Лекция 2.
Предел функции. Непрерывность.

План лекции:

1. Предел функции. Теоремы о пределах функции.
2. Замечательные пределы. Раскрытие неопределенностей.
3. Непрерывность функции.
4. Классификация точек разрыва.

1. Предел функции. Теоремы о пределах функции.

Опр. 1. Число А называется пределом функции f(x) в точке x=a, если для каждого положительного наперед заданного сколь угодно малого числа ε >0 найдется такое положительное число $\delta > 0$, что для всех *x*, отличных от *a* и удовлетворяющих неравенству $|x-a|<\varepsilon$ выполняется неравенство: $|f(x)-A|<\delta$.

Число δ зависит от ε, при уменьшении ε уменьшается δ и

.

Если А – это предел f(x) в точке $x=a$, то обозначают

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Пример 1.

- а) Вычислите предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x}{6x+1}=\frac{2^2-4\cdot 2}{6\cdot 2+1}=\frac{-4}{13}=-\frac{4}{13}$$

- б) Вычислите следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{\cos 3x}=\frac{2\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

Бесконечно большие величины. Ограниченные функции. Бесконечно малые величины и их свойства.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$$

- бесконечно большая величина

Переменная величина х называется бесконечно большой, если в процессе изменения ее абсолютная величина $|x|$ становится и остается больше любого наперед заданного как угодно большого положительного числа $N>0$: $|x|>N$

Переменная х называется бесконечно малой, если в процессе изменения ее абсолютная величина $|x|$ становится и остается меньше наперед заданного как угодно малого положительного числа ε, т.е. начиная с некоторого момента выполняется неравенство $|x|<\varepsilon$.

$$\lim_{y\to\infty}\frac{1}{y}=0$$

- бесконечно малая величина

Основные теоремы о бесконечно малых.

- 1. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых есть также величина бесконечно малая.
- 2. Произведение бесконечно малой на величину ограниченную есть также величина бесконечно малая.

- Следствие 1: Произведение бесконечно малой на величину постоянную, есть бесконечно малая.
- Следствие 2: Произведение конечного числа бесконечно малых величин есть бесконечно малая величина.
- Следствие 3: Частное от деления бесконечно малой величины на величину имеющую предел, отличный от нуля, есть также бесконечно малая величина.

Теоремы о пределах.

- Теорема 1. Предел алгебраической суммы конечного числа слагаемых равен сумме пределов этих слагаемых.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x).$$

- Теорема 2. Предел произведения любого конечного количества сомножителей равен произведению их пределов.

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to a}f(x)\cdot\lim_{x\to a}g(x).$$

Теорема 3. Предел частного двух переменных равен частному их пределов, если только предел знаменателя отличен от нуля.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}Cf(x)=C\lim_{x\to a}f(x)$$

Следствие 2. Предел степени переменной равен той же степени предела переменной:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

Замечательные пределы

Теорема 4. Предел отношения синуса бесконечно малой дуги к самой дуге, выраженной в радианах, равен 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Этот предел называется ***1-ым замечательным пределом***.

- Теорема 5. Последова-тельность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ при $n\to\infty$

имеет предел, заклю-ченный между числами 2 и 3:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,$$

где *e* = 2,71828…

Этот предел называется ***2-ым замечательным***

Раскрытие неопределенносте й

Существуют неопределенности следующих видов:

1) $\left[\frac{0}{0}\right]$, 2) $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, 3) $\left[1^{\infty}\right]$,

4) $[0 \cdot \infty]$, 5) $[\infty - \infty]$.

Неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$

1) 1 правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) 1 замечательный предел (формулу см. ранее).

Неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

1) 2 правило Лопиталя (также применяется производная).
2) Вынесение переменной в наибольшей степени вместе с коэффициентом и из числителя и из знаменателя

(применяется только при условиях: а) числитель и знаменатель представляют собой целую рациональную функцию; б) переменная стремится ∞

Пример 2.

- а) Вычислите предел:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{6x-6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{6-0}=\frac{2-1}{6}=\frac{1}{6}$$

- б) Вычислите следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 5x}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$$

Пример 3.

- а) Вычислите предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x}{6x+3x^4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{3x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x^2}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

- б) Вычислите следующий предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{7\ln 3x}{\frac{2}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{7}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{3x}}{-\frac{1}{x*x}}=-\lim_{x\to 0}x=0$$

Неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$

Метод решения: используется 2-ой замечательный предел (формулу см. ранее).

3. Непрерывность функции.

- Определение 7. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

Определение 8. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если:

- Эта функция определена при $x=x_0$.
- Предел функции в точке $x=x_0$ равен значению функции в точке x_0.

Определение 9. Функция $y=f(x)$ называется непрерывной на отрезке [а; в], если эта функция непрерывна в каждой точке этого отрезка.

4. Классификация точек разрыва.

- Разрыв в точке $x=x_0$ имеет место, если нарушено хотя бы одно из трех условий непрерывности функции:

1) В точке $x=x_0$ функция $f(x)$ не имеет конечного предела;
2) Функция не существует в x_0;
3) Предел функции в точке существует, но не совпадает с ее значением в этой точке, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

- Различают три вида точек разрыва:

1) Точки разрыва I рода. Если в точке x=a левосторонний и правосторонний пределы существуют, но не равны между собой, то точка a называется точкой разрыва I рода.

- 2) Точки разрыва второго рода. Если в точке x=a не существуют левосторонний или правосторонний пределы или оба одновременно, то точка а называется точкой разрыва II рода.

- 3) Устранимые точки разрыва. Если в точке x=a функция *f (x)* имеет левосторонний и правосторонний пределы и эти пределы равны между собой, но их значения не совпадают со значением функции в точке а, то точка а называется точкой ”устранимого разрыва”.