ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Закон нормального распределения (ЗНР)

Определение. Нормальным называется распределение НСВ, плотность распределения вероятностей которой задается функцией

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}} \qquad x \in R$$

ЗНР имеет два параметра: матем. ожидание **а** и среднее квадратическое отклонение **σ.** Иными словами:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = a;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - a^2 = \sigma^2.$$

Интегральная функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Графиком дифференциальной функции нормального распределения **f(x)** является **нормальная кривая** или кривая **Гаусса.**

Свойства функции f(x)

$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

1. x € (-∞;∞);
2. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$; $\Longrightarrow$ ось Ox – горизонтальная асимптота
3. $y' = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$; $y' = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = a$

$y' > 0$ max $y' < 0$

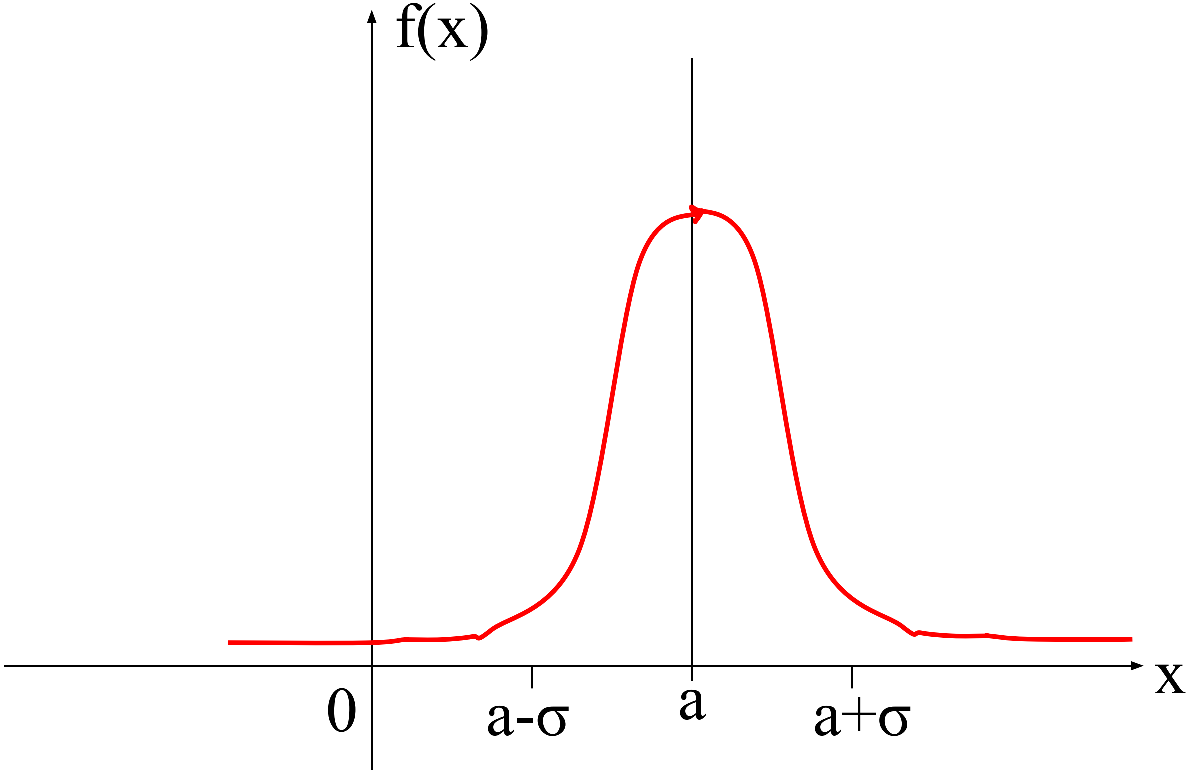
a x

$$y_{max} = f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

4. График **y = f(x)** симметричен относительно прямой **x = a.**

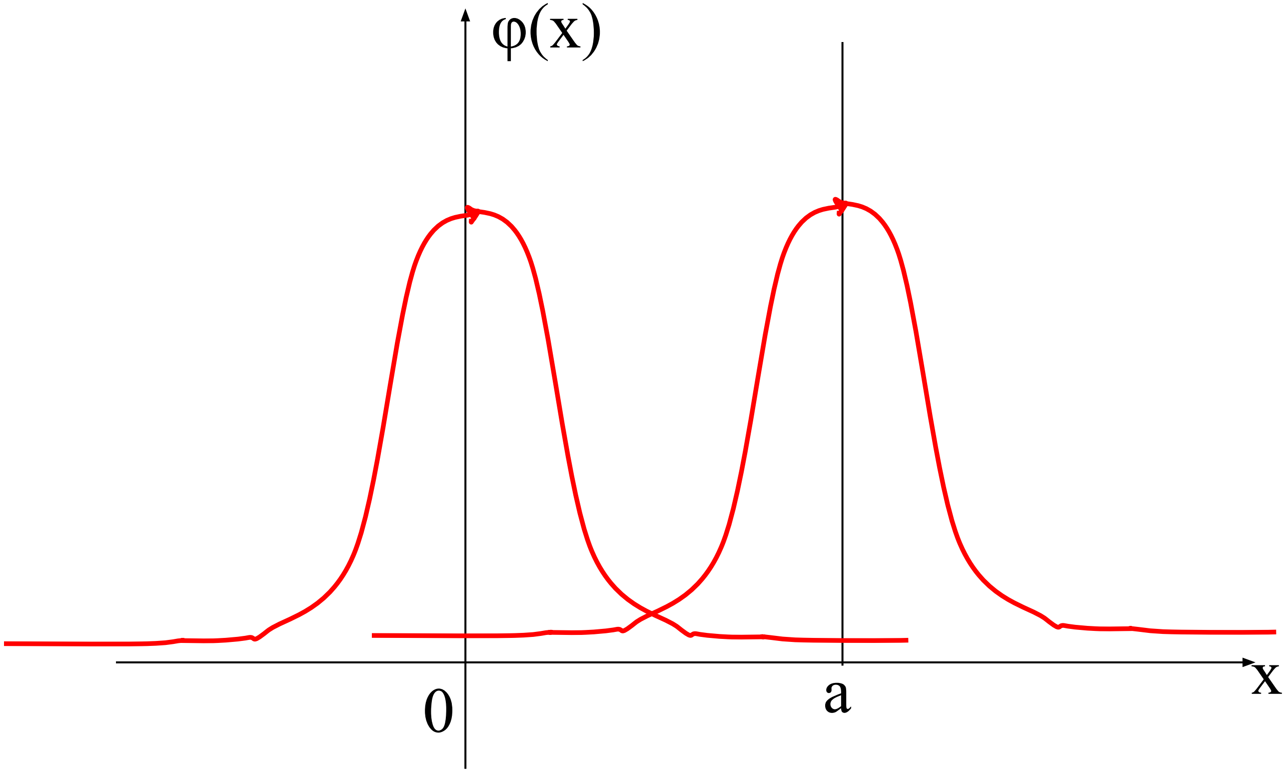
5. Точки $x = a \pm \sigma$ – абсциссы точек перегиба графика $f(x)$

$$y_{перег.} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}$$



При a = 0, σ = 1 кривую нормального распределения называют **нормированной** кривой и

$$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Теоремы о нормально распределенной НСВ

Теорема 1. Вероятность того, что нормально распределенная НСВ **X** примет значения из интервала (c;d), равна:

$$\boxed{P(\, c \le X \le d\,) = \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{c-a}{\sigma}\right)\right)}$$

Теорема 2. Вероятность того, что абсолютная величина отклонения НСВ **X** от ее матем. ожидания не превзойдет **α** (α > 0), равна:

$$\boxed{P(\,|X - M(X)| < \alpha\,) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right)}$$

Следствие из теоремы 2 (правило трех сигм). Если НСВ **X** распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения:

$$\mathbf{P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sigma\right) = \Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = \Phi(3) = 0.9973 \approx 1}$$

или

$$\boxed{\mathbf{P\left(\left|X - M(X)\right| < 3\sigma\right) \approx 1.}}$$

Пример. НСВ **X,** подчиненная ЗНР, имеет матем. ожидание, равное 100 м , и среднее квадратическое отклонение 5 м. С вероятностью 0.9973 определить границы распределения СВ **X.**

Дано:

$a = 100,\ \sigma = 5$

$P = 0{,}9973$

$c \le X \le d$

$c,\ d$ - ?

По теореме 2:

$$\mathbf{P(|X - M(X)| < \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = 0.9973}$$

$$\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) = \Phi(3) \Longrightarrow \frac{\alpha}{\sigma} = 3$$

Отсюда $\alpha = 3\sigma = 3 * 5 = 15.$

Так как $|X - a| \le \alpha$, то

$$|X - 100| \le 15 \quad \text{или} \quad -15 \le X - 100 \le 15,$$

$$100 - 15 \le X \le 100 + 15; \qquad 85 \le X \le 115.$$

Нормальное распределение СВ возникает в тех случаях, когда:

(*Из пункта ведётся стрельба из орудия вдоль прямой. Предполагается, что дальность полёта распределена нормально с математическим ожиданием 1000 м и средним квадратическим отклонением 5 м. Определить (в процентах) сколько снарядов упадёт с перелётом от 5 до 70м *)

```
Clear[a1, b1, a, b, s, x]
s = 5
a = 1000
a1 = 1005
b1 = 1070
p = (1/(Sqrt[2*Pi]*s))*Exp[-(x - a)^2/(2*s^2)]
NIntegrate[p, {x, a1, b1}]
```

```
(* Диаметр подшипников, изготовленные на заводе, представляет собой случайную величину, распределенную нормально с математическим ожиданием 1,5 см и средним квадратическим отклонением 0,04 см. Найти вероятность того, что размер наугад взятого подшипника колеблется от 1,4 до 1,6 см. *)
Clear[a1, b1, a, b, s, x]
s = 0.04
a = 1.5
a1 = 1.4
b1 = 1.6
p = (1/(Sqrt[2*Pi]*s))*Exp[-(x - a)^2/(2*s^2)]
NIntegrate[p, {x, a1, b1}]
```

1) варьирование СВ обусловлено воздействием большого числа факторов;

2) эти факторы независимы и заданы произвольными распределениями;

3) отсутствует доминирующий фактор, т.е. ни один фактор по своему воздействию на СВ не преобладает над остальными.

Центральная предельная теорема Ляпунова

Теорема. При выполнении общих условий, таких как:

$$\mathbf{|\, X_j - M(X) \,| < \delta,}$$

$$\mathbf{D(X_j) \le C\ ,\ \ C = const,\quad (j = \overline{1, N}\ )}$$

сумма N независимых СВ, заданных произвольными распределениями, по мере возрастания числа N стремится к нормальному.

Биномиальное распределение

Если дискретная СВ **X** – число наступлений события А в **n** независимых испытаниях, проводимых в одинаковых условиях с одной и той же вероятностью события А в каждом испытании, то эта СВ **X** распределена по биномиальному закону.

СВ **X** , распределенная по биномиальному закону, принимает значения 0,1, 2, 3, …, n с вероятностями

$$P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

Матем. ожидание этой СВ:

$$\boxed{\mathbf{M(X) = np}}$$

Дисперсия:

$$\boxed{\mathbf{D(X) = npq}}$$

Распределение Пуассона

ДСВ **X** распределена по закону Пуассона, если она принимает счетное множество значений: 0, 1, 2,…, n, ... с вероятностями:

$$P_m = a^m * \frac{e^{-a}}{m!}$$

Если СВ **X** – число наступлений события А с вероятностью **p** $\longrightarrow$ **0** в **n** испытаниях, когда число испытаний **n** велико, т.е. **n** $\longrightarrow \infty$, то биномиальное распределение стремится к распределению Пуассона с параметром а, где

$$\mathbf{a = np = const}$$

Так как число испытаний велико, а вероятность события А очень мала, близка к нулю, то иногда закон Пуассона называют **законом редких явлений.**

Распределение Пуассона применяется, когда **n** порядка нескольких сотен и больше, а **$1 \le np \le 10$.**

Задача. Вероятность того, что студент женится на первом курсе, равна 0.002. Найти вероятность того что из 500 студентов на первом курсе женятся 6 студентов.

Дано:

$n = 500$

$p = 0,002$

$m = 6$

$P_m = ?$

$$a = np = 500 * 0,002 = 1$$

$$\mathbf{P_m} = a^m * \frac{e^{-a}}{m!} = 1^6 * \frac{e^{-1}}{6!} = \frac{1}{720e} = 0,00051$$

Если СВ **X** распределена по закону Пуассона, то

$$\mathbf{M(X) = D(X) = np = a}$$

Простейший поток событий

Определение. Последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени, называется потоком событий.

Определение. Поток событий называется **простейшим,** если он обладает свойствами **стационарности, отсутствия последействия и ординарности.**

1. Свойство **стационарности** означает, что вероятность появления **k** событий за проме-

жуток времени **Δt** зависит только от числа **k** и от промежутка **Δt**, и не зависит от момента **t** начала этого промежутка.

2. Свойство отсутствия последействия означает, что вероятность появления **k** событий за промежуток времени **$(t, t+\Delta t)$ не** зависит от того, сколько событий произошло до момента **t.**

3. Свойство **ординарности** означает, что за малый промежуток времени практически невозможно появление двух или более событий в потоке.

Определение. Среднее число появлений событий за промежуток времени называется **интенсивно-**

стью потока и обозначается **λ.**

Тогда $\frac{1}{\lambda}$ - средний промежуток времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке.

СВ **X** – число появлений событий в простейшем потоке за промежуток времени **t** имеет распределение Пуассона с параметром

$$\boxed{\mathbf{a = \lambda t}}$$

Условие возникновения простейшего потока (Хинчин):

Сумма большого числа независимых стационарных потоков, каждый из которых мало влияет на сумму, образует поток, близкий к простейшему.

Задача. Интенсивность звонков на станцию скорой помощи – 2 звонка в минуту. Найти вероятность того, что за 3 минуты:

а) будет 5 звонков; б) ни одного звонка; в) хотя бы один звонок.

Дано:

$\lambda = 2$,

$t = 3$,

а) $m_1 = 5$,

а) $m_1 = 5$,

а) $m_1 = 5$,

$P = ?$

Решение:

$a = \lambda t = 2 \cdot 3 = 6.$

а) а) $m_1 = 5$,

а) $m_1 = 5$,

а) $m_1 = 5$,

$=0,9975.$

Равномерное распределение

Определение. НСВ **X** имеет **равномерное** распределение на отрезке **[**a; b**]**, если ее плотность распределения

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in [a;b], \text{ где } C = const \\ 0 & \text{при } x \notin [a;b]. \end{cases}$$

По свойству плотности распределения f (x):

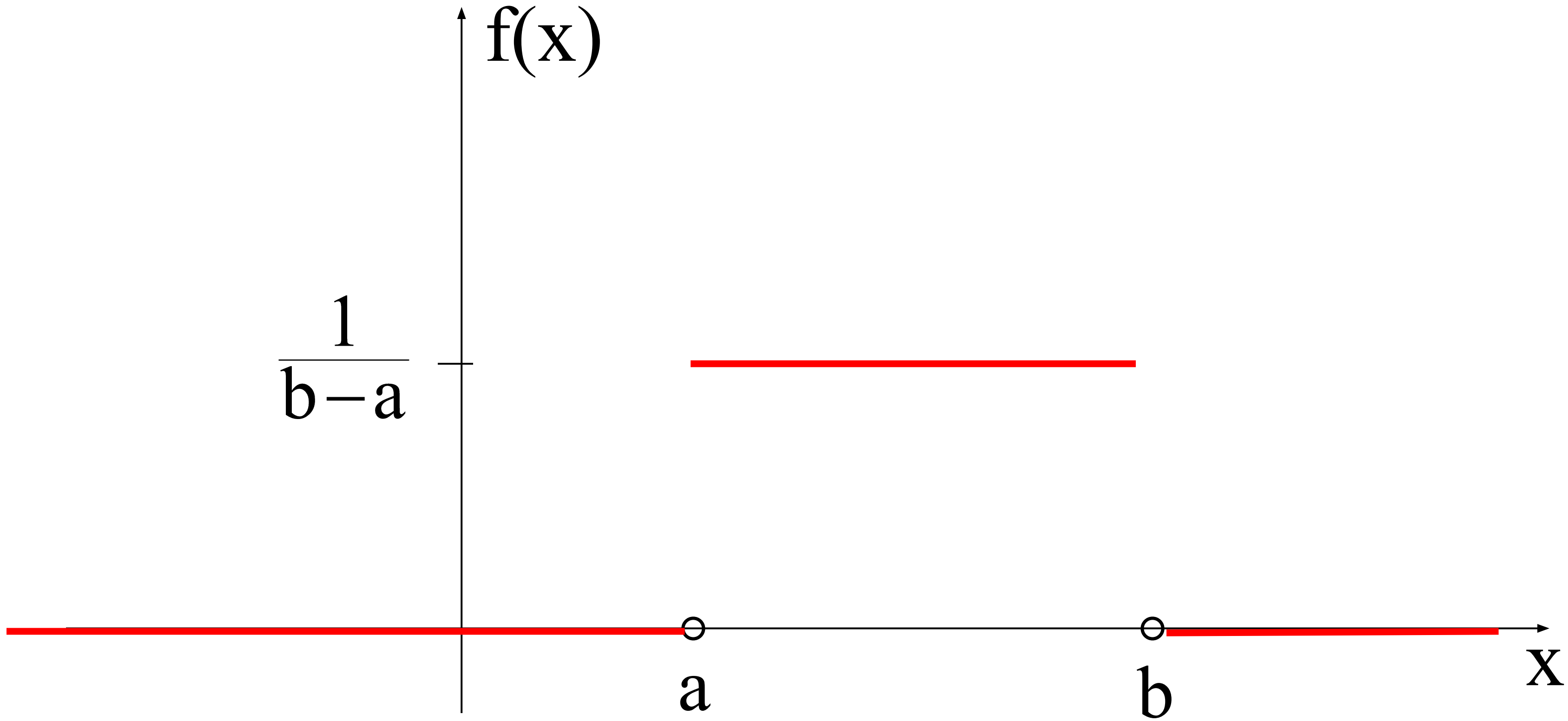
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{\mathbf{b}} f(x)dx + \int_{\mathbf{b}}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_{a}^{b} Cdx + \int_{b}^{\infty} 0dx = 0 + Cx\Big|_{a}^{b} + 0 = C(b-a) = 1.$$

Отсюда

$$\boxed{C = \frac{1}{b-a}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad x \in [a; b], \\ 0 & \text{при} \quad x \notin [a; b]. \end{cases}$$



$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Если x < a, то $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

Если $a < x < b$, то

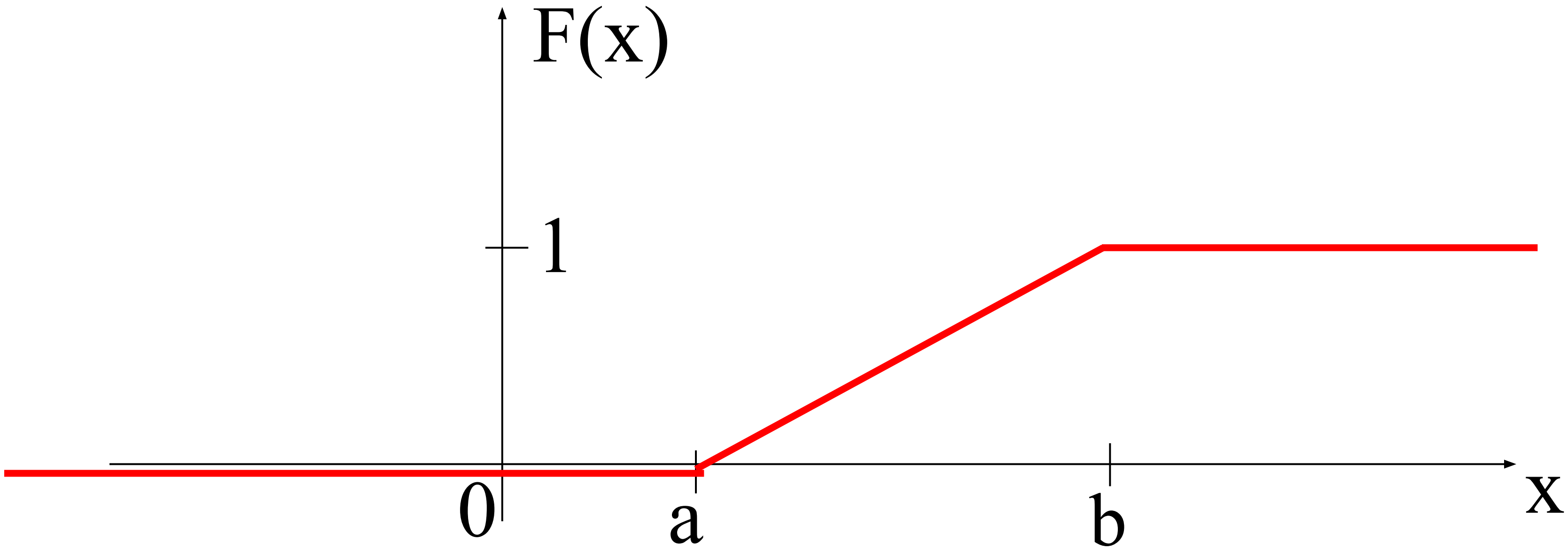
$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} f(x)dx+\int_{a}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=0+\frac{1}{b-a}x\Big|_{a}^{x}=$$

$$=\frac{x-a}{b-a}$$

Если $x > b$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{a} 0dx+\int_{a}^{b}\frac{1}{b-a}dx+\int_{b}^{\infty} 0dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{b}=\frac{b-a}{b-a}=1$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a \le x \le b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$



$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx - (M(X))^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Теорема. Вероятность того, что СВ **X**, равномерно распределенная на отрезке [a;b], примет значения, не меньшие **α**, но не большие **β** (причем **[**α;β**] €** [a;b**]**), равна:

$$P(\alpha \leq \mathbf{X} \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$$

Равномерное распределение имеет СВ **X**:

- показание прибора, имеющего шкалу;
- время ожидания пассажиром автобуса с точным интервалом движения и т. п.

Задача. Реклама на канале TV появляется через каждые 15 минут и продолжается в течение 2 мин. Найти вероятность того, что телезритель, включив в некоторый момент TV, будет смотреть любимый сериал без перерыва на рекламу а) не менее 8, но не более 13 минут; б) не более 3 минут.

Дано:

$a = 0$

$b = 13$

а) $P(8 \leq \mathbf{X} \leq 13) = ?$

б) $P(0 \leq \mathbf{X} \leq 3) = ?$

СВ **X** – время без рекламы

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{13}$$

$$P(8 \leq \mathbf{X} \leq 13) = \frac{\beta - \alpha}{b-a} = \frac{13-8}{13-0} = \frac{5}{13}$$

$$P(0 \leq \mathbf{X} \leq 3) = \frac{3-0}{13-0} = \frac{3}{13}$$

Задача. Цена деления шкалы прибора равна 0,1. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Найти вероятность того, что при снятии показания прибора будет допущена ошибка измерения, не превышающая 0,02.

Дано:

$a = 0$

$b = 0{,}1$

$\alpha = 0$

$\beta = 0{,}02$

$P(A)=?$

СВ **X** – истинное показание прибора

$A = \{\text{ ошибка} \le 0{,}02 \}$

$$f(x) = \frac{1}{0{,}1-0} = 10$$

$$P(A) = P(0 \le X \le 0{,}02) + P(0{,}08 \le X \le 0{,}1) =$$

$$= \frac{0{,}02-0}{0{,}1-0} + \frac{0{,}1-0{,}08}{0{,}1-0} = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$$

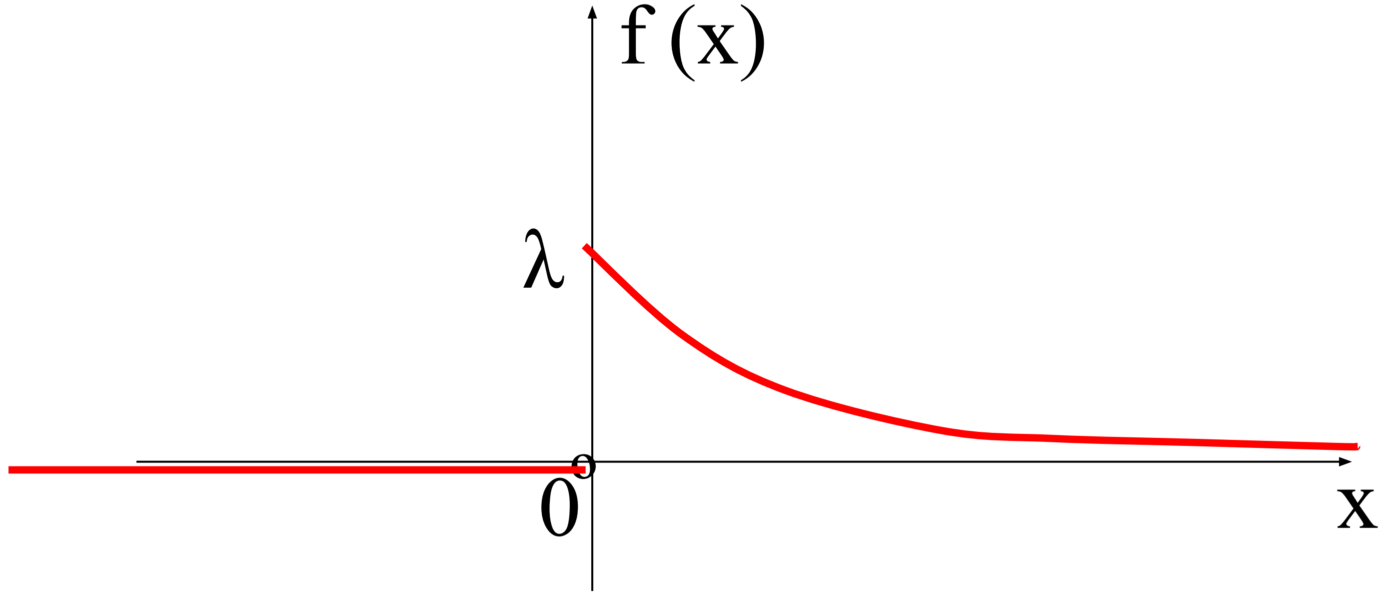
Показательное распределение

Определение. НСВ **X** распределена по показательному закону распределения, если плотность ее распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0, \end{cases}$$

где **$\lambda > 0$ – параметр показательного распределения.**

График плотности распределения $f(x)$:



Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_0^\infty x\, f(x)dx = \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, d(-\lambda x) =$$

$$= -\int_0^\infty x\, d(e^{-\lambda x}) = \lim_{b \to \infty}\left(-x\, e^{-\lambda x}\Big|_0^b + \int_0^b e^{-\lambda x}\, dx\right) =$$

$$= -\lim_{b\to\infty}\frac{1}{\lambda e^{\lambda b}} - \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda b} - 1\right) = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

Итак,

$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{M(X)} = \frac{1}{\lambda},\\ \mathbf{D(X)} = \frac{1}{\lambda^2},\\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{(X)} = \frac{1}{\lambda}\end{gathered}}$$

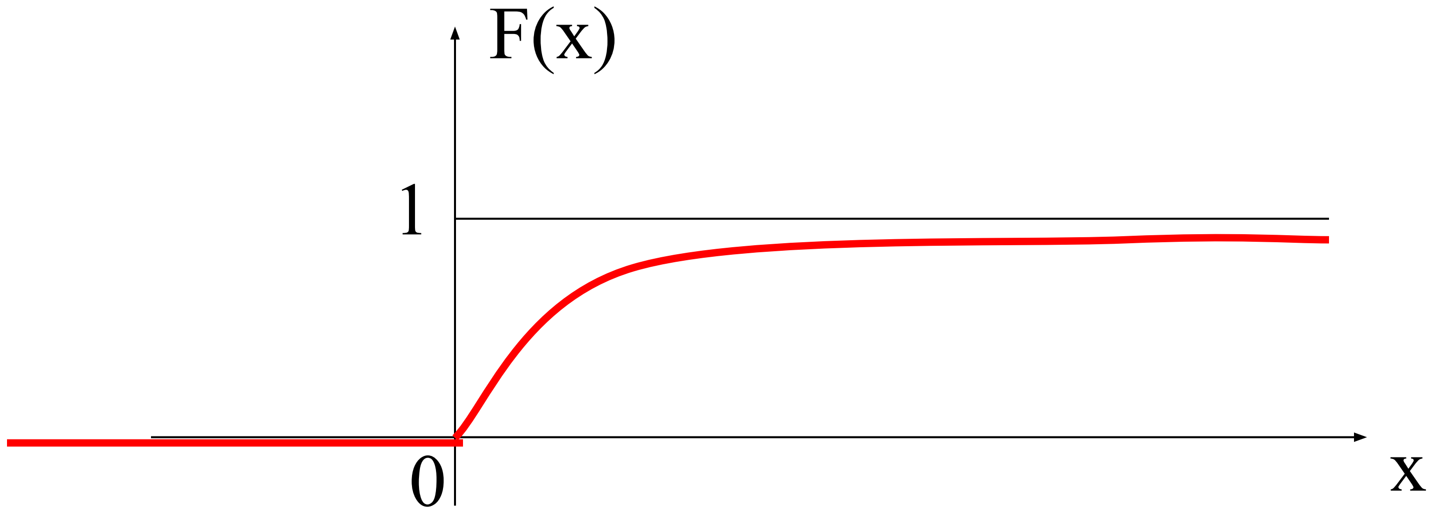
Интегральная функция показательного распределения СВ X – функция F(x):

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

При $x < 0$ $\quad F(x) = 0,$

При $x \geq 0$ $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{-\infty}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}.$

$$\Longrightarrow \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x \geq 0. \end{cases}$$



Вероятность того, что НСВ X, распределенная по показательному закону, примет значения из промежутка [a; b], равна:

$$P(a \le \mathbf{X} \le b) = F(b) - F(a) = 1 - e^{-\lambda b} - (1 - e^{-\lambda a}) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$$

$$\boxed{\mathbf{P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}}$$

Задача. Среднее время безотказной работы телевизора 8 лет. Найти вероятность того, что время работы телевизора без ремонта будет не менее 6, но не более 10 лет.

Дано:

$$\frac{1}{\lambda} = 8$$

$$\lambda = \frac{1}{8}$$

$$a = 6$$

$$b = 10$$

$P(6 \le X \le 10) = ?$

СВ X – время безотказной работы – имеет показательное распределение

$$P(a \le X \le b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} =$$

$$= e^{-\frac{6}{8}} - e^{-\frac{10}{8}} = 0{,}1859$$

Показательное распределение имеет НСВ X – промежуток времени между двумя последовательными событиями в простейшем потоке, например, промежуток времени между двумя автобусами одного и того же маршрута, между двумя звонками на станцию скорой помощи, между двумя поломками прибора и т.п. Тогда параметр λ – это интенсивность потока автобусов этого маршрута, интенсивность звонков, интенсивность поломок и т.д.

По определению

$$F(x) = P(X < x),$$

то есть вероятность того, что событие произойдет раньше, чем наступит момент времени x.

Событие $\mathbf{X > x}$ означает, что событие произойдет после наступления момента x, и является противоположным событию **$X < x$.** Поэтому

$$P(X > x) + P(X < x) = 1.$$

Отсюда:

$$P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x) = 1 - (1 - e^{-\lambda x}) = e^{-\lambda x}$$

Функция

$$\boxed{\mathbf{R(x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}}}$$

называется **функцией надежности**, так как

$$R(x) = P(X > x)$$

- это вероятность того, что событие (например, поломка) не произойдет до наступления момента x.

Если λ – интенсивность потока (например, интенсивность поломок), то $\frac{1}{\lambda}$ называется **наработкой на отказ**.

Задача. Интенсивность движения автобуса 30-го маршрута – 4 автобуса в час. Найти вероятность того, что в течение 10 минут к остановке не подой-дет ни один автобус этого маршрута.

Дано:

$\lambda = 4$ авт./час

$x = 10$ мин. $= \frac{1}{6}$ часа

$P(X > \frac{1}{6}) = ?$

НСВ X – время ожидания автобуса

$$P(X > \frac{1}{6}) = P(X > x) = R(x)$$

$$P(X > \frac{1}{6}) = e^{-\lambda \frac{1}{6}} = e^{-4/6} = 0{,}5134$$