Комплексные числа

Лекция 14

Определение

Комплексным числом называется

число вида $z = x + yi,$

где $i^2 = -1$, а *x* и *y* – вещественные числа.

называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Выражение

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Число *x* называется действительной частью, *y*–мнимой частью комплексного числа *z*.

Это записывают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Если $x = 0$, то число z называют чисто мнимым.

Если $y = 0$, то получается $z = x + 0 \cdot i$ вещественное число.

Два комплексных числа

$$z = x + iy \quad \text{и} \quad \bar{z} = x - iy$$

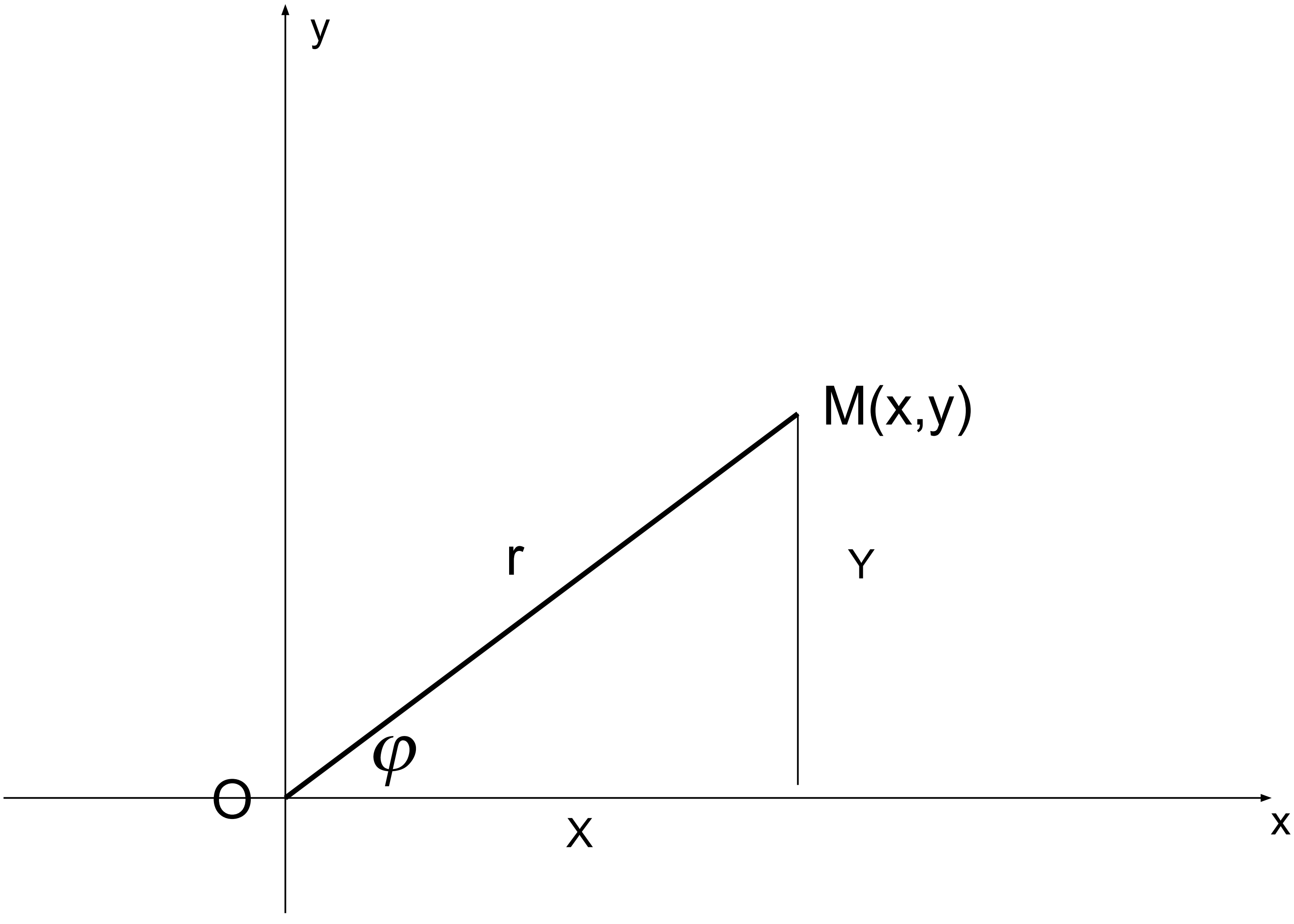
называются сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Комплексное число *z* считается равным нулю, если x=y=0.

Всякое комплексное число можно изобразить точкой на плоскости, т.к. каждому z соответствует упорядоченная пара вещественных чисел $(x;y)$.

Число $z=0$ ставится в соответствие началу координатной плоскости. Такую плоскость мы в дальнейшем будем называть комплексной плоскостью, ось абсцисс–действительной, а ось ординат– мнимой осью комплексной плоскости.


y
M(x,y)
r
Y
φ
O
X
x

Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Для определения положения точки на плоскости можно пользоваться полярными координатами , где *r*–расстояние точки от начала координат, а *φ*–угол, который составляет радиус–вектор этой точки с положительным направлением оси *Ox*.

Положительным направлением изменения угла φ считается направление против часовой стрелки. Воспользовавшись связью декартовых и полярных координат:

$$x = r\cos\varphi \quad , \quad y = r\sin\varphi \quad ,$$

получим тригонометрическую форму записи комплексного числа

,

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi,)$$ где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

φ–аргумент комплексного числа, который находят из формул

,

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

или в силу того, что ,

$$tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad \varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Пример

Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i\sqrt{3}$.

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\varphi = \frac{-1}{2}, \sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Очевидно точка $z = -1 + i\sqrt{3}$

находится во 2-й четверти и поэтому

$$\varphi = 120^o = {}^{2}\!/_{3}\,\pi.$$

Имеем .

$$z = 2\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

Показательная форма комплексного числа

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \quad ,$$

получаем показательную форму записи комплексного числа

$$z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right) = re^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 + z_2 = \left(x_1 + x_2\right) + \left(y_1 + y_2\right) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = \left(x_1 - x_2\right) + \left(y_1 - y_2\right) \cdot i$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)i$$

Действия над комплексными числами

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}=\frac{(x_1+iy_1)(x_2-iy_2)}{(x_2+iy_2)(x_2-iy_2)}=$$

$$=\frac{x_1x_2+iy_1x_2-ix_1y_2-i^2y_1y_2}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+i(-x_1y_2+x_2y_1)}{x_2^{\,2}+y_2^{\,2}}$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i \cdot \phi_1} r_2 \cdot e^{i \cdot \phi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i(\cdot \phi_1 + \cdot \phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i \cdot \varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i \cdot \varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Формула Муавра

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

Извлечение корня

В тригонометрической форме корень *n*–й степени вычисляют по формуле:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n},\right)$$

$$k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

, а в показательной–по формуле .

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}.$$

Аргумент комплексного числа.

Аргумент комплексного числа можно брать с точностью до 2π. Это значит, что аргументы сопряженных чисел отличаются знаком. Так, например, аргументом числа $z = 1 - i$ можно считать значения

$$\frac{7\pi}{4} \text{ или } \frac{\pi}{4}.$$

Пример **.** Возвести число $z = \sqrt{3} - i$ в пятую степень.

$$r = \sqrt{3+1} = 2,\ cos\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},\ sin\,\varphi = -\frac{1}{2}$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{6}$$

$$z = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

Тогда по формуле Муавра получим

$$z^5 = 2\left[\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right] =$$

$$= 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi - i\sin\frac{5}{6}\pi\right) =$$

$$= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\left(\sqrt{3} + i\right) = -\overline{z}.$$

Найти $\sqrt[3]{-1}$ $\qquad -1 = \cos\pi + i\sin\pi.$

$$\sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0,1,2.$$

$$k = 0: z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$k = 1: z_1 = \cos\frac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi}{3} =$$

$$= \cos\pi + i\sin\pi = -1.$$

.

$$k = 2: z_1 = \cos\frac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi + 4\pi}{3} =$$

$$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} =$$

$$= \cos(2\pi - \frac{\pi}{3}) + i\sin(2\pi - \frac{\pi}{3}) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

•