W(s) = \frac{C(s)R(s)P(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}.$$





$$W_u(s) = \frac{C(s)}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}, \qquad W_e(s) = \frac{1}{1 + H(s)C(s)R(s)P(s)}.$$