# Лекция N11

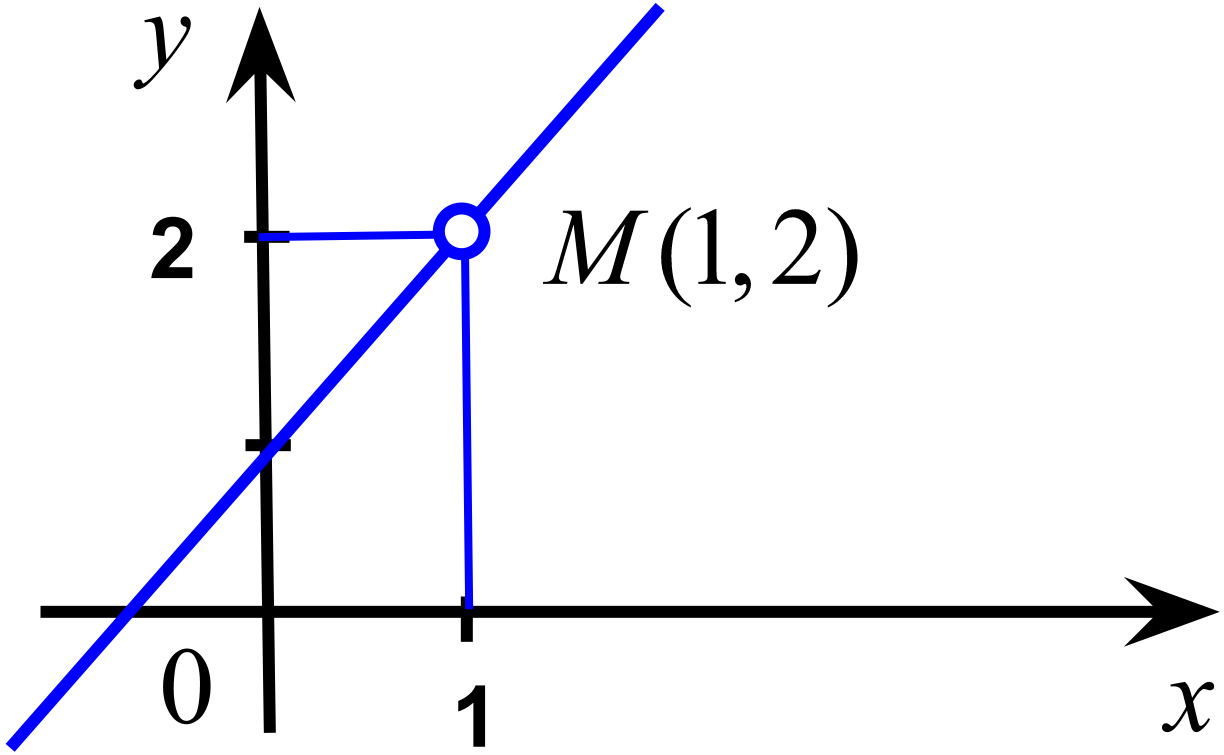
## Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна

## Тема: Функция. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Пределы на бесконечности. Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация.

## 1. Предел в точке.

**Рассмотрим пример.**
**Построить график функции**

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ \text{не сущ.}, & x = 1. \end{cases}$$




**Формула теряет смысл при** $x_0 = 1.$

**В этом случае пишут:**

$$y(x) \to 2 \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

**По-другому:**

$$\lim_{x \to 1} y(x) = 2.$$

# Способы вычисления предела

**1. Предел дроби при $x \to \infty$: деление на старшую степень.**

**<u>Пример.</u>**

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{2+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-2}{\frac{2}{x^2}+1}=-2.$$

## 2. Разложение на множители, когда $x \not\to \infty$

**Пример.**

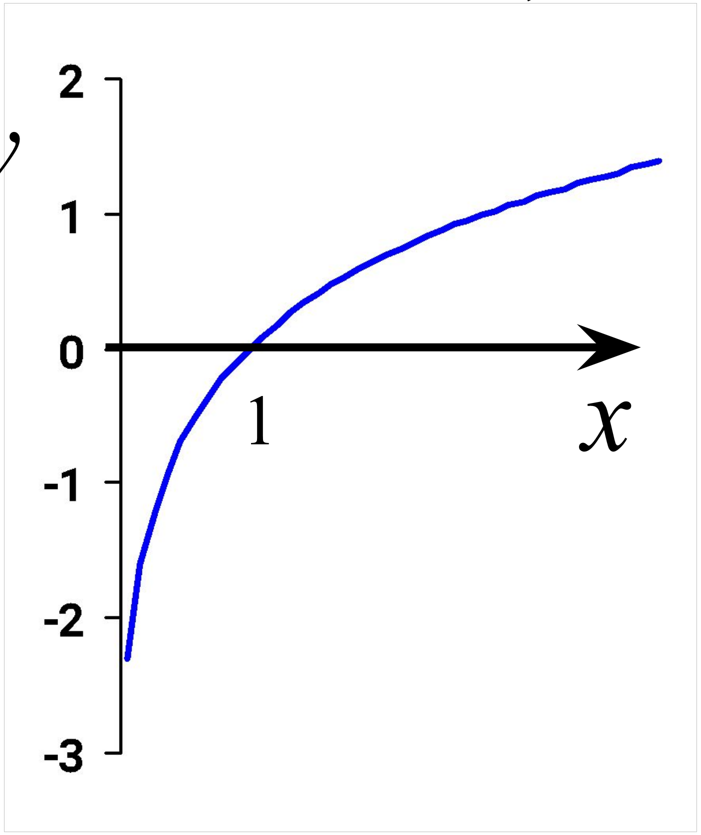
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

# Односторонние пределы

**Во многих случаях функция определена только с одной стороны от $x_0$. Тогда предел называют пределом слева, или пределом справа.**

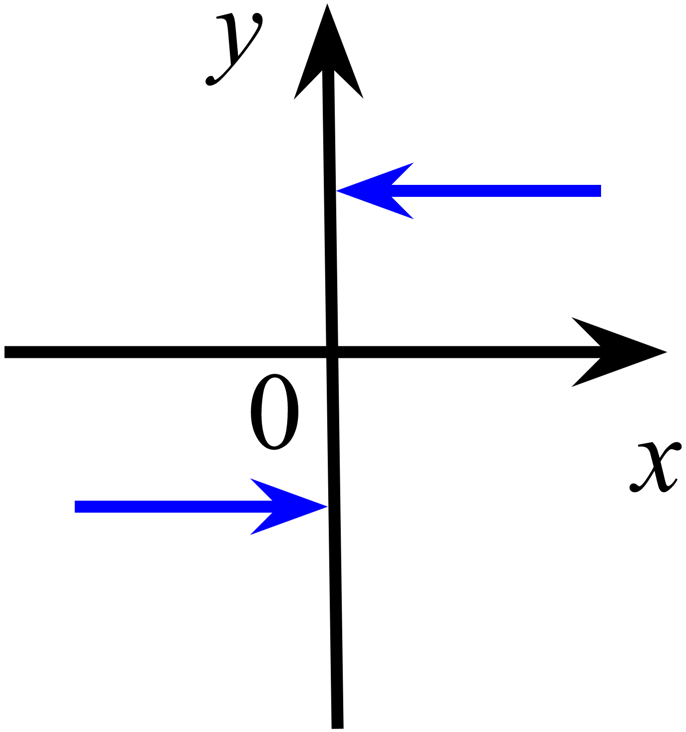
**Пример 1.**

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty.$$



## Пример 2.

$$y(x)=\operatorname{sign}x=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$




$$\lim_{x\to 0+}\operatorname{sign}x=1$$

$$\lim_{x\to 0-}\operatorname{sign}x=-1$$

**Опр.** Функция $y = y(x)$ называется **непрерывной** в точке $x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0).$$

**Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.**

**Пример.** $y = x^2, \quad y = e^x, \quad y = \sin x$

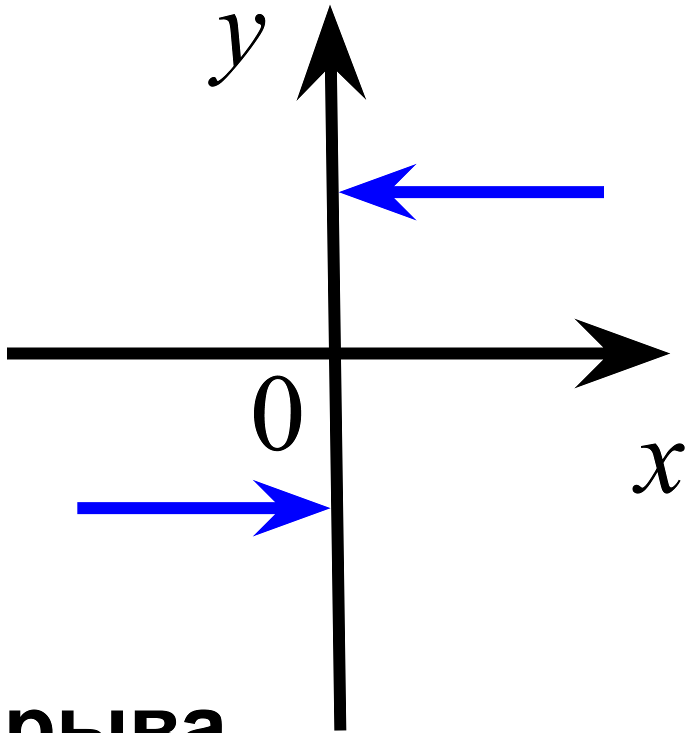
**- непрерывные функции.**

**Опр.** Если в точке $x_0$ функция не является непрерывной, то $x_0$ - **точка разрыва**.

**Рассматриваются точки разрыва 1-го и 2-ого рода.**

**Пример.**

$$y(x) = \operatorname{sign} x.$$

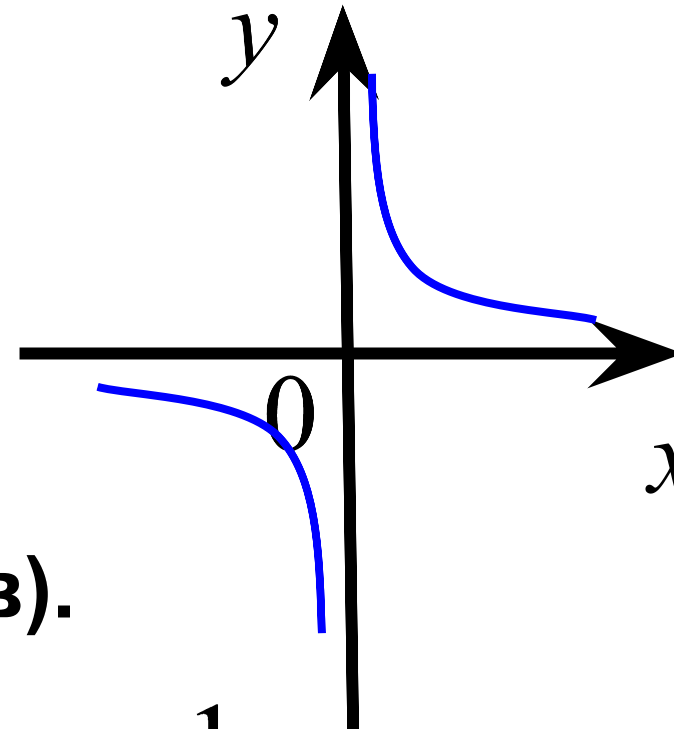



$x_0 = 0$ - точка разрыва

**1-го рода (конечный разрыв).**

**Пример.**

$$y(x) = \frac{1}{x}.$$




$x_0 = 0$ **- точка разрыва 2-ого рода (бесконечный разрыв).**

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

# Тема: Производная функции, правила вычисления.
# Производная сложной функции.
# Производные высших порядков.
# Дифференциал функции.

# Приращение аргумента и приращение функции

Пусть дана функция $y = f(x)$.
Рассмотрим два значения её аргумента: исходное $x_0$ и новое $x$.
Разность $x - x_0$ называется **приращением аргумента** $x$ в точке $x_0$ и обозначается символом $\Delta x$.

$y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ **называется** **приращением функции** **и обозначается** $\Delta y$.

**<u>Опр.</u> Производной функции в точке** $x_0$ **называется**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**<u>Пример.</u> Найти производную функции** $y = x^2$.

**Найдем** $\Delta y$:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

**Таким образом** $(x^2)' = 2x$.

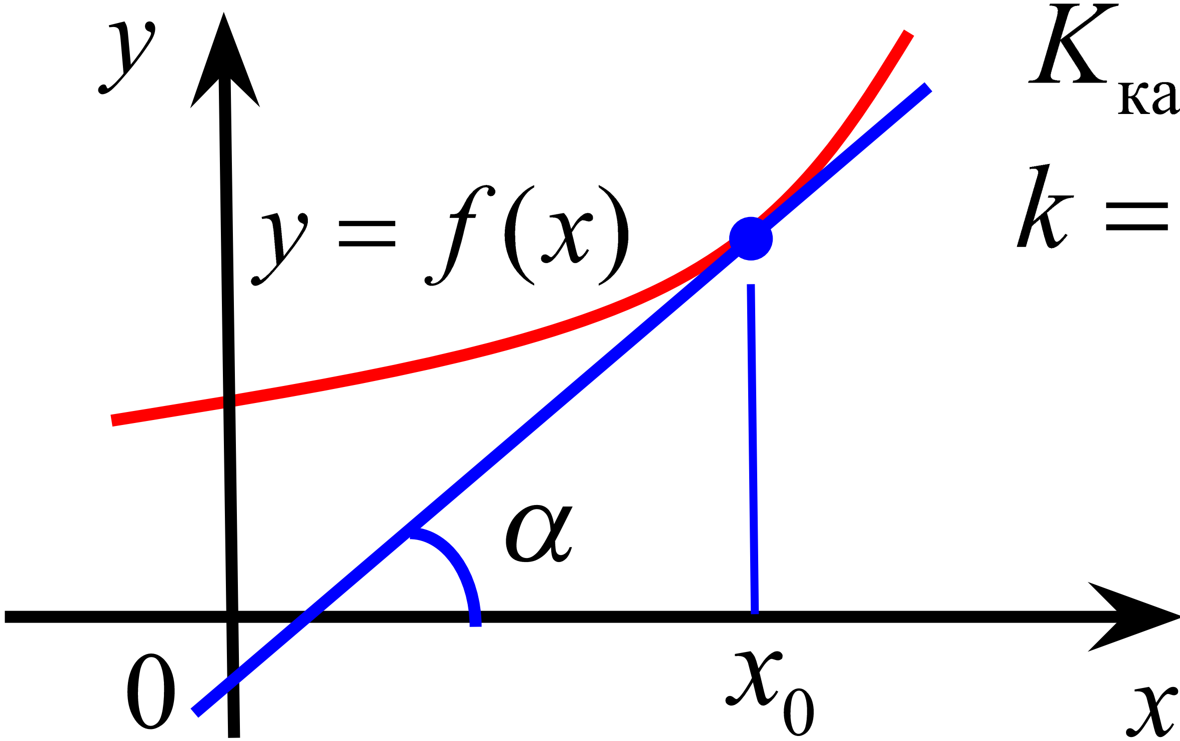
Эта производная определена на всей числовой оси, так как при её нахождении значение $x$ было выбрано произвольно.

__Опр.__ Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке $x_0$, называется **дифференцируемой в этой точке**.

Функция $y = f(x)$ называется **дифференцируемой в интервале** $(a,b)$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

# Геометрический смысл производной

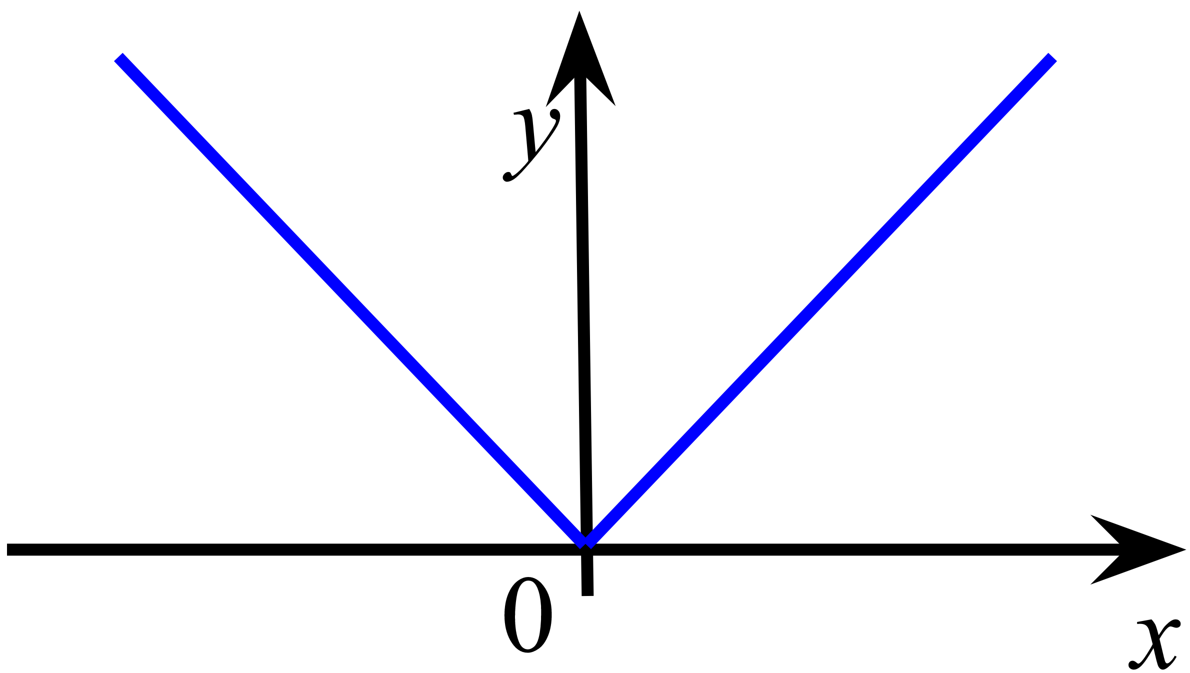
**Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой $x_0$ равен значению производной этой функции в точке $x_0$.**




$$K_{\text{кас}} = f'(x_0).$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

**Функция** $y=|x|$ **не имеет производной в точке** $x=0$, **т.к. график функции** $y=|x|$ **в точке** $O(0,0)$ **не имеет касательной.**



# Таблица производных (степени)

1. $\left(\mathrm{const}\right)' = 0.$

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}.$

3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a;\quad \left(e^{x}\right)' = e^{x}.$

4. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a};\quad \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}.$

# Таблица производных (тригонометрия)

5. $(\sin x)' = \cos x.$

6. $(\cos x)' = -\sin x.$

7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

# Таблица производных (arc-тригонометрия)

$$9. \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$10. \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$11. \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

# Основные правила дифференцирования

**Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке $x$, то в этой точке дифференцируемы и их сумма и произведение, причем**

$$(u+v)' = u' + v',$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

**Если функции** $u = u(x)$ **и** $v = v(x)$ **дифференцируемы в данной точке** $x$ **и** $v(x) \neq 0,$ **то в той же точке дифференцируемо и их частное, причем**

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

**Примеры.**

1) $y = x^2 \cdot \sin x$. **Найти** $y'$.

$$y' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' =$$

$$= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x,$$

**2)** $$y = \frac{e^x}{x}.$$ **Найти** $y'(1)$.

$$y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2};$$

$$y'(1) = \frac{e \cdot (1-1)}{1} = 0, \qquad y'(1) = 0.$$

# Производная сложной функции

**Пусть** $y = f(u)$ **и** $u = \varphi(x).$

**Тогда** $y$ **есть сложная функция** $x:$

$$y = f\left(\varphi(x)\right).$$

**<u>Теорема</u>**

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

**Примеры**

**1)** $y = \sin 2x.$

$$y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$$

**2)** $y = \cos^2 x.$

**Запишем** $y = \left(\cos x\right)^2:$

$$y' = 2\cos x \cdot \left(\cos x\right)' =$$

$$= -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x.$$

# Производные высших порядков

**Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале.**

**Тогда её производная $f'(x)$ является функцией от $x$. Пусть эта функция также имеет производную. Эта производная называется второй производной и обозначается**

$$y'' = \left(f'(x)\right)'.$$

Аналогично, $y''' = \left( y'' \right)'$ и т.д.:

$$y^{(n)} = \left( y^{(n-1)} \right)'.$$

**Производные порядка выше первого называются производными высшего порядка.**

## Примеры.

**1) Найти производную третьего порядка от функции** $y = e^{2x}$.

$$y = e^{2x};\ y' = 2e^{2x}; y'' = 4e^{2x};\ y''' = 8e^{2x}.$$

**2)** $y = \ln x$. **Найти** $y^{(3)}$.

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1};\quad y'' = -x^{-2};\quad y''' = 2x^{-3}.$$

# Дифференциал функции

**Рассмотрим функцию** $y = x^3$.
**Найдем** $\Delta y$.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$

$$= \cancel{\underline{x^3}} + 3x^2 \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 \cdot x + (\Delta x)^3 - \cancel{\underline{x^3}} =$$

$$= 3x^2 \cdot \Delta x + (3x + \Delta x) \cdot (\Delta x)^2.$$

**Приращение функции можно рассматривать как сумму двух слагаемых:**

$3x^2\Delta x$ **- линейное относительно** $\Delta x$;

$(3x+\Delta x)\cdot(\Delta x)^2$ **- нелинейное относительно** $\Delta x$.

**При $\Delta x \to 0$ оба слагаемых стремятся к нулю, но второе слагаемое быстрее стремится к нулю. Поэтому при малых $\Delta x$ считают, что $\Delta y \approx 3x^2 \Delta x$ (т.е. считают, что $\Delta y$ приближенно равно линейной части). Эту часть называют главной частью приращения функции или дифференциалом.**

**Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначают $dy$.**

**Теорема.** **Если функция** $y = f(x)$ **имеет в точке** $x$ **дифференциал, то она имеет в этой точке производную и наоборот, если функция** $y = f(x)$ **имеет в точке** $x$ **производную, то она имеет в этой точке дифференциал.**

**Выражение для дифференциала записывается в форме**

$$dy = f'(x)\,dx.$$

## Примеры.

**Найти дифференциалы функций**

**1)** $y = \sin x. \quad dy = \cos x \, dx.$

**2)** $y = e^{3x}.$

$$dy = \left(e^{3x}\right)' dx \Rightarrow dy = 3e^{3x} \, dx.$$

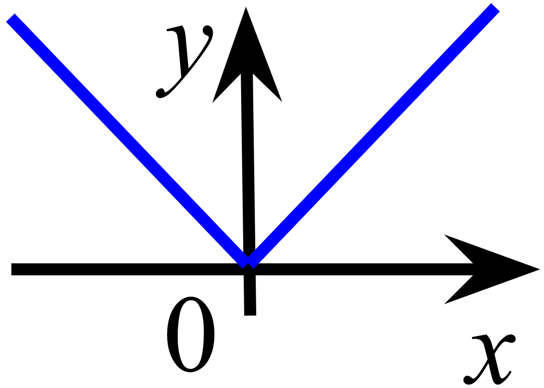
# Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

**Теорема.** Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, то она в этой точке непрерывна.

Обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми.

**Пример.**

$$y = |x|.$$




**В точке** $x = 0$ **функция** $f(x) = |x|$ **непрерывна, так как**

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x|.$$

**Справа от нуля** $|x| = x,$ **поэтому**

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

**Слева от нуля** $|x| = -x,$ **поэтому**

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ справа и слева имеет различные пределы, а это значит, что при $\Delta x \to 0$ это отношение предела не имеет, т.е. производная $f'(x)$ в точке $x = 0$ не существует.