

# ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ (ЗБЧ)

**ЗБЧ** – это совокупность теорем и связанных с ними неравенств, дающих ответ на следующие важные вопросы:

- каким должно быть число испытаний для обеспечения заданной точности;
- каковы границы возможного разброса значений СВ при заданном числе испытаний и заданной надежности;
- с какой вероятностью (надежностью) можно доверять результатам, полученным при известном числе испытаний и заданной

– величине разброса СВ?

Суть ЗБЧ заключается в следующем: при большом числе СВ  $X_i$  с вероятностью, близкой к 1, можно утверждать, что абсолютная величина разности между средней арифметической этих СВ и константой – средней арифметической их математических ожиданий  $M(X_i)$  сколь угодно мала.

Отсюда следует, что **при большом числе испытаний с большой вероятностью средние характеристики СВ стремятся к постоянным неслучайным величинам.**

**Смысл ЗБЧ** в том, что разброс в воздействии отдельного явления мало сказывается на среднем результате большого числа явлений.

**ЗБЧ** является теоретической основой выборочного метода.

**Определение 1.** Последовательность СВ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  называется **сходящейся по вероятности** при  $n \rightarrow \infty$  к СВ  $X$ , если для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P ( | X_n - X | < \varepsilon ) = 1$$

**ЗБЧ** включает:

- 1) Неравенство Чебышёва;
- 2) Лемму Маркова;
- 3) Обобщенную теорему Чебышёва;
- 4) Следствия из обобщенной теоремы Чебышёва:
  - а) Теорему Бернулли;
  - б) Теорему Пуассона;
- 5) Закон больших чисел ( теорему Чебышёва).

## **Неравенство Чебышёва**

С вероятностью, большей, чем  $1 - \frac{D(X)}{\alpha^2}$ , можно

утверждать, что при достаточно большом числе

испытаний абсолютная величина отклонения СВ  $X$  от ее математического ожидания не превзойдет положительного числа  $\alpha > 0$ , т.е.

$$P(|X - M(X)| \leq \alpha) > 1 - \frac{D(X)}{\alpha^2}$$

Здесь  $D(X)$  – дисперсия СВ  $X$ .

**Задача.** Завод изготавливает 90% изделий высокого качества. Оценить вероятность того, что среди 4000 изделий число изделий высокого качества окажется не менее 3550 и не более 3650.

Дано:

$$p = 0,9$$

$$q = 0,1$$

$$n = 4000$$

$$M(X) - \alpha = 3550$$

$$M(X) + \alpha = 3650$$

$$P = ?$$

$$D(X) = npq = 4000 * 0.9 * 0.1 = 360$$

$$\begin{aligned} 2\alpha &= M(X) + \alpha - (M(X) - \alpha) = \\ &= 3650 - 3550 = 100 \end{aligned}$$

$$\alpha = 50$$

$$P(|X - M(X)| \leq \alpha) > 1 - \frac{D(X)}{\alpha^2}$$

$$P(3550 \leq X \leq 3650) > 1 - \frac{360}{2500}$$

$$= 0,856$$

## Лемма Маркова

Пусть СВ  $X$  принимает положительные значения.

**Лемма Маркова.** С вероятностью, большей чем  $1 - \frac{1}{t^2}$ , можно утверждать, что при достаточно большом числе независимых испытаний СВ  $X$  не превзойдет  $t^2$  – кратного математического ожидания, то есть:

$$P ( X \leq t^2 M(X) ) > 1 - \frac{1}{t^2}$$

Если обозначить  $a = t^2 M(X)$ , то  $\frac{1}{t^2} = \frac{M(X)}{a}$ , тогда

$$P(X \leq a) > 1 - \frac{M(X)}{a}$$

**Задача.** Вероятность попадания в цель равна 0.4. Оценить вероятность того, что при 120 выстрелах число попаданий не превысит 90.

Дано:

$$p = 0.4$$

$$n = 120$$

$$a = 90$$

$$M(X) = np = 120 * 0,4 = 48$$

$$P(X \leq 90) > 1 - \frac{48}{90} = 0,4667$$

$$P(X \leq 90) > ?$$



# Обобщенная теорема Чебышёва

**Теорема.** Если дисперсии независимых СВ  $X_i$  ограничены сверху числом  $C = \text{const}$ , то среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т. е. для любого сколь угодно малого наперед заданного числа  $\varepsilon > 0$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| \leq \varepsilon \right) = 1$$

Здесь  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  - среднее арифметическое СВ  $X_i$ , а

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)$  - среднее арифметическое их

математических ожиданий. Если  $n$  – число СВ, а их дисперсии

$$D(X_i) \leq C,$$

то **оценочное неравенство** обобщенной теоремы Чебышёва имеет вид:

$$P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i) \right| \leq \varepsilon \right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

**Задача.** Для определения среднего размера проверено 2000 деталей. Известно, что дисперсии

всех размеров деталей  $\leq 9$ . Оценить вероятность того, что средний размер деталей проверенной партии отличается от среднего размера всех деталей не более, чем на 0,3.

Дано:

$$n = 2000$$

$$D(X_i) \leq 9$$

$$\varepsilon = 0,3$$

$$C = 9$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(X_i)\right| \leq 0,3\right) > 1 -$$

$$P > ?$$

$$-\frac{9}{2000 * 0,09} = 0,95$$

# Следствия из обобщенной теоремы Чебышёва

## а) Теорема Бернулли

**Теорема.** При бесконечно большом числе независимых испытаний с одинаковой вероятностью  $p$  наступления события  $A$  в каждом испытании относительная частота  $\frac{m}{n}$  наступлений события  $A$  сходится по вероятности к вероятности  $p$  этого события, т. е. для любого, сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left( \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) = 1$$

Если  $n$  – число независимых испытаний, а  $p$  – вероятность события  $A$  в каждом испытании, то **оценочное неравенство теоремы Бернулли:**

$$P\left( \left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon \right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

**Задача.** Проверено 10000 деталей. Вероятность обнаружения годной детали 0,75. Оценить вероятность того, что фактическая частота появления годной детали отклонится от наиболее вероятной частоты не более, чем на 100 единиц.

Дано:

$$n = 10000$$

$$p = 0,75$$

$$q = 0,25$$

$$|m - m_0| \leq 100$$

$$\left| \frac{m}{n} - \frac{m_0}{n} \right| \leq \frac{100}{n}$$

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \frac{100}{10000}$$

$$P(|m - m_0| \leq 100) > ?$$

$$\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq 0,01 \implies \varepsilon = 0,01$$

$$P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,75 * 0,25}{10000 * 0,0001} =$$

$$= 1 - \frac{3}{16} = 0,813$$

$$\implies P > 0,813$$

## б) Теорема Пуассона

При неограниченном увеличении числа независимых испытаний с вероятностью  $p_i$  появления события  $A$  в  $i$ -м испытании ( $i = \overline{1; n}$ ) относительная частота  $\frac{m}{n}$  события  $A$  сходится по вероятности к  $\overline{p}$  - среднему взвешенному вероятностей

$$\overline{p} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left( \left| \frac{m}{n} - \overline{p} \right| \leq \varepsilon \right) = 1$$

**Оценочное неравенство** теоремы Пуассона:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \bar{p}\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{\overline{pq}}{n\varepsilon^2},$$

где  $\overline{pq} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i q_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$  - среднее взвешенное дисперсий

**Задача.** К контролеру поступило 100 деталей из 1-го цеха и 200 деталей из 2-го цеха. Вероятность того, что деталь 1-го цеха стандартна, равна 0,9, а



2-го – 0,8. Оценить вероятность того, что относительная частота бракованной детали отличается от средней вероятности бракованной детали по абсолютной величине не более, чем на 0,1.

Дано:

$$m_1 = 100$$

$$p_1 = 0,9; q_1 = 0,1$$

$$m_2 = 200$$

$$p_2 = 0,8; q_2 = 0,2$$

$$n = 300; \varepsilon = 0,1$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \bar{p}\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{\overline{pq}}{n\varepsilon^2}$$

$$\overline{pq} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i q_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{100 * 0,9 * 0,1 + 200 * 0,8 * 0,2}{300} = 0,13667$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \bar{p}\right| \leq 0,1\right) > 1 - \frac{0,13667}{300 * 0,01}$$

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \bar{p}\right| \leq 0,1\right) > ?$$

$$P > 0,9544$$

## Закон больших чисел

**Теорема.** При неограниченном увеличении числа независимых испытаний  $n$  над СВ  $X$ , имеющей конечную дисперсию, среднее арифметическое наблюдаемых значений этой СВ сходится по вероятности к ее математическому ожиданию, т.е.:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left( \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - M(X) \right| \leq \varepsilon \right) = 1$$

**Оценочное неравенство** закона больших чисел:

Если  $D(X) \leq C$ , то

$$P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i - M(X)\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

**Задача.** Для определения среднего спроса на шоколад было обследовано 200 торговых точек. Оценить вероятность того, что средний спрос на шоколад отклонится от его математического ожидания по абсолютной величине не более, чем на 0,5 кг, если среднее квадратическое отклонение не превосходит 2.

Дано:

$$n = 200$$

$$\varepsilon = 0,5$$

$$\sigma \leq 2$$

$$D = \sigma^2 \leq 4 \implies C = 4$$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - M(X)\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$$

$P > ?$

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - M(X)\right| \leq \varepsilon\right) > 1 - \frac{4}{200 * 0,5^2}$$

$$P > 0,92$$