Разложение многочлена на множители

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, т. е. функции, которые можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P\left(x\right),\ Q\left(x\right)$ – многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W\left(x\right) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad (1)$$

где $W\left(x\right)$ – некоторый многочлен, а $R\left(x\right)$ – многочлен степени ниже, чем $Q\left(x\right)$.

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен может быть представлен в виде произведения

$$Q\left(x\right) = A\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)\ldots\left(x-\gamma\right),$$

где A – коэффициент при старшей степени многочлена $Q\left(x\right)$, а $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ ,\ \gamma$ – корни уравнения $Q\left(x\right) = 0$.

Множители $\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)\ldots\left(x-\gamma\right)$ называются элементарными множителями.

Если среди них имеются совпадающие, то, группируя, получаем представление

$$Q\left(x\right) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots(x-\gamma)^t, \qquad (2)$$

где $r,\ s,\ \ldots\ ,\ t$ – целые числа, которые называются соответственно кратностями корней $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ ,\ \gamma$, причем $r+s+\ldots+t=n$, n – степень многочлена $Q\left(x\right)$.

Среди корней представления могут быть и комплексные, причем, если есть комплексный корень $\alpha = a+bi$, то есть и комплексно сопряженный к нему корень $\bar{\alpha} = a-bi$. Т.е. если есть множитель $(x-(a+bi))^r$, то есть и множитель $(x-(a-bi))^r$. Перемножим эти множители

$$(x-(a+bi))^r(x-(a-bi))^r = \left[x^2 - x\left(a+bi\right) - x\left(a-bi\right) + \left(a+bi\right)\left(a-bi\right)\right]^r =$$

$$= \left(x^2 - 2xa + a^2 + b^2\right)^r = \left(x^2+2px+q\right)^r,$$

где $p=-a,\ \ q=a^2+b^2,\ \ p^2-q<0$, p и q – вещественные числа.

Поступая аналогично с остальными комплексными корнями, запишем представление в виде

$$Q\left(x\right) = A(x-\alpha)^r(x-\beta)^s\ldots\left(x^2+2px+q\right)^t\left(x^2+2ux+v\right)^m\ldots, \qquad (3)$$

где $\alpha,\ \beta,\ \ldots\ ,\ p,\ q,\ u,\ v,\ \ldots$ – вещественные числа.

Разложение рациональной дроби на элементарные

В высшей алгебре доказывается теорема

Теорема. *Если рациональная функция* $\frac{R(x)}{Q(x)}$ *имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен* $Q\left(x\right)$ *представлен в виде (3), то эту функцию можно единственным образом представить в виде*

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \ldots \quad \ldots + \frac{B_1x+C_1}{x^2+2px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+2px+q)^2} + \ldots + \frac{B_tx+C_t}{(x^2+2px+q)^t} + \ldots, \quad , \qquad (4)$$

где $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_r,\ \ldots\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots\ B_t,\ C_t,\ \ldots$ *– некоторые вещественные числа.*

Выражение (4) называется *разложением рациональной функции на элементарные дроби.*

Равенство (4) имеет место для всех x, не являющихся вещественными корнями многочлена $Q\left(x\right)$.

Чтобы определить числа $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_r,\ \ldots\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots\ B_t,\ C_t,\ \ldots$, умножим обе части разложения на $Q\left(x\right)$. Поскольку равенство между многочленом и многочленом, который получится в правой части, должно быть справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при равных степенях, должны быть равны между собой. Приравнивая их, получаем систему уравнений первой степени, из которой найдем неизвестные числа $A_1,\ A_2,\ \ldots\ A_r,\ \ldots\ B_1,\ C_1,\ B_2,\ C_2,\ \ldots\ B_t,\ C_t,\ \ldots$.

Такой метод отыскания коэффициентов разложения рациональной функции называется *методом неопределенных коэффициентов.*

Пример разложения

Пример 1. Разложить на элементарные дроби рациональную дробь $\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}$.

Р е ш е н и е.

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = \frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Для нахождения чисел $A,\ B,\ C$ приравняем числитель полученной дроби числителю исходной дроби и применим метод произвольных значений (подставим произвольные значения x в правую и левую части равенства):

$$x = A(x-2)^2 + B\,(x+1)\,(x-2) + C\,(x+1).$$

При $x=-1$: $\ -1 = 9A \ \Rightarrow\ A = -\frac{1}{9}$.

При $x=2$: $\ 2 = 3C \ \Rightarrow\ C = \frac{2}{3}$.

При $x=1$: $\ 1 = A - 2B + 2C \ \Rightarrow\ B = \frac{1}{2}(A + 2C - 1) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{4}{3} - 1\right) = \frac{1}{9}$.

Итак,

$$\frac{x}{(x+1)(x-2)^2} = -\frac{1}{9(x+1)} + \frac{1}{9(x-2)} + \frac{2}{3(x-2)^2}.$$

Интегрирование элементарных дробей

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции (1) сводится к интегрированию многочлена $W(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ \dots \ + a_m$, интеграл от которого является табличным:

$$\int W(x)\,dx = a_0 \frac{x^{m+1}}{m+1} + a_1 \frac{x^m}{m} + \ \dots \ + a_m x + C$$

и интегрированию рациональной функции $\frac{R(x)}{Q(x)}$, что приводит к нахождению интегралов следующих четырех типов:

I. $\int \frac{A}{x-\alpha} dx = A \ln|x-\alpha| + C$

II. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r} dx = A \frac{(x-\alpha)^{-r+1}}{-r+1} + C$

III. $\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q} dx$

IV. $\int \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^t} dx$

при этом многочлен $x^2 + 2px + q$ не имеет действительных корней и $p^2 - q < 0$.

Вычислим интеграл III-го типа $\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q} dx$.

Выделим в знаменателе полный квадрат

$$x^2 + 2px + q = (x+p)^2 + q - p^2$$

и введем подстановку $x + p = t$, из которой $x = t - p$ и $dx = dt$. Положим $q - p^2 = h^2 > 0$, получим интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+2px+q} dx = \int \frac{B(t-p)+C}{t^2+h^2} dt = B \int \frac{t}{t^2+h^2} dt + (C - Bp) \int \frac{dt}{t^2+h^2} =$$

$$= \frac{B}{2} \int \frac{dt^2}{t^2+h^2} + (C - Bp) \int \frac{dt}{t^2+h^2} = \frac{B}{2} \ln(t^2 + h^2) + \frac{C-Bp}{h} \operatorname{arctg} \frac{t}{h} =$$

$$= \frac{B}{2} \ln\left((x+p)^2 + h^2\right) + \frac{C-Bp}{h} \operatorname{arctg} \frac{x+p}{h}.$$

Интеграл 4-го типа

Для вычисления интеграла IV-го типа сначала введем подстановку $x+p=t$ (как и в интеграле III-го типа), получим интеграл

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+2px+q)^r}dx = \int \frac{B(t-p)+C}{(t^2+h^2)^r}dt,$$

затем вынесем в знаменателе h^2 за скобки и введем еще одну переменную $z=\frac{t}{h}$, тогда $t=zh$ и $dt=hdz$, и интеграл примет вид

$$\int \frac{B(t-p)+C}{(t^2+h^2)^r}dt = \frac{1}{h^{2r}}\int \frac{B(zh-p)+C}{(z^2+1)^r}hdz = \frac{B}{h^{2r-2}}\int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} + \frac{C-Bp}{h^{2r-1}}\int \frac{dz}{(z^2+1)^r}.$$

Первый интеграл вычисляем, внося z под знак дифференциала и применяя табличный интеграл для степенной функции:

$$\int \frac{zdz}{(z^2+1)^r} = \frac{1}{2(-r+1)}\left(z^2+1\right)^{-r+1}.$$

Рассмотрим метод нахождения первообразной для второго интеграла:

$$\int \frac{dz}{(z^2+1)^r} = \int \frac{(z^2+1-z^2)dz}{(z^2+1)^r} = \int \frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}} - \int \frac{z^2dz}{(z^2+1)^r}.$$

Обозначим $I_r = \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}$, тогда

$$I_r = I_{r-1} - \int \frac{z^2dz}{(z^2+1)^r} = I_{r-1} - \frac{1}{2}\int \frac{zd(z^2+1)}{(z^2+1)^r} = I_{r-1} - \frac{1}{2}\int zd\frac{1}{(-r+1)(z^2+1)^{r-1}} =$$

Применим формулу интегрирования по частям

$$= I_{r-1} + \frac{1}{2(r-1)}\int \underbrace{z}_{u}\, d\underbrace{\frac{1}{(z^2+1)^{r-1}}}_{v} = I_{r-1} + \frac{1}{2(r-1)}\left(\frac{z}{(z^2+1)^{r-1}} - \int \frac{dz}{(z^2+1)^{r-1}}\right) =$$

$$= I_{r-1}\left(1-\frac{1}{2(r-1)}\right) + \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}}.$$

Получили рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_r = \int \frac{dz}{(z^2+1)^r}$:

$$I_r = I_{r-1}\left(1-\frac{1}{2(r-1)}\right) + \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}}.$$

Пример применения рекуррентной формулы

Применяя рекуррентную формулу $I_r = I_{r-1}\left(1 - \frac{1}{2(r-1)}\right) + \frac{z}{2(r-1)(z^2+1)^{r-1}}$, вычислим интеграл I_2.

$$I_2 = \int \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \underbrace{\int \frac{dz}{z^2+1}}_{I_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2(2-1)}\right) + \frac{z}{2(2-1)(z^2+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + \frac{z}{2(z^2+1)} + C.$$

Теперь можно найти и I_3:

$$I_3 = \int \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \underbrace{\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}}_{I_2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2(3-1)}\right) + \frac{z}{2(3-1)(z^2+1)^2} =$$

$$= \frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + \frac{z}{2(z^2+1)}\right) + \frac{z}{6(z^2+1)^2} + C.$$

Примеры нахождения первообразных

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx$.

Р е ш е н и е. Уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$ не имеет действительных корней, так как дискриминант $D = 4 - 20 = -16 < 0$.

Преобразуем подынтегральное выражение, выделив полный квадрат в знаменателе

$$\frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} = \frac{5x+3}{\left((x-1)^2-1+5\right)^2} = \frac{5x+3}{\left((x-1)^2+4\right)^2} = \frac{5x+3}{16\left(\frac{(x-1)^2}{4}+1\right)^2}$$

Введем новую переменную $z = \frac{x-1}{2}$, тогда $x = 2z+1$, $dx = 2dz$, и интеграл примет вид

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx = \int \frac{5(2z+1)+3}{16\left(z^2+1\right)^2} 2dz = \frac{5}{4} \int \frac{zdz}{\left(z^2+1\right)^2} + \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2},$$

при этом

$$\int \frac{zdz}{\left(z^2+1\right)^2} = -\frac{1}{2\left(z^2+1\right)} \text{ и } \int \frac{dz}{\left(z^2+1\right)^2} = I_2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{z}{2\left(z^2+1\right)}.$$

Таким образом

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx = -\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2\left(z^2+1\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + \frac{z}{2\left(z^2+1\right)} + C = \frac{4z-5}{8\left(z^2+1\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z + C.$$

Вернемся к исходной переменной $z = \frac{x-1}{2}$ (при этом $z^2 + 1 = \frac{x^2-2x+5}{4}$):

$$\int \frac{5x+3}{\left(x^2-2x+5\right)^2} dx = \frac{2x-7}{2\left(x^2-2x+5\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)}dx.$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью (степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе), разложим ее на элементарные дроби:

$$\frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+1}.$$

Приведем дроби правой части к общему знаменателю:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+1} =$$
$$= \frac{A(x+1)^2(x^2+1)+B(x+1)x(x^2+1)+Cx(x^2+1)+(Dx+F)x(x+1)^2}{x(x+1)^2(x^2+1)}$$

Числитель полученной дроби равен числителю исходной дроби:

$$6 - x = A(x+1)^2\left(x^2+1\right) + B\,(x+1)\,x\left(x^2+1\right) + Cx\left(x^2+1\right) + (Dx+F)\,x(x+1)^2.$$

Для нахождения чисел A, B, C, D, E, F приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях уравнения:

$$\begin{aligned} x^4:&\quad A+D=0\\ x^3:&\quad 2A+B+C+2D+F=0\\ x^2:&\quad 2A+B+D+2F=0\\ x:&\quad 2A+B+C+F=-1\\ x^0:&\quad A+B=6 \end{aligned}$$

Вычтем из второго уравнения четвертое: $2D=1 \quad\Rightarrow\quad D=\frac{1}{2}$, из первого уравнения получим $A=-\frac{1}{2}$, из последнего $B=\frac{13}{2}$.

Из третьего: $2A+B+D+2F=-1+\frac{13}{2}+\frac{1}{2}+2F=0 \quad\Rightarrow\quad F=-3.$

Из четвертого: $2A+B+C+F=-1+\frac{13}{2}+C-3=-1 \quad\Rightarrow\quad C=-\frac{7}{2}$

Итак:

$$\frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{13}{2}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x-6}{x^2+1}.$$

Интегрируя каждое слагаемое, находим интеграл

$$\int \frac{6-x}{x(x+1)^2(x^2+1)}dx = -\frac{1}{2}\ln|x| + \frac{13}{2}\ln|x+1| + \frac{7}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) - 3\,\mathrm{arctg}\,x + C$$

Укажите вид представления рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов $\frac{2x^5+3x^3+3}{(x+1)(x-1)(x^2+2)}$

- ○ $2x + A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x^2+2}$
- ○ $2 + \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$
- ○ $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$
- ◉ $2x + A + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{Dx+E}{x^2+2}$

Укажите вид представления рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов

$$\frac{x^5+11x^4-12x}{(x-3)(x^2-2x+5)}$$

- $x^2 + Ax + B + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{x^2-2x+5}$
- $x^2 + Ax + B + \frac{C}{x-3} + \frac{Dx+E}{x^2-2x+5}$
- $x + A + \frac{B}{x-3} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+5}$
- $\frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+5}$

Выберите верное представление рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов $\frac{3x^2-3x-2}{(x+1)^2(x-3)}$.

- ○ $-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-3}$
- ◉ $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x-3}$
- ○ $-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-3}$
- ○ $\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x-3}$

Выберите верное представление рациональной дроби по методу неопределенных коэффициентов $\frac{3x^2-3x+4}{(x-2)(x^2+1)}$

- $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x^2+1}$
- $\frac{2}{x-2}+\frac{x-1}{x^2+1}$
- $-\frac{2}{x-2}-\frac{x-1}{x^2+1}$
- $\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x^2+1}$