Погрешности измерений.

Определение погрешности измерений.

Классификация погрешностей.

Случайные погрешности.

Систематические погрешности.

Методы исключения систематических погрешностей.

Грубые погрешности и методы их исклн

Погрешности косвенных измерени...

Случайная погрешность возникает при одновременном воздействии многих источников, каждый из которых сам по себе оказывает незаметное влияние на результат измерения, но суммарное воздействие всех источников может оказаться достаточно сильным.

Случайная ошибка может принимать различные по абсолютной величине значения, предсказать которые для данного акта измерения невозможно. Эта ошибка в равной степени может быть как положительной, так и отрицательной. Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте. При отсутствии систематических ошибок они служат причиной разброса повторных измерений относительно истинного значения (*рис.1*).

Если, кроме того, имеется и систематическая ошибка, то результаты измерений будут разбросаны относительно не истинного, а смещенного значения (*рис.2*).

Рис. 1

Рис. 2

Определение погрешности

В зависимости от характеристик измеряемой величины для определения погрешности измерений используют различные методы.

- *Метод Корнфельда*, заключается в выборе доверительного интервала в пределах от минимального до максимального результата измерений, и погрешность как половина разности между максимальным и минимальным результатом измерения: $$\Delta x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

- *Средняя квадратическая погрешность*: $$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

- *Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического*:

$$S_x = \frac{S}{\sqrt{n}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Наиболее часто встречающиеся на практике ошибки распределены по нормальному закону:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Если случайная ошибка распределена по нормальному закону, то для ответа на этот вопрос необходимо вычислить интеграл

$$\int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Расчёты показывают (рис. 3),
что в 68,27 % отклонения случайной величины, распределённой по нормальному закону, не превышают σ,
в 95,45 % – 2σ.
Наконец, вероятность того, что случайная величина, распределённая нормально, отклоняется от математического ожидания больше, чем на 3σ, пренебрежимо мала и составляет 0,27 % – ***правило трёх сигм***.

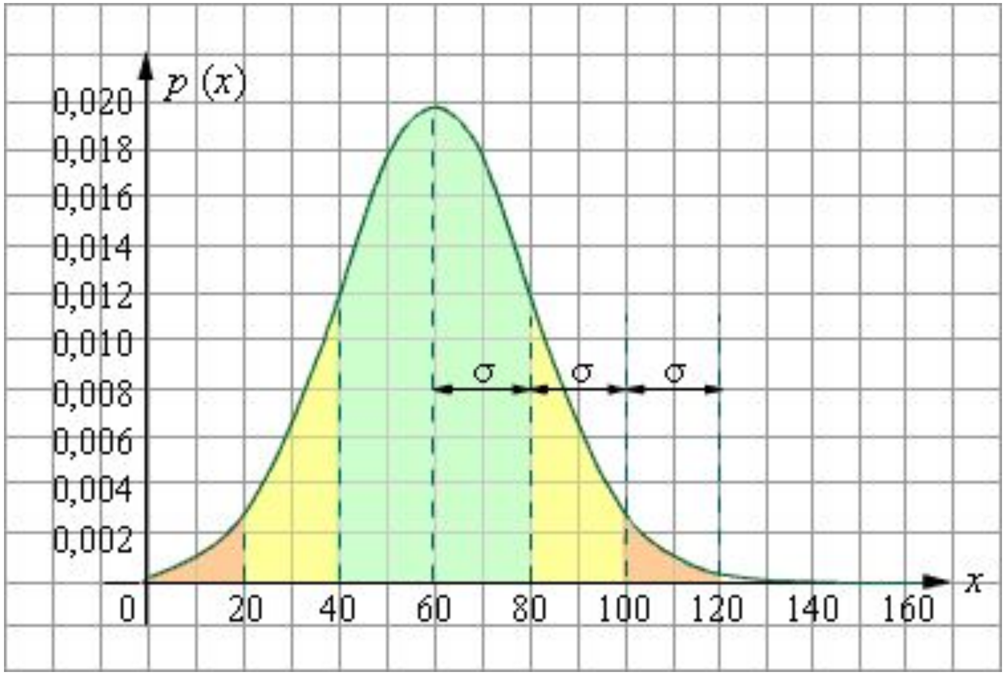

Рисунок 3. Правило трёх сигм

•**Погрешность прямых измерений** - вычисляются по формуле

$$\Delta x = \sqrt{(t)^2 + (A)^2}$$

где : $t = S_x \alpha_s$; S_x — Средняя квадратическая погрешность среднего арифметического, а α_s — коэффициент Стьюдента, а A — число, численно равное половине цены деления измерительного прибора.

•**Погрешность косвенных воспроизводимых измерений** — погрешность вычисляемой (не измеряемой непосредственно) величины:
Если $F = F(x_1, x_2 \ldots x_n)$, где x_i — непосредственно измеряемые независимые величины, имеющие погрешность Δx_i, тогда:

$$\Delta F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\Delta x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2}$$

•**Погрешность косвенных невоспроизводимых измерений** - вычисляется по принципу **прямой погрешности**, но вместо x_i ставится значение полученное в процессе расчётов.

Приборные погрешности определяются двумя факторами:

1. **классом точности прибора**, связанным с его устройством – элементной базой и принципом действия.

Абсолютная погрешность через класс точности оценивается следующим образом: $(\mathbf{D}x)_{\text{к.т.}} = (g/100)X$,

где **g** - класс точности в %, указанный на панели прибора,
X = Xmax – предел измерения для стрелочных приборов,
либо **X** есть текущее значение для магазинов сопротивления, индуктивности, емкости;

2. **ценой делений шкалы прибора**:

$$(\mathbf{D}x)_{\text{ц.д.}} = \frac{1}{2} h,$$

где h – цена деления шкалы прибора, т.е. расстояние между ближайшими штрихами шкалы, выраженное в соответствующих единицах измерения.

Простейший способ определения **(D*x*)*p*** дает **метод Корнфельда**, который предписывает **следующий образ действий**, если физическая величина ***x*** измерена ***n*** раз:

1) имея ***x1 , …,xn*** – значений измеряемой величины ***x***, выбираем из $\{x_1, \ldots, x_n\}$ **xmax** и **xmin** и находим среднее значение ***x***: $< x > = \frac{x_{max} + x_{min}}{2}$

2) находим абсолютную погрешность **D*xp*** = $\frac{x_{max} - x_{min}}{2}$

3) Записываем результат в виде: $x = < x > \pm \Delta x$ с $\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

где **a** – доверительная вероятность того, что истинное значение измеренной величины находится на отрезке $[< x > - \Delta x; < x > + \Delta x]$.

Доверительная вероятность определяет собой долю средних значений ***x***, полученных в аналогичных сериях измерений, попадающих в доверительный интервал. Недостатком метода Корнфельда является то обстоятельство, что вероятность приводимого результата определяется исключительно количеством ***n*** проведенных измерений и не может быть изменена посредством увеличения или уменьшения доверительного интервала ± **D*x***.

метод расчета погрешностей Стьюдента.

Последовательность расчета погрешностей этим методом такова:

1) Вы измерили и получили несколько **(i = 1,...,m)** значений случайной величины $\boldsymbol{x}_i$.

Сначала исключаем промахи, то есть заведомо неверные результаты.

2) По оставшимся **n** значениям определяем среднее значение величины : $\langle x \rangle$

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}{n}$$

3) Определяем среднеквадратичную погрешность среднего значения : $\langle x \rangle$

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \langle x \rangle\right)^2}{(n-1) \cdot n}}$$

4) Задаемся доверительной вероятностью **a**.
По таблице коэффициентов Стьюдента (***квантили или процентили распределения Стьюдента***) определяем по известному значению числа измерений **n** и доверительной вероятности **a** коэффициент Стьюдента **tan**.

5) Определяем погрешность среднего значения величины $\langle x \rangle$ (доверительный интервал) $\langle x \rangle$

D $\langle x \rangle$ = tan s<X>

6) Записываем результат

x **= (** $\langle x \rangle$ **± D** $\langle x \rangle$ **)** с указанием доверительной вероятности **a**.

Чтобы получить значение $t_{\alpha,k}$, необходимо найти строку, соответствующую нужному k, числу степеней свободы, расчитываемому по формуле $k = n - 1$, и колонку, соответствующую нужному α. Искомое число находится в таблице на их пересечении.

Квантили $t\alpha,n$

wo-tailed test	1-0.9/2	1-0.8/2	1-0.7/2	1-0.6/2	1-0.5/2	1-0.4/2	1-0.3/2	1-0.2/2	1-0.1/2	1-0.05/2	1-0.02/2
one-tailed test	1-0.9	1-0.8	1-0.7	1-0.6	1-0.5	1-0.4	1-0.3	1-0.2	1-0.1	1-0.05	1-0.02
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1.0000	1.3764	1.9626	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205
2	0.1421	0.2887	0.4447	0.6172	0.8165	1.0607	1.3862	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646
3	0.1366	0.2767	0.4242	0.5844	0.7649	0.9785	1.2498	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407
4	0.1338	0.2707	0.4142	0.5686	0.7407	0.9410	1.1896	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469
5	0.1322	0.2672	0.4082	0.5594	0.7267	0.9195	1.1558	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649

Пример

$$t_{0.2,4} = 0.2707;$$

$$t_{0.8,4} = -\,t_{0.2,4} = -\,0.2707.$$

В научных статьях обычно приводят доверительный интервал соответствующий доверительной вероятности $\boldsymbol{\alpha}$ =0,7 (0,68).

Такой интервал называется стандартным, при его использовании часто значение доверительной погрешности не приводят.

Использование метода Стьюдента является необходимым, когда требуется знать значение физических параметров с заданной доверительной вероятностью (как в ряде лабораторных работ).

На практике доверительная вероятность погрешности разброса выбирается в соответствии с доверительной вероятностью, соответствующей классу точности измерительного прибора.

Для большинства исследований, в которых не выдвигается жестких требований к вероятности полученных результатов, метод Корнфельда является вполне приемлемым.

точности одновременного определения пары характеризующих квантовую систему физических наблюдаемых величин) в квантовой механике — фундаментальное неравенство (соотношение неопределённостей), устанавливающее предел точности одновременного определения пары характеризующих квантовую систему физических наблюдаемых величин, описываемых некоммутирующими) в квантовой механике — фундаментальное неравенство (соотношение неопределённостей), устанавливающее предел точности одновременного определения пары характеризующих квантовую систему физических наблюдаемых величин, описываемых некоммутирующими операторами) в квантовой механике — фундаментальное неравенство (соотношение неопределённостей), устанавливающее предел точности одновременного определения пары характеризующих квантовую систему физических наблюдаемых величин, описываемых некоммутирующими операторами (например, координаты и импульса, тока и напряжения, электрического и магнитного поля).

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

В повседневной жизни мы обычно не наблюдаем квантовую неопределённость потому, что значение $\hbar$ чрезвычайно мало, и поэтому соотношения неопределенностей накладывают такие слабые ограничения на погрешности измерения, которые заведомо незаметны на фоне реальных практических погрешностей наших приборов или органов чувств.

Соотношение неопределенностей задаёт нижний предел для произведения среднеквадратичных отклонений пары квантовых наблюдаемых. Принцип неопределённости, открытый Вернером Гейзенбергом в 1927 г., является одним из краеугольных камней квантовой механики.

Погрешность измерения и *принцип неопределенности Гейзенберга*

Принцип неопределенности Гейзенберга устанавливает предел точности одновременного определения пары наблюдаемых физических величин, характеризующих квантовую систему, описываемых некоммутирующими операторами (например, координаты и импульса, тока и напряжения, электрического и магнитного поля). Таким образом, в квантовой механике постулируется принципиальная невозможность одновременного определения с абсолютной точностью некоторых физических величин. Этот факт накладывает серьезные ограничения на применимость понятия «истинное значение физической величины».

Соотношения неопределённостей не ограничивают точность однократного измерения любой величины (для многомерных величин тут подразумевается в общем случае только одна компонента). Если её оператор

Соотношения неопределённостей не ограничивают точность однократного измерения любой величины (для многомерных величин тут подразумевается в общем случае только одна компонента). Если её оператор коммутирует сам с собой в разные моменты времени, то не ограничена точность и многократного (или непрерывного) измерения одной величины. Например, соотношение неопределённостей для свободной частицы не препятствует точному измерению её импульса, но не позволяет точно измерить её координату (это ограничение называется стандартный квантовый предел для координаты).

Если имеется несколько идентичных копий системы в данном состоянии, то измеренные значения координаты и импульса будут подчиняться определённому *распределению вероятности* — это фундаментальный постулат квантовой механики. Измеряя величину среднеквадратического отклонения Δx координаты и среднеквадратического отклонения Δp импульса, мы найдем что:

$$\Delta x \Delta p \geqslant \frac{\hbar}{2},$$

где $\hbar$ — приведённая постоянная Планка.

В некоторых случаях «неопределённость» переменной определяется как наименьшая ширина диапазона, который содержит 50 % значений, что, в случае нормального распределения переменных, приводит для произведения неопределённостей к большей нижней границе $\hbar$.
Отметим, что это неравенство даёт несколько возможностей — состояние может быть таким, что x может быть измерен с высокой точностью, но тогда p будет известен только приблизительно, или наоборот p может быть определён точно, в то время как x — нет. Во всех же других состояниях, и x и p могут быть измерены с «разумной» (но не произвольно высокой) точностью.

- самое известное отношение неопределённости — между координатой и импульсом частицы в пространстве: $$\Delta x_i \Delta p_i \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

- отношение неопределённости между двумя ортогональными компонентами оператора полного углового момента частицы: $$\Delta J_i \Delta J_j \geqslant \frac{\hbar}{2} \left|\langle J_k \rangle\right|$$

  где i, j, k различны и J_i обозначает угловой момент вдоль оси x_i.

- следующее отношение неопределённости между энергией и временем часто представляется в учебниках физики, хотя его интерпретация требует осторожности, так как не существует оператора, представляющего время:

$$\Delta E \Delta t \geqslant \frac{\hbar}{2}$$

Правила построения графиков физических величин

1.Оформление осей, масштаб, размерность.

Результаты измерений и вычислений удобно представлять в графическом виде.

Графики строятся на миллиметровой бумаге; размеры графика не должны быть меньше 150×150 мм (половина страницы лабораторного журнала).

На лист прежде всего наносятся координатные оси (результаты прямых измерений, как правило, откладываются на оси абсцисс).

На концах осей наносятся обозначения физических величин и их единицы измерения.

Затем **на оси наносятся масштабные деления так, чтобы расстояние между делениями составляли 1, 2, 5 единиц или 1; 2; $5\cdot10^{\pm n}$, где n – целое число**.

Точка пересечения осей не обязательно должна соответствовать нулю по одной или более осям.

Начало отсчета по осям и масштаб следует выбирать так, чтобы:

1) кривая (прямая) заняла все поле графика;

2) углы между касательными к кривой и осями должны быть близки к 45º (или 135º) по возможности в большей части графика.

2. Графическое представление физических величин. После выбора и нанесения на оси масштабов на лист наносятся значения физических величин. Их обозначают маленькими кружочками, треугольниками, квадратами, причем ***числовые значения, соответствующие нанесенным точкам, не сносятся на оси***. Затем от каждой точки вверх и вниз, вправо и влево откладываются в виде отрезков соответствующие погрешности в масштабе графика.

2.1. После нанесения точек строиться график, т.е. ***проводится предсказанная теорией плавная кривая или прямая*** так, чтобы она пересекала все области погрешностей или, если это не возможно, суммы отклонений экспериментальных точек снизу и сверху кривой должны быть близки. В правом или в левом верхнем углу (иногда посередине) пишется название той зависимости, которая изображается графиком.

2.2. ***Исключение составляют градуировочные графики***, на которых точки, нанесенные без погрешностей, соединяются последовательными отрезками прямых, а точность градуировки указывается в правом верхнем углу, под названием графика. Однако, если в процессе градуировки прибора абсолютная погрешность измерений изменялась, то на градуировочном графике наносятся погрешности каждой измеренной точки. (Такая ситуация реализуется при градуировке шкалы «амплитуда» и «частота» генератора ГСК при помощи осциллографа). Градуировочные графики служат для отыскания промежуточных значений линейных интерполяций.

3. Линейные аппроксимации.

В экспериментах часто требуется построить график зависимости полученной в работе физической величины Y от полученной физической величины x, аппроксимируя Y(x) линейной функцией , где k, b – постоянные. $Y = kx + b$

Графиком такой зависимости является прямая, а угловой коэффициент k, часто сам является основной целью эксперимента.

Естественно, что k в этом случае представляет собой также физический параметр, который должен быть определен с присущей данному эксперименту точностью.

Одним из методов решения данной задачи является метод парных точек.

Однако следует иметь в виду, что метод парных точек применим при наличии большого числа точек n ~ 10, кроме того, он является достаточно трудоемким.

Более простым и при его аккуратном исполнении, не уступающим в точности методу парных точек, является следующий графический метод определения $k \pm \Delta k$:

1) По экспериментальным точкам, нанесенным с погрешностями, проводится прямая с использованием метода наименьших квадратов (МНК). Основополагающей идеей аппроксимации по МНК является минимизация суммарного среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от искомой прямой

$$Y = kx + b$$

.

При этом коэффициенты k, b определяются из условий минимизации:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dk}\sum_{i=1}^{n}\left(Y(x_i) - y_i\right)^2 = 0 \\ \dfrac{d}{db}\sum_{i=1}^{n}\left(Y(x_i) - y_i\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Здесь x_i, y_i - экспериментально измеренные значения, **n** – число экспериментальных точек.

В результате решения данной системы имеем выражения для расчета коэффициентов k, b по экспериментально измеренным значениям:

$$\begin{cases} k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i - n\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \end{cases}$$

2) После вычисления коэффициентов проводится искомая прямая.
Затем выбирается экспериментальная точка, имеющая наибольшее, с учетом ее погрешности, отклонение от графика в вертикальном направлении DYmax как указано на рис 4. Тогда относительная погрешность Dk/k, обусловленная неточностью значений Y, равна:

$$\delta k_y = \left(\frac{\Delta k}{k}\right)_y = \frac{\Delta Y_{max}}{Y_{max} - Y_{min}}$$

где $(Y_{max} - Y_{min})$ измерительный интервал значений Y от max до min.
При этом в обеих частях равенства стоят безразмерные величины, поэтому DYmax и $(Y_{max} - Y_{min})$ одновременно вычислять в мм по графику или одновременно брать с учетом размерности Y

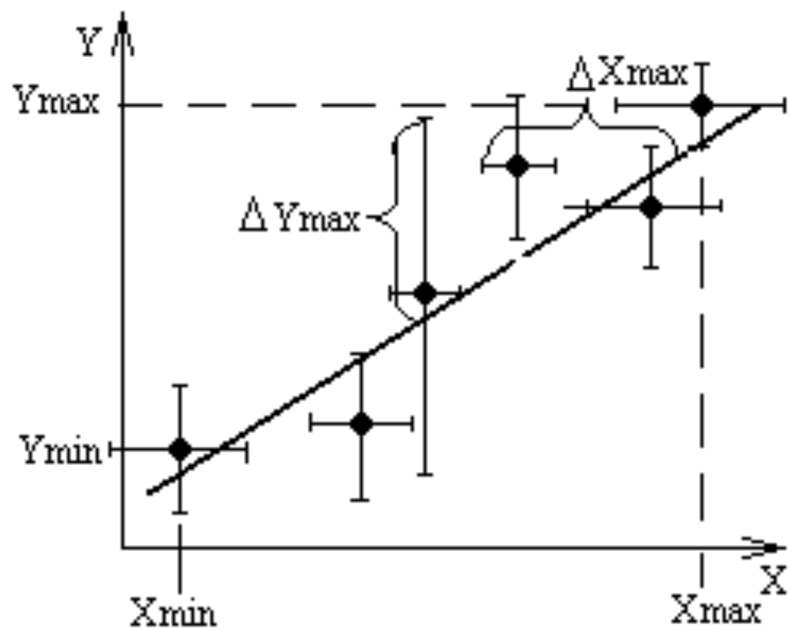

Рис. 4.

3) Аналогично вычисляется относительная погрешность $(\Delta k / k)_y$, обусловленная погрешностью при определении ***x*.**

$$\delta k_x = \left(\frac{\Delta k}{k}\right)_x = \frac{\Delta X_{max}}{X_{max} - X_{min}}$$

4) $$\frac{\Delta k}{k} = \sqrt{\partial k_x^2 + \partial k_y^2}$$ Если одна из погрешностей,

например, $\partial k_x^2 << \partial k_y^2$, или величина ***x*** имеет очень малые погрешности **D***x*, незаметные на графике, то можно считать **d*k*= d*ky*.**

5) Абсолютная погрешность **D*k*=d*k**k**. В результате $k = k \pm \delta k * k$.