Государственное Бюджетное

Образовательное Учреждение

Лицей №1523 г.Москвы

Геометрия

8 класс

Теоретический материал

© Хомутова Лариса Юрьевна

Крайко Мария Александровна

Тема 3: Площади фигур. Теорема Пифагора.

Понятие площади многоугольника.

Площадь параллелограмма и треугольника.

1. Понятие площади. Равновеликие фигуры.

Площадь многоугольника – это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.

За единицу измерения площадей принимают квадрат, сторона которого равна единице измерения отрезков.

При таком определении площадь фигур измеряют в квадратных единицах ($см^2$, $км^2$, $га$=100$м^2$).

Площадь квадрата со стороной a равна a^2.

Фигуры, имеющие равные площади, называются **равновеликими.**

Замечание: *Равные фигуры имеют равные площади, то есть равные фигуры равновелики. Но равновеликие фигуры далеко не всегда равны* (например, на рисунке 3 изображены квадрат и равнобедренный треугольник, составленные из равных прямоугольных треугольников (кстати, такие ***фигуры*** называют ***равносоставленными***); понятно, что квадрат и треугольник равновелики, но не равны, поскольку не совмещаются наложением).

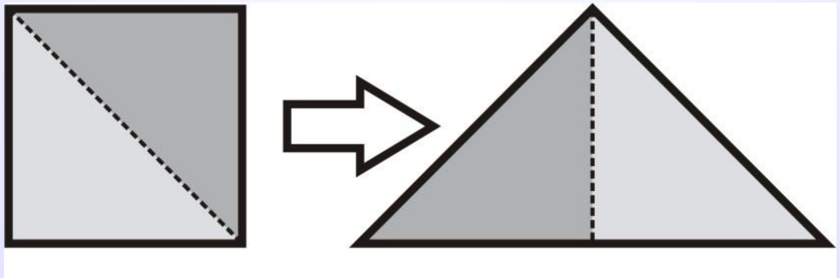

Рисунок 3

2. Площадь прямоугольника. Площадь параллелограмма.

Формула для вычисления площади прямоугольника: Площадь прямоугольника равна произведению двух его смежных сторон (рисунок 4).

Дано:
ABCD - прямоугольник;
$AD=a$, $AB=b$.
Доказать:
$S_{ABCD}=a\cdot b$.

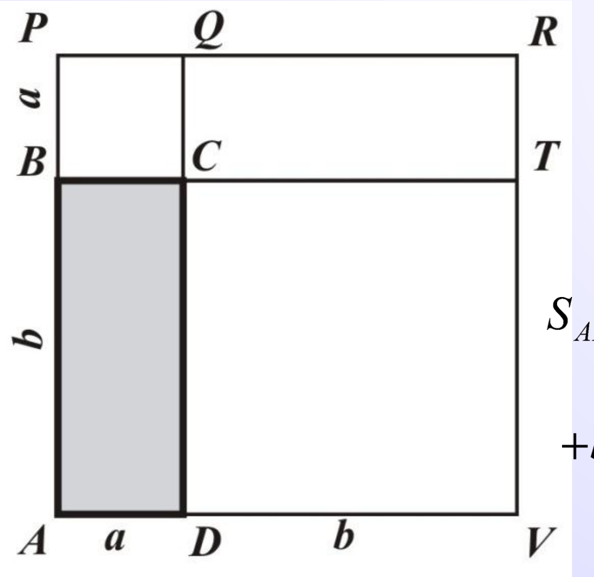

Рисунок 4

Доказательство:

1. Удлиним сторону AB на отрезок $BP=a$, а сторону AD – на отрезок $DV=b$. Построим параллелограмм $APRV$ (рисунок 4). Поскольку $\angle A=90°$, $APRV$ – прямоугольник. При этом $AP=a+b=AV$, $\Rightarrow$ $APRV$ – квадрат со стороной $(a+b)$.
2. Обозначим $BC\cap RV=T$, $CD\cap PR=Q$. Тогда $BCQP$ – квадрат со стороной a, $CDVT$ – квадрат со стороной b, $CQRT$ – прямоугольник со сторонами a и b.

$$S_{APRV}=(a+b)^2=S_{ABCD}+S_{BCQP}+S_{CQRT}+S_{CDVT}=2\cdot S_{ABCD}+a^2+$$

$$+b^2;\Rightarrow \cancel{a^2}+2ab+\cancel{b^2}=2S_{ABCD}+\cancel{a^2}+\cancel{b^2};\Rightarrow S_{ABCD}=ab$$

.

#

Формула для вычисления площади параллелограмма:

Площадь параллелограмма равна произведению его высоты на основание (рисунок 5).

Дано:

$ABCD$ – п/г;

$BH \perp AD$,

$H \in AD$.

Доказать:

$S_{ABCD} = AD \cdot BH$.

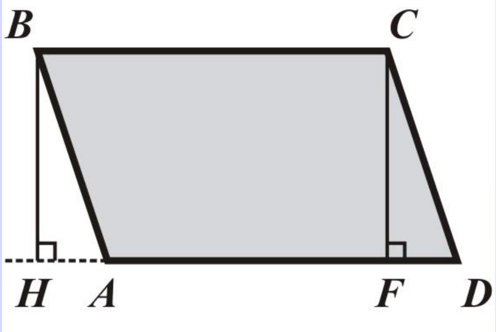

Рисунок 5

Доказательство:

1. Проведем к основанию AD высоту CF (рисунок 5).

2. $BC \| HF$, $BH \| CF$, $\Rightarrow$ $BCFH$ - п/г по определению. $\angle H = 90°$, $\Rightarrow BCFH$ – прямоугольник.

3. $BCFH$ – п/г, $\Rightarrow$ по свойству п/г $BH = CF$, $\Rightarrow$ $\Delta BAH = \Delta CDF$ по гипотенузе и катету ($AB = CD$ по св-ву п/г, $BH = CF$).

$$S_{ABCD} = S_{ABCF} + S_{\Delta CDF} = S_{ABCF} + S_{\Delta BAH} =$$

$$= S_{BCFH} = BH \cdot BC = BH \cdot AD$$

3. Площадь треугольника.

Формула для вычисления площади треугольника: Площадь треугольника равна половине произведения его высоты на основание (рисунок 6).

Дано:

ΔABC;

$BD \perp AC$, $D \in AC$.

Доказать:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$

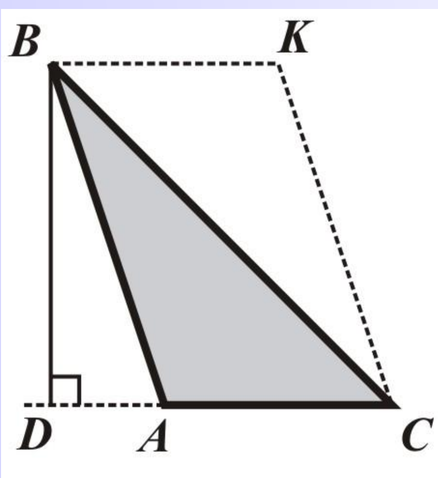

Рисунок 6

Доказательство:

1. Достроим ΔABC до п/г $ABKC$ путем проведения через вершину B прямой $BK || AC$, а через вершину C – прямой $CK || AB$ (рисунок 6).

2. $\Delta ABC = \Delta KCB$ по трем сторонам (BC – общая, $AB = KC$ и $AC = KB$ по св-ву п/г), $\Rightarrow$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta KCB} = \frac{1}{2} \cdot S_{ABKC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD$$

#

Следствие 1 (формула для вычисления площади прямоугольного треугольника): Поскольку в п/у Δ-ке один из катетов является высотой, проведенной ко второму катету, площадь п/у Δ-ка равна половине произведения его катетов, на рисунке 7

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$$

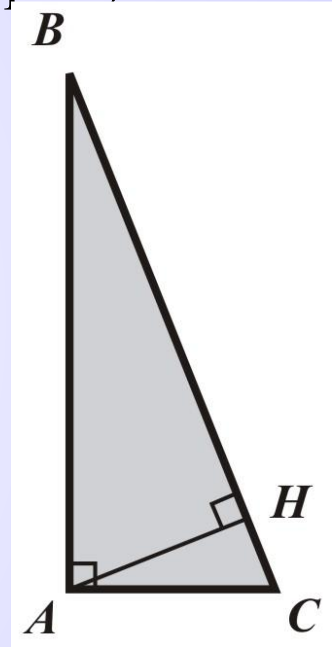

Рисунок 7

Следствие 2: Если рассмотреть п/у ΔABC с высотой AH, проведенной к гипотенузе BC, то

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH, \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$

Таким образом, ***в п/у Δ-ке высота, проведенная к гипотенузе, равна отношению произведения его катетов к гипотенузе***. Это соотношение достаточно часто используется при решении задач.