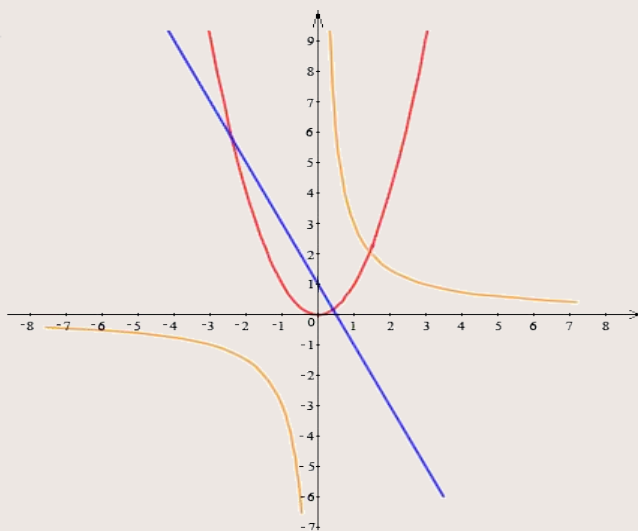


ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ к исследованию функции и построению графика функции

11 класс



Содержание

- Определение промежутков возрастания и убывания функции
(исследование функции на **МОНОТОННОСТЬ**)
- Нахождение точек экстремума функции
- Построение графиков функций
- Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции
- Работа с графиками функций
- Проверь себя

Исследование функции

на монотонность

(т.е. определение

промежутков возрастания

и убывания функции).

**Исследовать функцию на
МОНОТОННОСТЬ – ЭТО ЗНАЧИТ
ВЫЯСНИТЬ, НА КАКИХ
ПРОМЕЖУТКАХ ИЗ ОБЛАСТИ
ОПРЕДЕЛЕНИЯ
функция возрастает,
а на каких – убывает.**

Вспомним

○: Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке I ,
если для любых $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

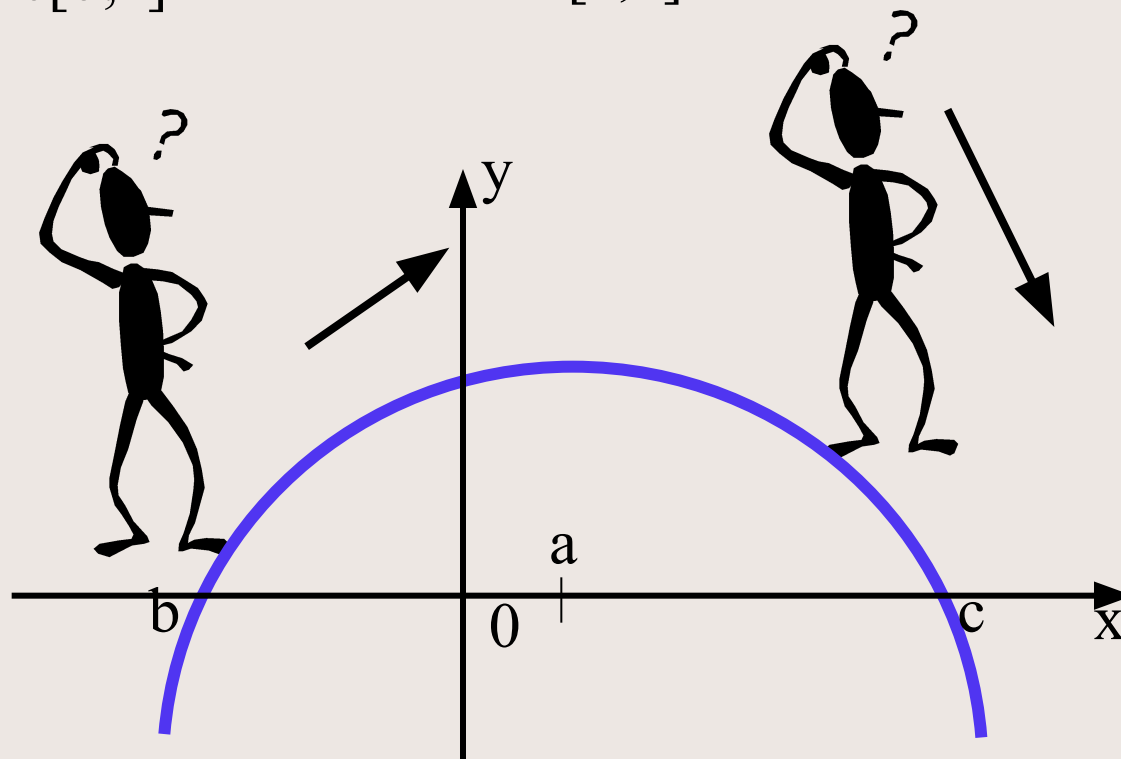
○: Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке I ,
если для любых $x_1, x_2 \in I: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

○: Функция $f(x)$ называется монотонной на промежутке I ,
если она либо возрастает, либо убывает на этом промежутке.

Возрастание и убывание функции можно изобразить так

Иду в гору. Функция
возрастает на
промежутке $[b;a]$

Иду под гору. Функция
убывает на промежутке
 $[a;c]$



**Для определения промежутков
возрастания и убывания
функции можно использовать и
производную .**



Теорема:

Если $f(x)$ – непрерывна на промежутке и имеет $f'(x)$, то

а) если $f'(x) > 0$, то $f(x)$ – **возрастает**

б) если $f'(x) < 0$, то $f(x)$ – **убывает**

в) если $f'(x) = 0$, то $f(x)$ – **постоянна**

(константа)

Алгоритм исследования функции на монотонность

- Найти производную функции $f'(x)$
- 1) Найти стационарные ($f'(x) = 0$) и критические ($f'(x)$ не существует) точки функции $y = f(x)$
- 2) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
- 3) Определить знаки производной на получившихся промежутках
- 4) По знаку производной определить промежутки монотонности функции
(если $f'(x) > 0$ – функция возрастает; если $f'(x) < 0$ функция убывает; если $f'(x) = 0$ – функция постоянна)

Определения

- Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными**.
- Внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует, называются **критическими**

Например: найти промежутки

монотонности функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

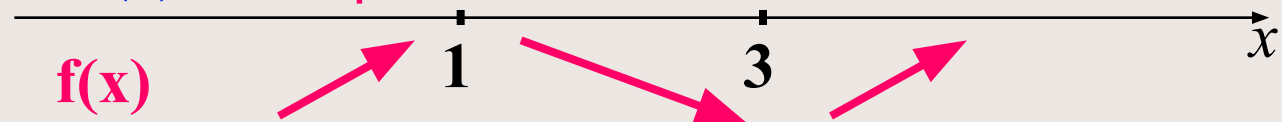
2) Найдем стационарные точки:

$$f'(x) = 0, \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$f'(x) \quad x = 1 \text{ и } x = 3$$

3)



4)

5) $f'(x) > 0$, при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$

$f'(x) < 0$, при $x \in (1; 3)$

Ответ: при $x \in (-\infty; 1)$ и $(3; +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (1; 3)$ - убывает

Найти промежутки монотонности функции

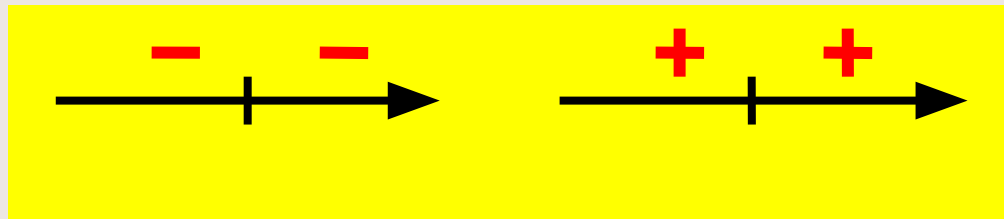
1. $y = 2x^3 + 3x^2 - 100$

2. $y = x^3 + 2x^2 + 6$

3. $y = 5x^2 + 15x - 1$

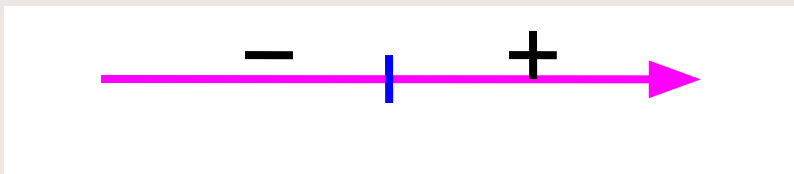
4. $y = 60 + 45x - 3x^2 - x^3$

5. $y = -3x + 6x^2 - 100$

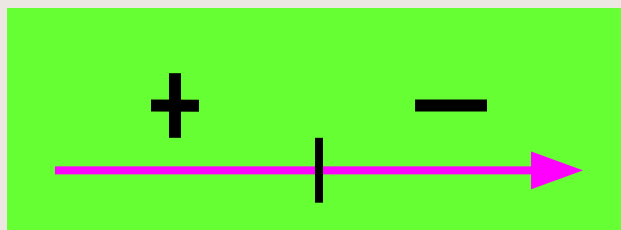


Нахождение

точек экстремума



функции



Определения

- Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0)$$

- Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0)$$

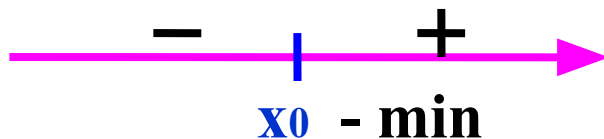
Определения

- Значение функции в точке максимума обозначают U_{\max} (но на определенном участке вокруг точки максимума, а не на всей области определения функции – это $U_{\text{наиб.}}$)
- Значение функции в точке минимума обозначают U_{\min} (но это не $U_{\text{наим.}}$ функции на всей области определения)
- Точки минимума и максимума называются точками экстремума

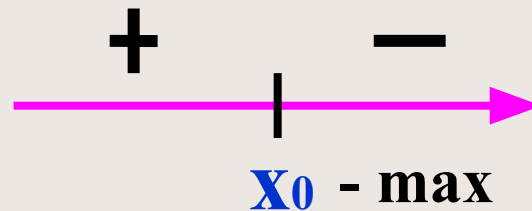
Теорема

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

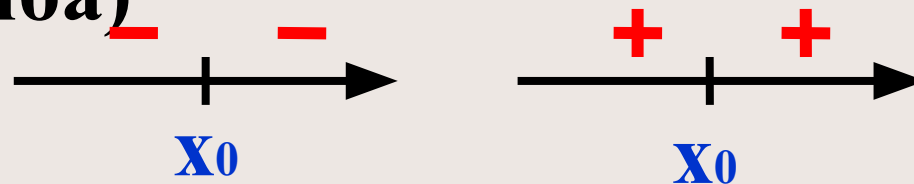
- а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ - неравенство $f'(x) > 0$, то x_0 – точка минимума функции $y = f(x)$



б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ - неравенство $f'(x) < 0$, то x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$



в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет (происходит изменение кривизны графика функции – это точка перегиба)



экстремума нет

Алгоритм нахождения точек экстремума функции

- 1) Найти производную функции $f'(x)$
- 2) Найти стационарные и критические точки функции $y = f(x)$
- 3) Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой
- 4) Определить знаки производной на получившихся промежутках
- 5) Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «+» на «-», то эта точка – **точка максимума**.
Если $f'(x_0)$ при переходе через точку меняет знак с «-» на «+», то эта точка – **точка минимума**.
Если $f'(x_0)$ не меняет знак, то в этой точке экстремума нет (это точка перегиба).

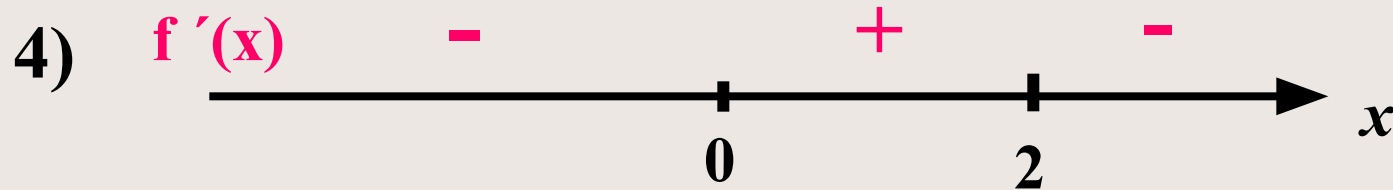
Например: найти точки экстремума функции

$$y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$$

Решение. 1) $y' = 12x^3 - 48x^2 + 48x =$
 $= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2$

2) $y' = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$ (стационарные точки)

3)



5) Значит: $x = 0$ – точка минимума,
 $x = 2$ - точка максимума.

Найдите точки экстремума функции и определите их характер

1) $y = 7 + 12x - x^2$

2) $y = 3x^3 + 2x^2 - 7$

3) $y = -2x^3 + 21x^2 + 19$

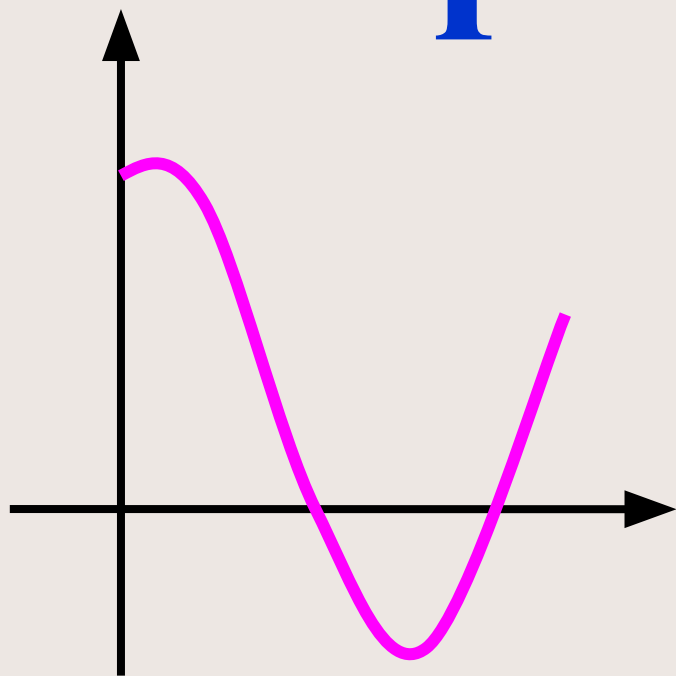
4) $y = 3x^2 - x^3$

5) $y = x + 4/x$

Построение

графиков

функций



В тех случаях, когда речь идет о построении графика незнакомой функции или когда заранее трудно представить вид графика, используют следующий алгоритм:

План построения графика функции с помощью производной

- 1) Найти область определения функции и определить точки разрыва если они существуют**
- 2) Выяснить является ли функция чётно или нечётной, проверить её на периодичность**
- 3) Найти точки пересечения графика с осями координат, если это возможно**
- 4) Найти стационарные и критические точки**
- 5) Найти точки экстремума функции и промежутки монотонности**
- 6) Определить промежутки вогнутости, выпуклости и точки перегиба графика функции**
- 7) Найти координаты ещё нескольких точек (для большей точности)**

Как найти промежутки выпуклости, вогнутости и точку перегиба графика функции

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

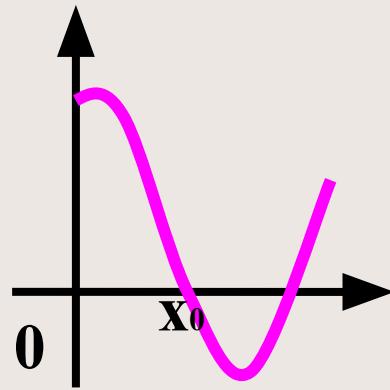
Теорема. (признак вогнутости и выпуклости)

Если **вторая производная** функции $y=f(x)$ в данном промежутке **положительна**, то **кривая вогнута** в этом промежутке, а если **отрицательна** – **выпукла** в этом промежутке.

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующий алгоритм:

- 1) Находят $f'(x)$, а затем $f''(x)$
- 2) Находят точки, в которых $f''(x) = 0$
- 3) Отмечают полученные точки на числовой прямой и получают несколько промежутков области определения функции
- 4) Устанавливают знаки второй производной в каждом из полученных промежутков. Если $f''(x) < 0$, то на этом промежутке кривая выпукла; если $f''(x) > 0$ - вогнута

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой её части.



Точкой перегиба кривой графика функции будут те точки, в которых $f''(x) = 0$ и при переходе через неё вторая производная меняет знак.

Найти интервалы выпуклости и точку перегиба функции

Решение. $y = x^4 - 6x^2 + 4$

Найдем $y'(x)$ и $y''(x)$:

$$y'(x) = 4x^3 - 12x \Rightarrow y''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1)$$

Найдём стационарные точки второго порядка,

$$\text{т.е. } y''(x) = 0 \Rightarrow 12(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$



Значит: при $x \in (-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ функция вогнута, а при $x \in (-1; 1)$ – выпукла; точки перегиба $x = \pm 1$

Например: исследовать функцию
 $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ и построить её график

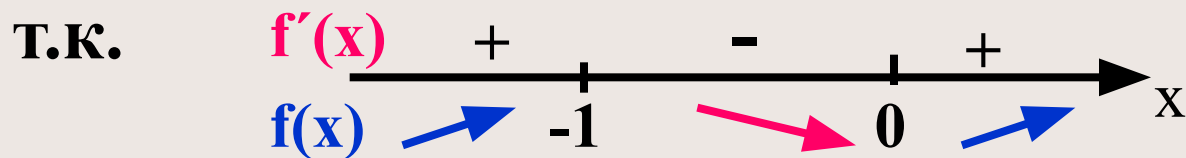
Решение. $D(y) = (-\infty; +\infty)$, четность не определена

Найдем стационарные точки:

т.к. $y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \Rightarrow 6x(x+1) = 0$

тогда $x=0$ и $x=-1$ стационарные точки

Найдем точки экстремума:



и $x=-1$ – точка максимума

$x=0$ – точка минимума

Найдем промежутки монотонности:

при $x \in (-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$ - функция
возрастает

при $x \in [-1; 0]$ - функция убывает

**Найдем точки пересечения графика с
осями координат:**

если $x=0$, то $y=-1 \Rightarrow (0; -1)$

если $y=0$, то $x=-1 \Rightarrow (-1; 0)$

Найдем ещё некоторые точки

(контрольные, дополнительные):

- т.к. $x=-1$ – точка максимума, то $u_{\max}=0 \Rightarrow (-1; 0)$ -точка локального максимума
- т.к. $x=0$ – точка минимума, $u_{\min}=-1 \Rightarrow (0;-1)$ -точка локального минимума
- если $x=1$, то $y=4 \Rightarrow (1;4)$
- если $x=-2$, то $y=-5 \Rightarrow (-2;-5)$

Удобнее все эти данные заполнять в виде таблицы.

Составим таблицу:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\uparrow	0 $(-1; 0)$ \max	\downarrow	-1 $(0; -1)$ \min	\uparrow

Найдем $f''(x)$.

$$f''(x) = (6x(x+1))' = 12x + 6 = 6(2x+1)$$

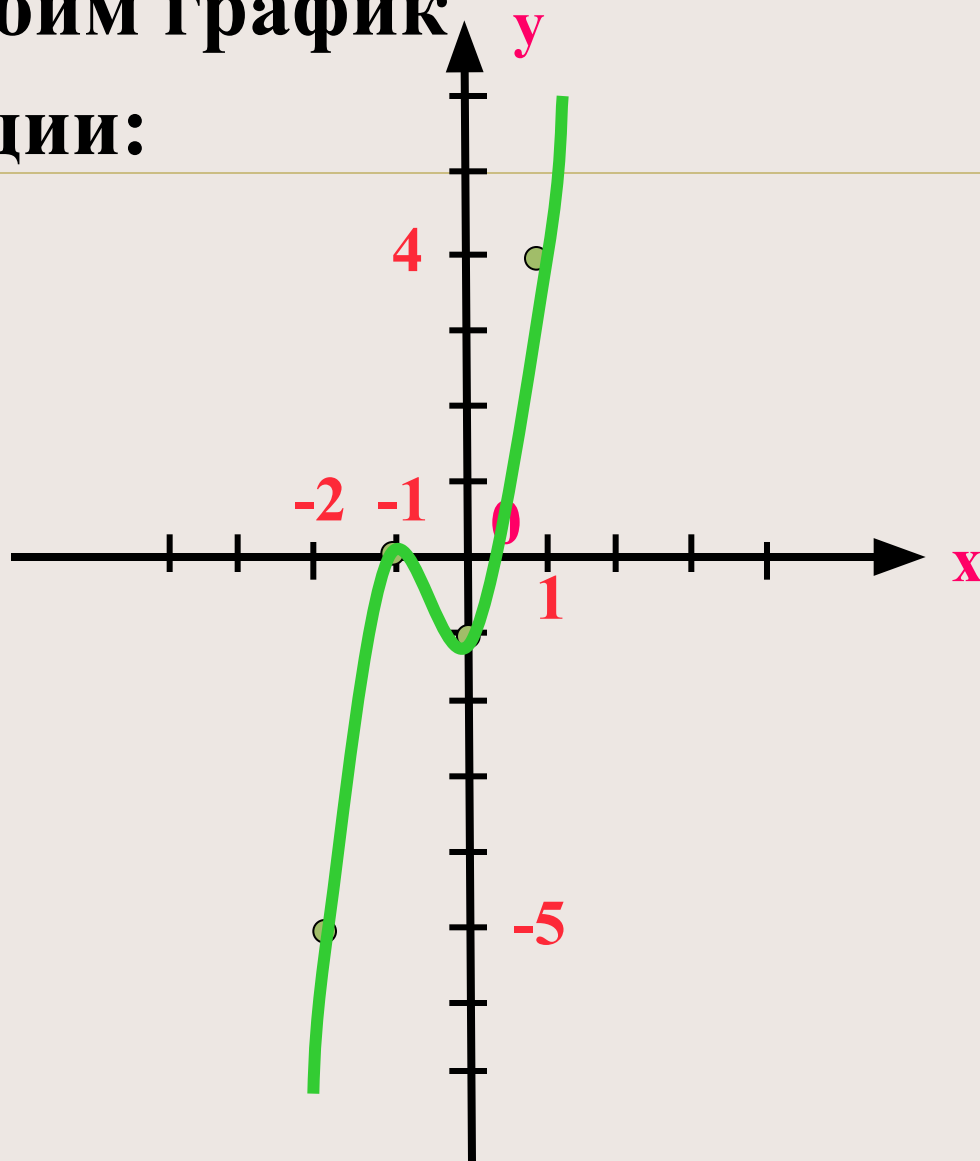
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -0,5 - \text{точка перегиба}$$

т.к. при $x = -1$ (левее $x = -0,5$) $f''(x) < 0$,

а при $x = -0,1$ (правее $x = -0,5$) $f''(x) > 0$

Найдем её координаты: $(-0,5; ?)$, если это не трудно

Построим график
функции:



Исследовать функцию и построить её график

1) $y = 3x^2 - x^3$

2) $y = -9x + x^3$

3) $y = x^3 - 3x^2 + 2$

4) $y = -x^3 + 6x^2 - 5$

5) $y = 3x^3 + x^2 - 8x - 7$

6) $y = (x)/(1+x^2)$

Нахождение

наибольшего

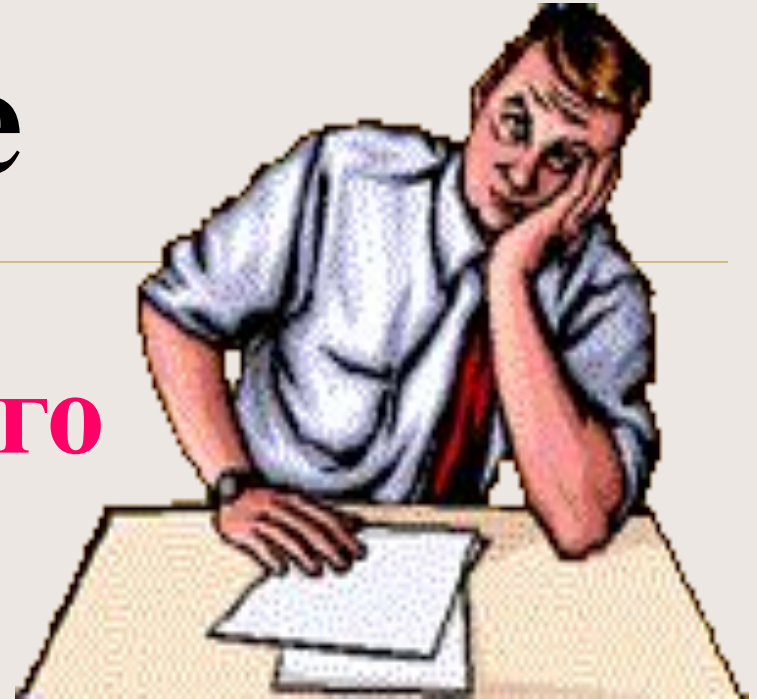
и наименьшего

значений

непрерывной

функции

на промежутке



Теорема

Дифференцируемая на $(a;b)$ и непрерывная на $[a;b]$ функция $y=f(x)$ достигает своего **наибольшего (наименьшего)** значения **на границе отрезка $[a;b]$ или в одной из точек экстремума на интервале $(a;b)$.**

*Если функция удовлетворяет условиям теоремы и имеет **единственную точку экстремума** – точку максимума (минимума), то в ней достигается **наибольшее (наименьшее) значение***

Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$

- 1) Найти производную $f'(x)$
- 2) Найти стационарные и критические точки функции и **проверить принадлежат ли они отрезку $[a;b]$**
- 3) Вычислить значение функции $y=f(x)$
 - на концах отрезка, т.е в точках $x=a$ и $x=b$
 - в стационарных и критических точках, принадлежащих $[a;b]$
- 4) Выбрать среди найденных значений наименьшее (это и будет **$U_{\text{наим.}}$**) и наибольшее (это и будет **$U_{\text{наиб.}}$**)

Например: найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$ на отрезках а) $[-4;6]$

б) $[-2;2]$

Решение. а) 1) $y' = 3x^2 - 6x - 45$

$$2) y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -3 \in [-4;6] \text{ и } x_2 = 5 \in [-4;6]$$

3) Найдём $y(-4)$; $y(6)$; $y(-3)$; $y(5)$:

Получим: $y(-4) = 69$; $y(6) = -161$; $y(-3) = 82$;
 $y(5) = -174$.

Значит: $U_{\text{наим}} = -174$; $U_{\text{наиб}} = 82$.

Решение. **б)** на $[-2;2]$

$$1) y' = 3x^2 - 6x - 45$$

$$2) y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 45 = 0 | :3$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x_1 = -3 \notin [-2;2]$$

$$x_2 = 5 \notin [-2;2]$$

3) Найдём $y(-2)$; $y(2)$:

$$\text{Получили } y(-2) = 71; y(2) = -93$$

Значит: **Унаим = -93; Унаиб = 71.**

**Самостоятельно найдите
наименьшее и наибольшее
значения функции**

$$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 1$$

на отрезке $[0;6]$

Ответ: Унаим. = -174 (достигается в
точке $x=5$)

Унаиб. = 1 (достигается в точке $x=0$)

Найдите наименьшее и наибольшее значения функции на заданном промежутке.

1) $y = x^2 - 8x + 19$ на $[-1; 5]$

2) $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$ на $[-2; 3]$

3) $y = x + 4/(x+1)$ на $[-2; 0]$

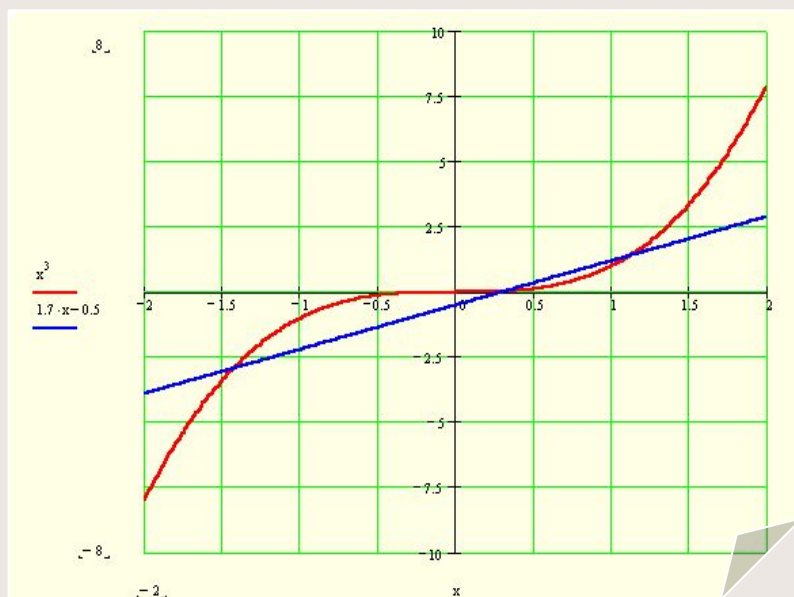
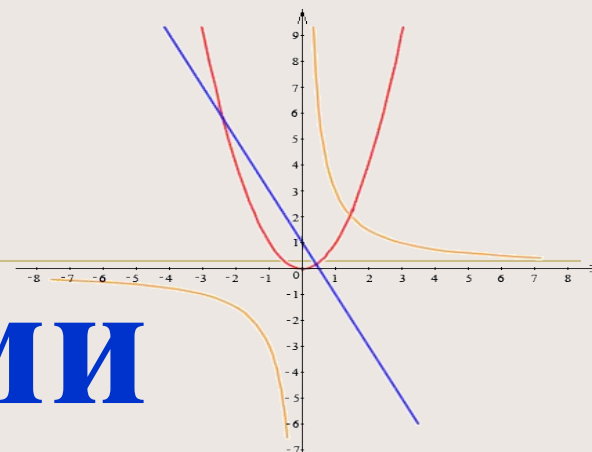
4) $y = x^3 - 2x^2 + 1$ на $[0,5; +\infty)$

5) $y = 0,2x \square - x^2$ на $(-\infty; 1]$

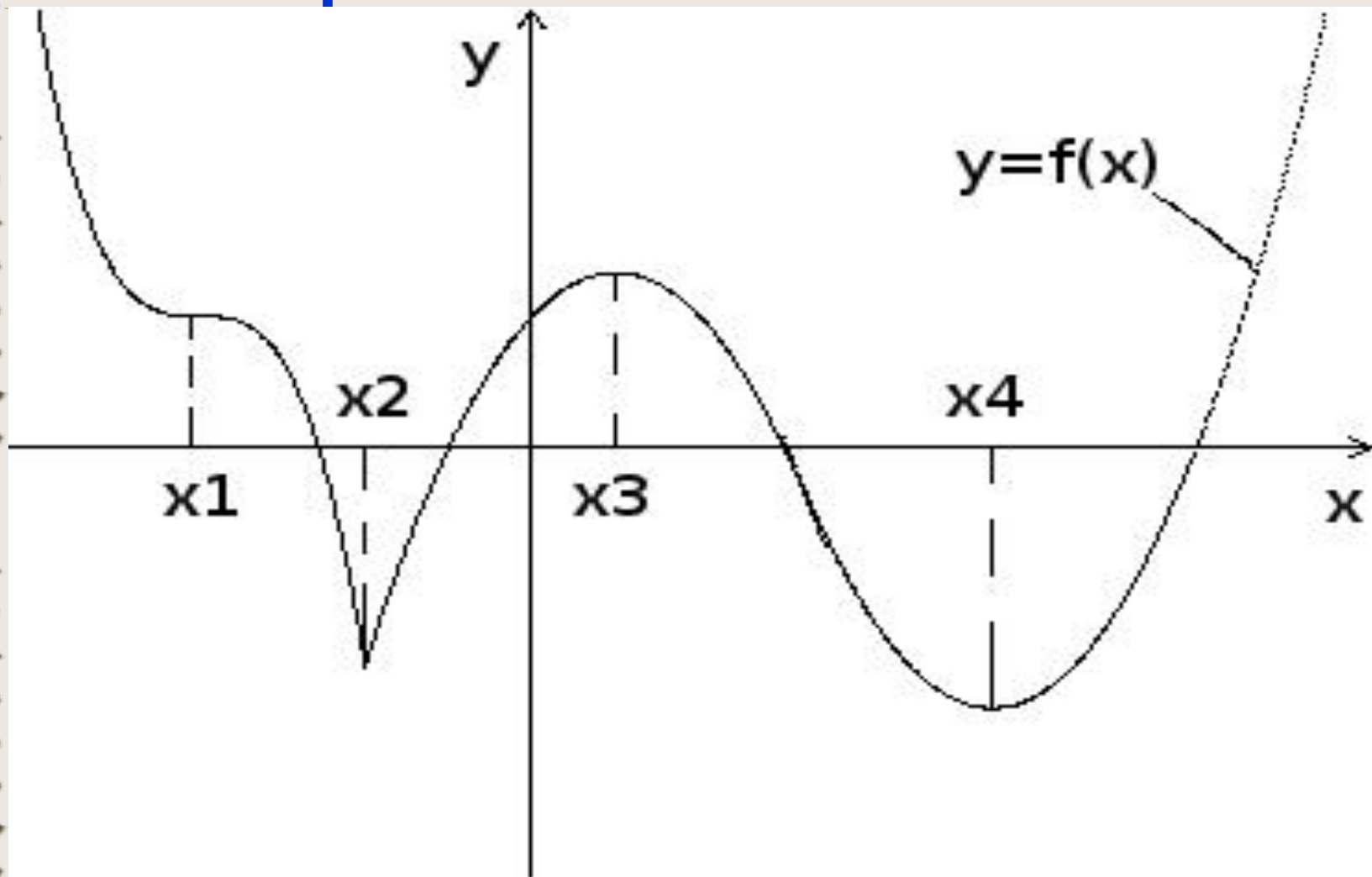
Работа

с графиками

функций



№ 1. По графику функции ответьте на вопросы



- 1) Отметьте стационарные точки.**
- 2) Что можно сказать о производной в точке x_1 ?**
- 3) Назовите точки экстремума.**
- 4) Что можно сказать о производной на $(-\infty; x_2)$?**
- 5) Укажите промежутки возрастания функции.**
- 6) Отметьте критические точки**

Проверим ответы

1. (x_1, x_3, x_4) .

2. не существует.

3. (x_2, x_3, x_4) .

4. $f'(x) \leq 0$.

5. $[x_2; x_3] \cup [x_4; +\infty)$ функция возрастает.

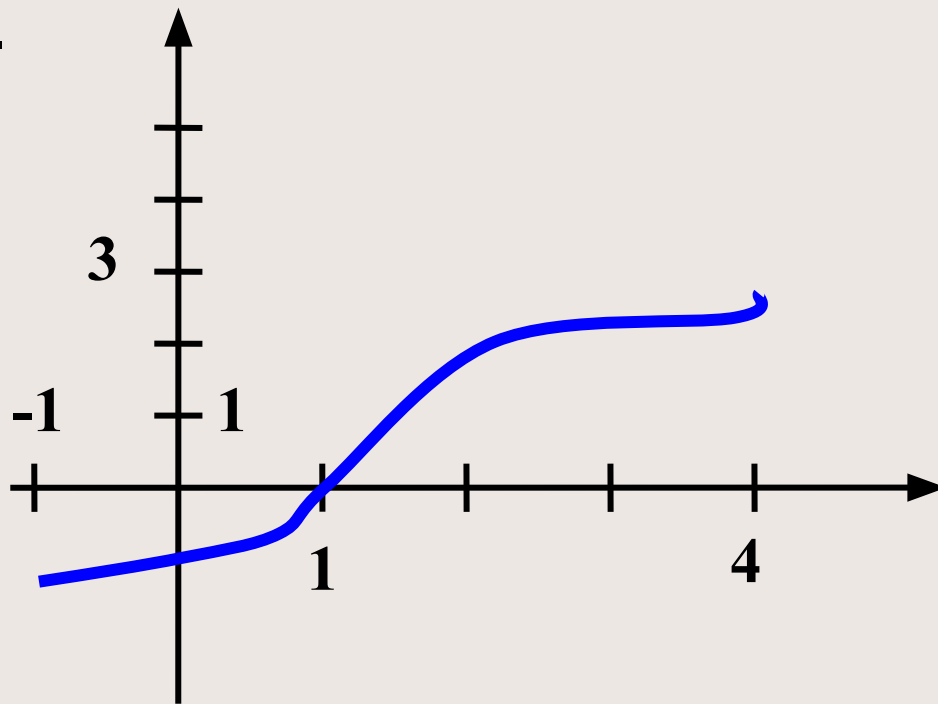
6. x_2

№ 2. Постройте график непрерывной функции $y = f(x)$, определенной на $[a; b]$, удовлетворяющей следующим условиям:

- а)** $a = -1$, $b = 4$, $f'(x) > 0$ при $-1 < x < 4$, $f(1) = 0$, $f(4) = 3$
б) $a = 0$, $b = 5$, $f'(x) < 0$ при $0 < x < 5$, $f(2) = 0$, $f(3) = -2$

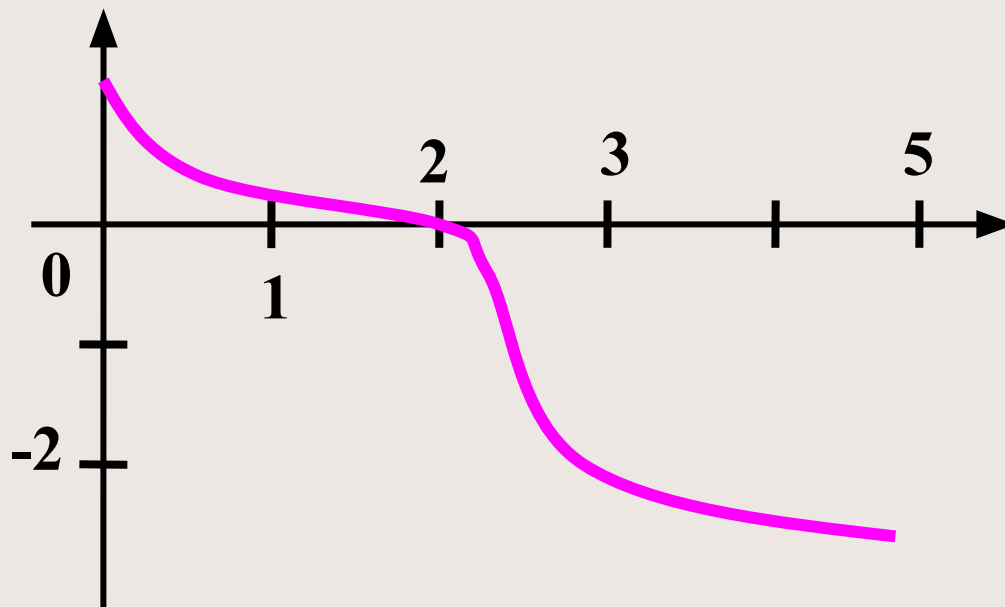
График.

а)

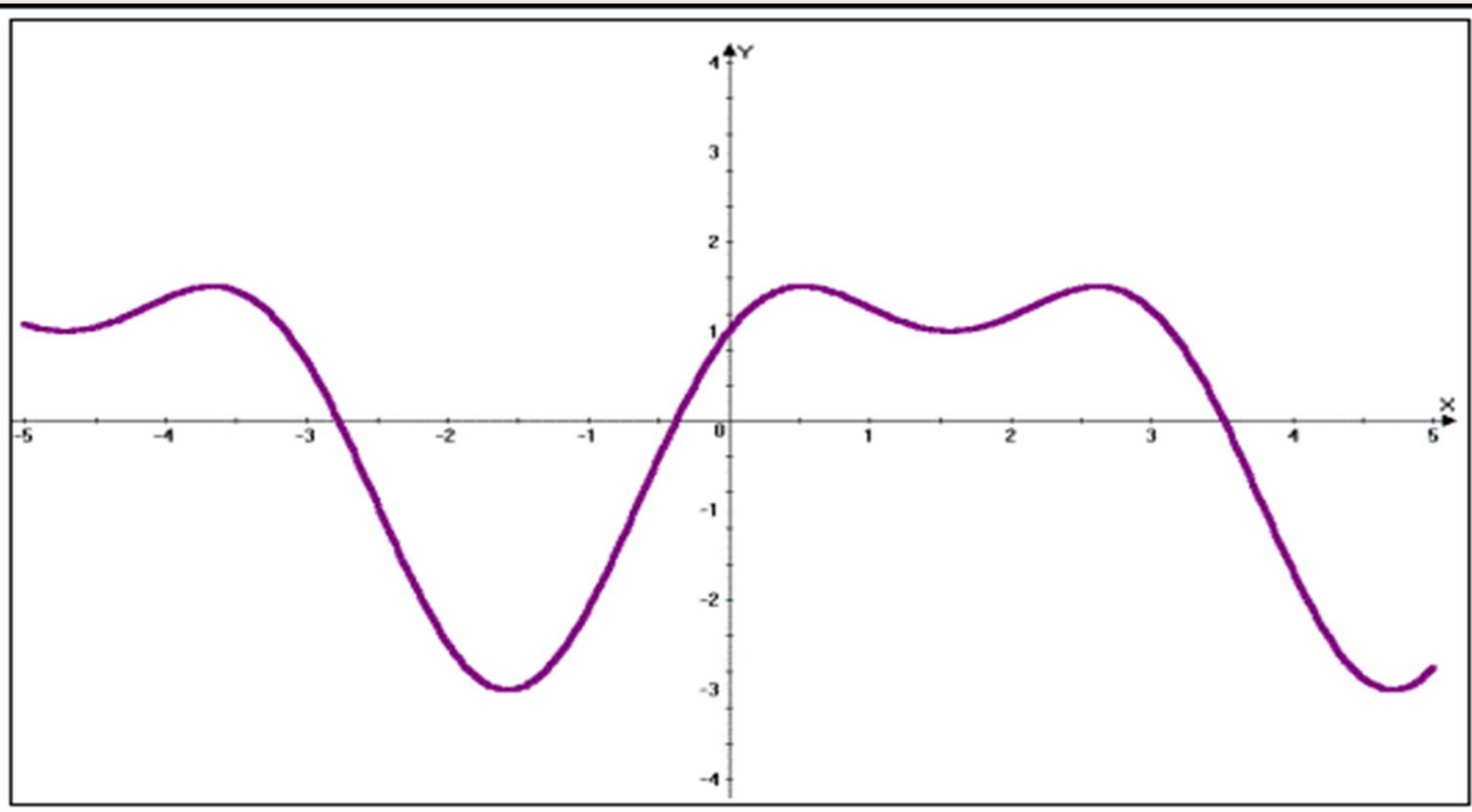


б) $a=0$, $b=5$, $f'(x)<0$ при $0<x<5$, $f(2)=0$, $f(3)=-2$

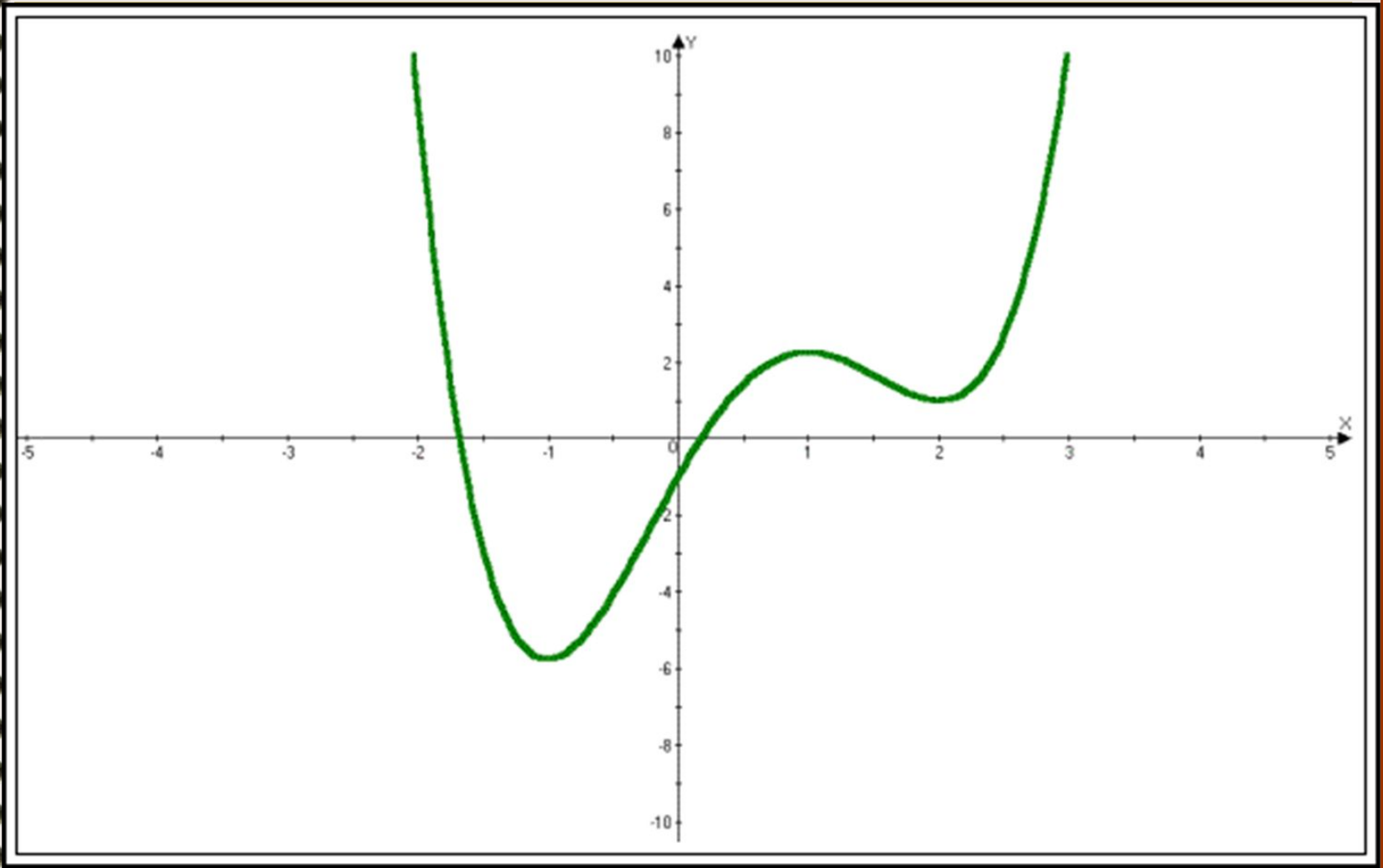
График.



№ 3. По графику производной некоторой функции укажите интервалы, на которых функция монотонно возрастает, убывает, имеет максимум, имеет минимум.

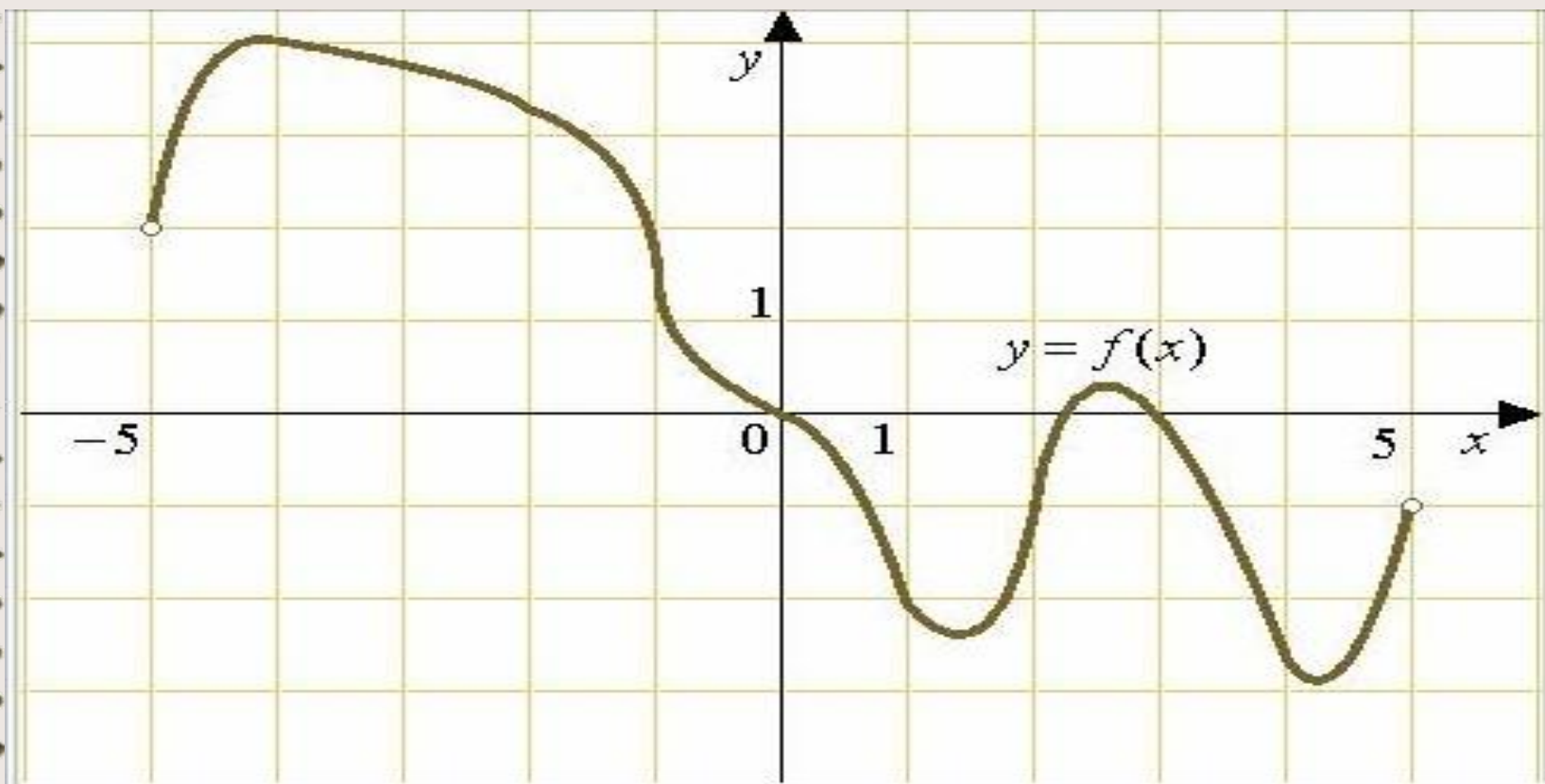


№ 4. На рисунке изображён график производной функции $y=f(x)$. Сколько точек максимума имеет эта функция? Назовите их.

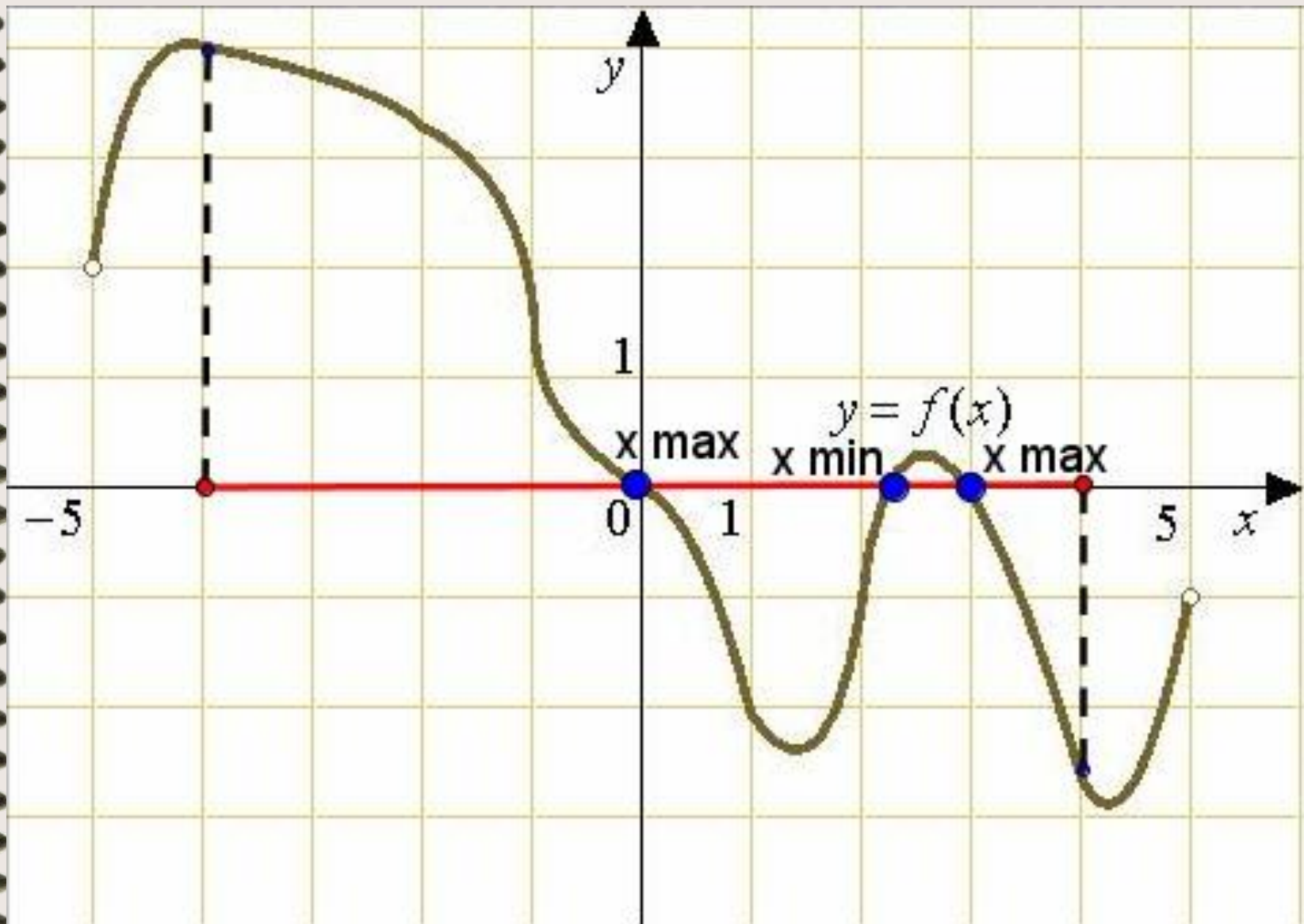


№ 5. По графику функции определить:

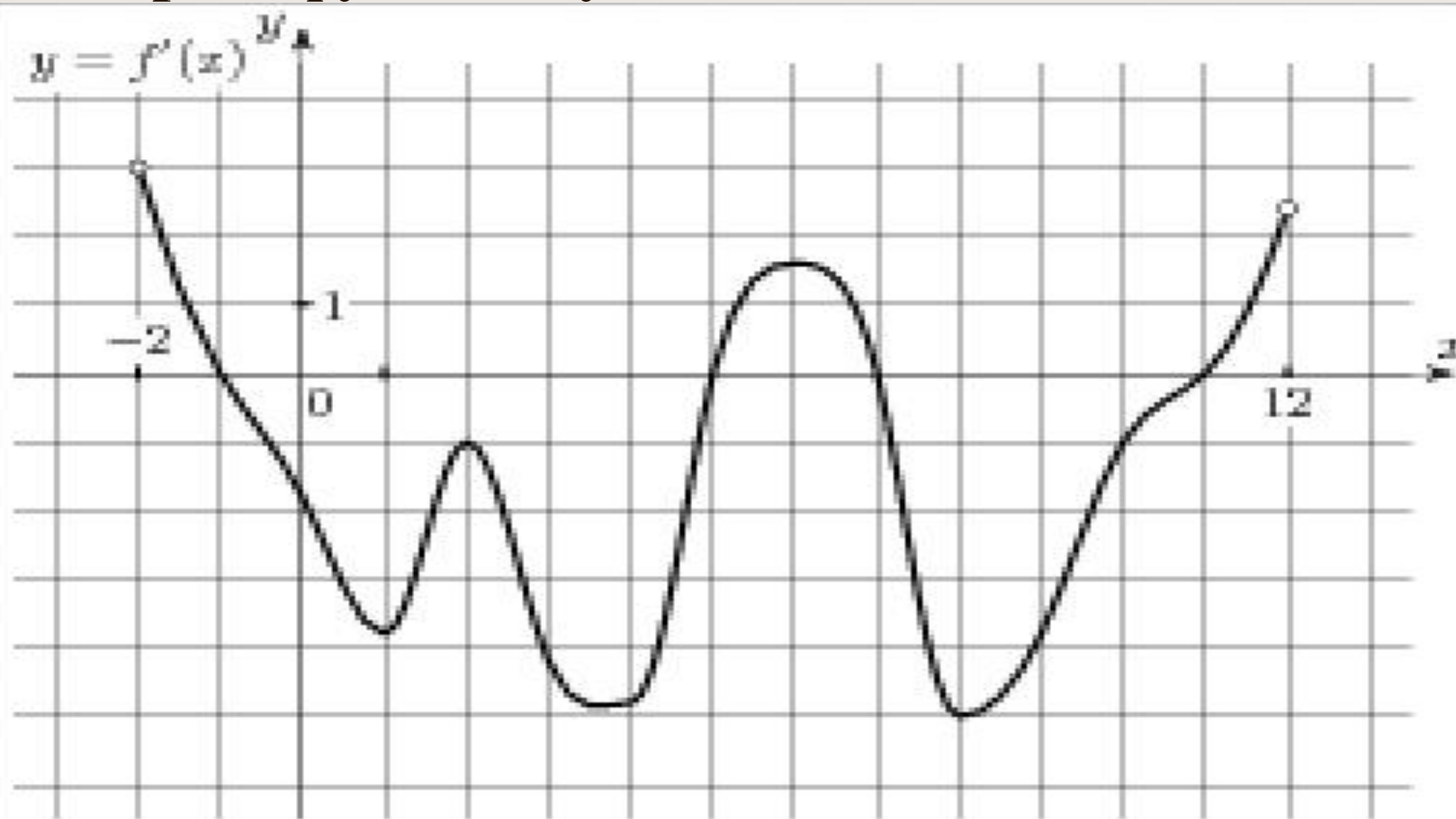
- а) сколько точек экстремума имеет функция?
- б) при каких x принадлежащих $[-4; 4]$ функция достигает наименьшего и наибольшего значения?



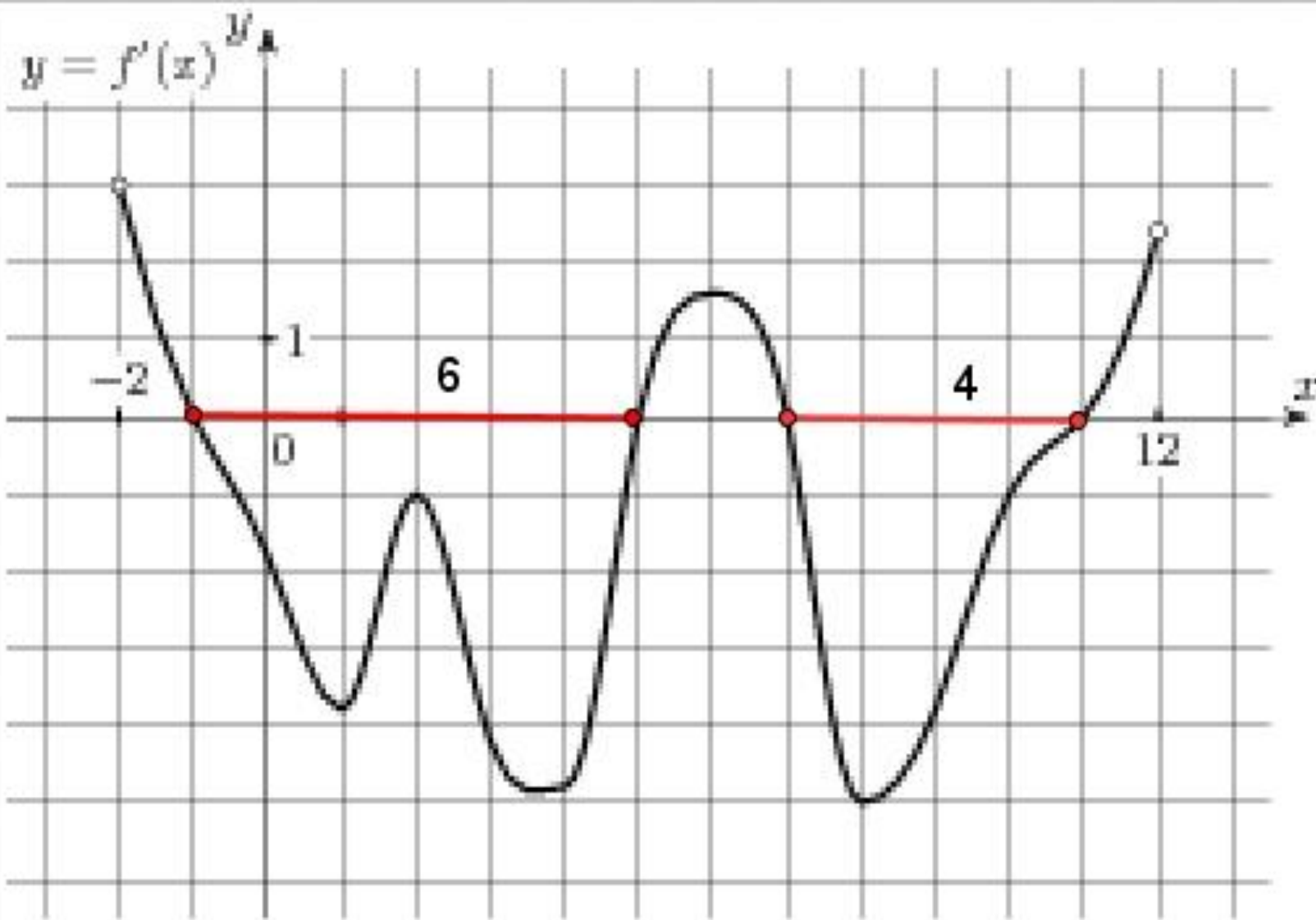
Ответ

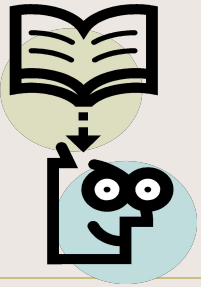


№ 6. Дан график производной некоторой функции. Определить промежутки, на которых функция убывает?



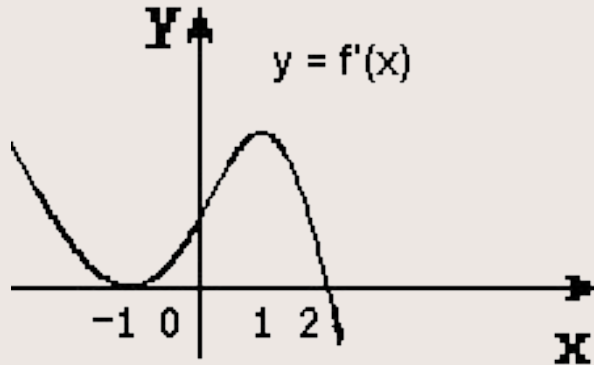
Ответ





Верно или не верно №1

1. График производной. Точки $x=-1$, $x=1$, $x=2$ являются точками максимума?



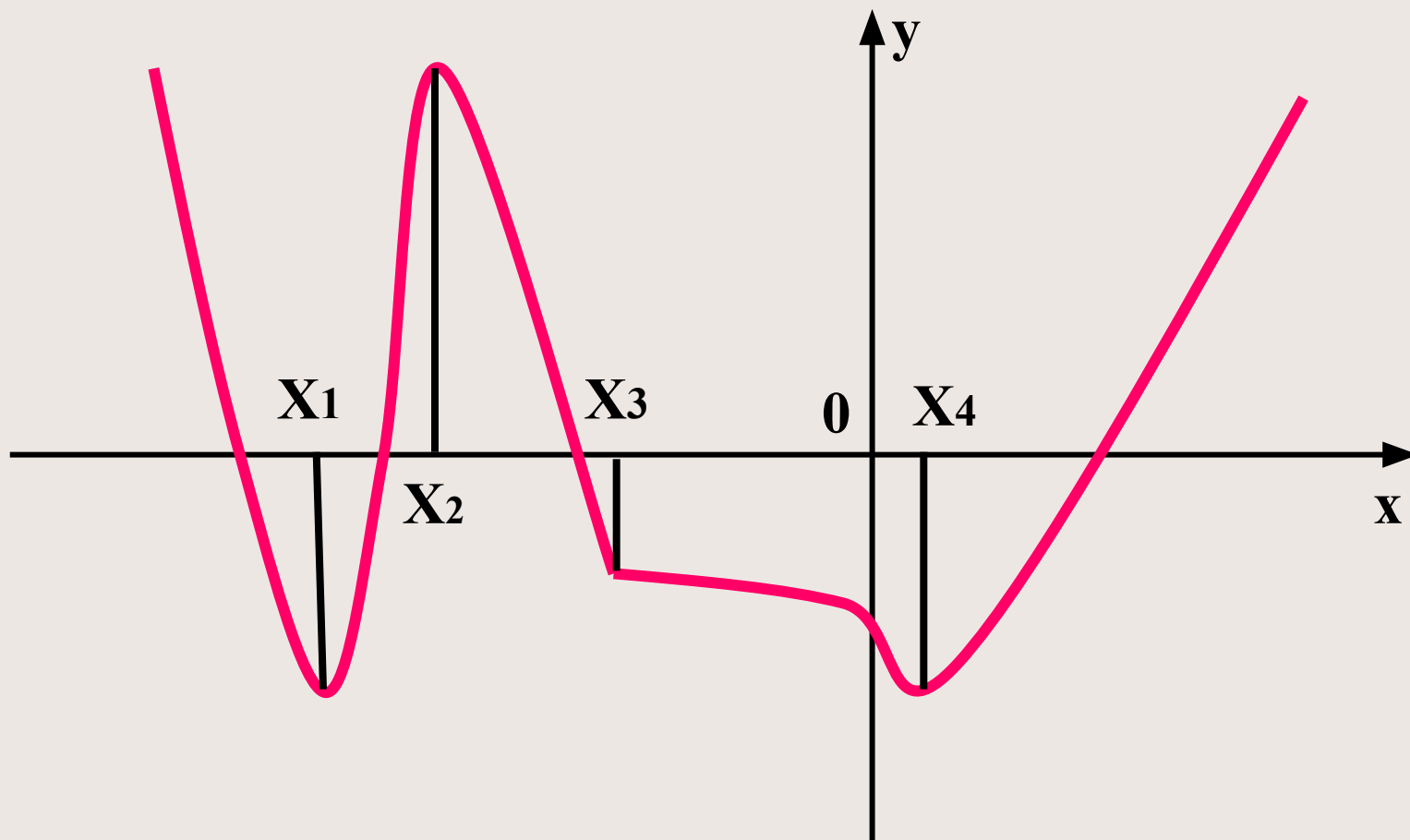
2. Производная функции в точке x_0 равна 0, значит x_0 - критическая точка. Верно ли?
3. Производная функции не существует в точке x_0 , значит x_0 - критическая точка. Верно ли?

4. Критическая точка является точкой экстремума. Верно ли?

5. Точка экстремума является критической точкой. Верно ли?

6. Функция $y(x)$ непрерывна в точке $x=4$, причем $y'(x) > 0$ на $(1;4)$ и $y'(x) < 0$ на $(4;7)$. Точка $x=4$ является точкой минимума?

№ 2. По данному графику функции определить верно или нет высказывание

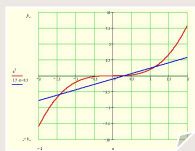


- 1) Точка x_1 – точка минимума. Да
- 2) Точка x_1 – точка перегиба. Нет

- 3) В точках x_2 и x_4 касательная параллельна оси абсцисс Да
- 4) В точке x_3 производной не существует. Да
- 5) Точка x_4 – точка экстремума Да
- 6) Точка x_4 – точка минимума Да
- 7) Точка x_4 – стационарная точка Да
- 8) Точка x_3 – точка экстремума Нет
- 9) Точка x_2 – точка максимума Да

Используемые ресурсы

- Учебник А.Г.Мордковича «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс,- М., Мнемозина, 2012
- Задачник А.Г.Мордковича «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс,- М., Мнемозина, 2012
- Л.И. Мартышова «Открытые уроки алгебры и начала анализа» 9-11 классы, - <http://www.gifpark.ru/PEO.htm>
И., ВАКО, 2012



Автор и источник заимствования неизвестен



Автор и источник заимствования неизвестен