

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (СВ)

Событие является качественной характеристикой результата опыта или испытания.

Количественной характеристикой результата опыта или испытания является **случайная величина (СВ)**.

Определение. Величина, которая в зависимости от результата опыта или испытания принимает различные числовые значения, называется **случайной величиной**.

СВ делятся на дискретные и непрерывные.

Дискретная СВ (ДСВ)

Определение. Дискретной называется такая СВ, которая принимает конечное или бесконечное **счетное** множество значений.

Счетным называется множество, элементы которого можно пронумеровать числами $1, 2, \dots, n, \dots$

Пример.

$A = \{\text{оценка } 5\}$ – случайное событие;

$X = \{\text{число пятерок за месяц}\}$ – ДСВ;

Случайные величины обозначаются заглавными последними буквами латинского алфавита: X , Y , Z .

Событие – одно из возможных значений СВ.

Например,

$Y = \{\text{число ДТП за сутки}\} - \text{ДСВ.}$

$V = \{5 \text{ ДТП за сутки}\} - \text{событие;}$

Возможные значения СВ обозначаются соответствующими строчными буквами латинского алфавита с индексами, например:

$$X: x_1, x_2, \dots, x_n,$$

где n – число возможных значений СВ.

Каждое возможное значение СВ является событием и появляется с некоторой вероятностью.

Пусть значение x_1 появляется с вероятностью p_1 , значение x_2 - с вероятностью p_2 , ..., значение x_n - с вероятностью p_n

Определение. Соответствие между возможными значениями ДСВ X и вероятностями их появления называется **законом распределения (ЗР) ДСВ**.

Способы задания ЗР ДСВ

1. Табличный способ (ряд распределения)

X	x_1	x_2	\dots	x_n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

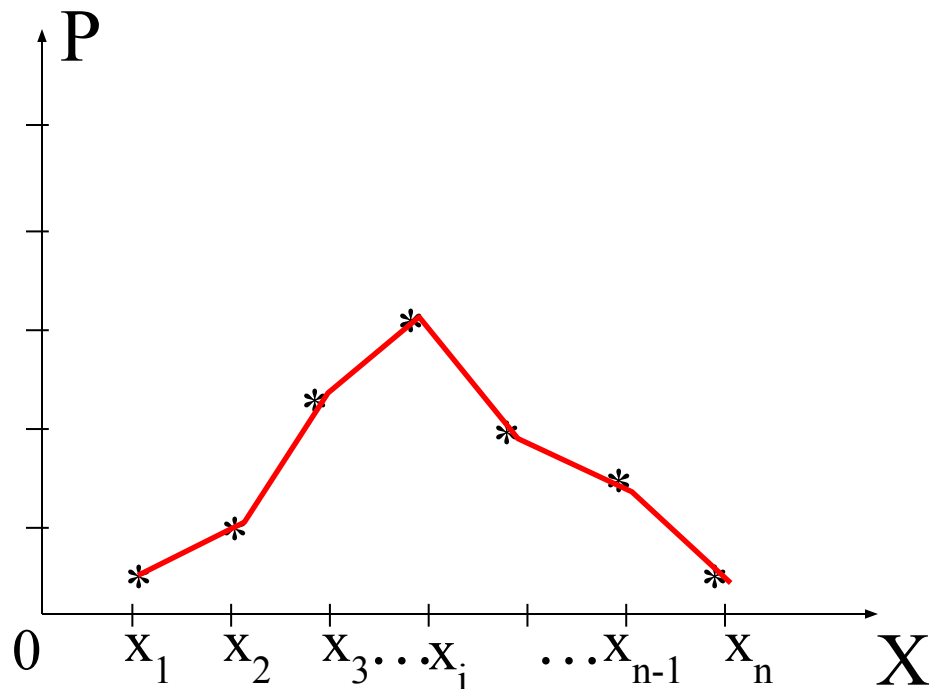
Для того, чтобы эта таблица была ЗР, должны выполняться условия:

1) значения x_i должны располагаться в порядке возрастания, т.е.

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n;$$

2) $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, т.к. события $A_i = \{X = x_i\}$ образуют полную группу событий.

2. Графический способ.



Задача. В корзине 5 яблок по 100гр., 2 яблока по 80 гр. и 3 яблока по 120 гр. Составить ЗР СВ X – веса яблока в гр.

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

X	80	100	120
P	0.2	0.5	0.3

При составлении ЗР СВ могут встретиться 4 типа задач.

1 тип. СВ X – число наступлений события A в n испытаниях с постоянной вероятностью $p = P(A)$ в каждом испытании.

Так как событие A может не наступить вовсе, то

$$x_1 = 0.$$

Вероятности $P_{n,m}$ вычисляются по формуле Бернулли или локальной теореме Лапласа.

Задача. Три покупателя входят в магазин, для каждого покупателя вероятность сделать покупку $p = 0.6$. Составить закон распределения СВ X – числа покупателей, которые сделают покупку

Дано:

$$n = 3$$

$$p = 0.6$$

$$q = 0.4$$

X – {число покупателей, которые сделают покупку}

$$P_{3,0} = C_3^0 p^0 q^3 = \frac{3!}{0!3!} \cdot 1 \cdot 0.4^3 = 0.064$$

$$P_{3,1} = C_3^1 p^1 q^2 = \frac{3!}{1!2!} \cdot 0.6 \cdot 0.4^2 = 0.288$$

$$P_{3,2} = C_3^2 p^2 q^1 = \frac{3!}{2!1!} \cdot 0.6^2 \cdot 0.4^1 = 0.432$$

$$P_{3,3} = C_3^3 p^3 q^0 = \frac{3!}{3!0!} \cdot 0.6^3 \cdot 1 = 0.216$$

$$\sum_{i=0}^3 P_i = 0.064 + 0.288 + 0.432 + 0.216 = 1.$$

ЗР СВ X

X	P
0	0.064
1	0.288
2	0.432
3	0.216

$$\sum_{i=0}^3 P_i = 1.$$

2 тип. СВ X – число испытаний с постоянной вероятностью $p = P(A)$ в каждом испытании. Так как хотя бы одно испытание должно произойти, то $x_1 = 1$.

В этом случае вероятности вычисляются по теоремам умножения для независимых и сложения для несовместных событий.

Задача. Контролер проверяет партию товара до обнаружения первого брака. Если после проверки 4-х изделий брак не обнаружен, то вся партия принимается. Составить ЗР СВ X – числа проверок, если вероятность стандартного изделия $p = 0.8$.

Дано:

$$n = 4$$

$$p = 0.8$$

$$q = 0.2$$

X – {число проверок}

C = {стандартное}

B = {бракованное}

$$p_1 = P(X=1) = P(B) = q = 0.2$$

$$p_2 = P(X=2) = P(CB) = pq = \\ = 0.8 * 0.2 = 0.16.$$

$$p_3 = P(X=3) = P(CCB) = ppq = \\ = 0.8 * 0.8 * 0.2 = 0.128$$

$$p_4 = P(X=4) = 0.8 * 0.8 * 0.8 = 0.512$$

ЗР СВ X

X	P
1	0.2
2	0.16
3	0.128
4	0.512
	1.000

3 тип. СВ X – число наступлений события A , но с переменной вероятностью p_i в i -м испытании. Здесь $x_1=0$, а вероятности вычисляются по теоремам умножения для независимых и сложения для несовместных событий.

Задача. За семестр студент должен выполнить 3 контрольных работы по математике. Для данного студента вероятности выполнить на “5” первую, вторую и третью контрольные работы соответственно равны 0.8, 0.7 и 0.6. Составить ЗР СВ X - числа контрольных работ, которые данный студент выполнит на “5”.

Дано:

$$p_1 = 0.8, q_1 = 0.2$$

$$p_2 = 0.7, q_2 = 0.3$$

$$p_3 = 0.6, q_3 = 0.4$$

ЗР СВ X

X	P
0	0.024
1	0.188
2	0.452
3	0.336
	1.000

$$P_{3,0} = q_1 q_2 q_3 = 0.2 * 0.3 * 0.4 = 0.024$$

$$\begin{aligned} P_{3,1} &= p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3 = \\ &= 0.8 * 0.3 * 0.4 + 0.2 * 0.7 * 0.4 + \\ &\quad + 0.2 * 0.3 * 0.6 = 0.188 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{3,2} &= p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 = \\ &= 0.8 * 0.7 * 0.4 + 0.8 * 0.3 * 0.6 + 0.2 * 0.7 * 0.6 = \\ &\quad = 0.452 \end{aligned}$$

$$P_{3,3} = p_1 p_2 p_3 = 0.8 * 0.7 * 0.6 = 0.336$$

4 тип. СВ X – число испытаний с различной вероятностью p_i события A в каждом испытании. Тогда $x_1=1$, а вероятности вычисляются по теоремам умножения для независимых и сложения для несовместных событий.

Индикатор события A

Определение. Индикатором события A называется СВ X , которая принимает значение $X=0$, если событие A не происходит, и значение $X=1$, если событие A происходит.

Пусть $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$, $p + q = 1$.

Тогда ЗР СВ X – индикатора события A :

X	P
0	q
1	p

Действия над дискретными СВ

Пусть даны две ДСВ X и Y .

Определение. Две СВ называются **независимыми**, если ЗР одной из них (X) не зависит от того, какие возможные значения приняла другая (Y).

Определение. Суммой(разностью или произведением) двух независимых СВ X и Y называется СВ

$$Z = X+Y \text{ (или } X - Y, \text{ или } X*Y),$$

значения которой равны суммам(или разностям, или произведениям) каждого возможного значения СВ X с каждым возможным значением СВ Y

Вероятности появления значений СВ Z вычисляются как произведения вероятностей каждого возможного значения СВ X и каждого возможного значения СВ Y .

Если встретятся одинаковые значения СВ Z , то

в ЗР записывается только одно из них, а их вероятности складываются. В таблицу ЗР СВ Z ее значения записываются в порядке возрастания.

Пример. Пусть СВ X – полные издержки на предприятии, а СВ Y – полная выручка от продажи продукции. Даны ЗР этих СВ:

X	10	20	30
P	0.3	0.5	0.2

Y	40	50
P	0.6	0.4

Составить ЗР СВ Z – прибыли предприятия.

Прибыль

$$Z = Y - X.$$

$$z_1 = 10 = y_1 - x_3, \quad p_1 = 0.6 * 0.2 = 0.12$$

$$z_2 = 20 = 40 - 20 \text{ или } 50 - 30,$$

$$p_2 = 0.6*0.5 + 0.4*0.2 = 0.38$$

$$z_3 = 30 = 40 - 10 \text{ или } 50 - 20,$$

$$p_3 = 0.6*0.3 + 0.4*0.5 = 0.38$$

$$z_4 = 40 = 50 - 10, \quad p_4 = 0.4*0.3 = 0.12$$

z	10	20	30	40
P	0.12	0.38	0.38	0.12

“Северные” забили стрелку “южным”. Бригадир “северных” – человек настроения и имеет связи в органах, с вероятностью p он сообщит о стрелке и пошлет своих бойцов без оружия. В этом случае, если “южные” также придут без оружия, то все останутся при своих. Если же “южные” придут с оружием, то их потери составят m бойцов.

Если “северные” придут с оружием, а “южные” без оружия, то потери “южных ” составят N бойцов. Если обе бригады придут с оружием, то потери “южных” составят n бойцов.

Задача. Как поступить бригадиру “южных”?

Вариант 1. Без оружия. Случайная величина – число потерянных бойцов. Математическое ожидание = $(1-p)N$

Вариант 2. С оружием.
Математическое

ожидание = $pm + (1-p)n$.

Ответ. Выбрать вариант с наименьшим мат. ожиданием.

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДСВ

Математическое ожидание $M(X)$;

Дисперсия $D(X)$;

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

Определение. Математическим ожиданием $M(X)$ ДСВ X называется сумма произведений всех возможных значений СВ x_i на соответствующие вероятности p_i :

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Или $M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$

По смыслу матем. ожидание есть среднее значение СВ X и имеет размерность X .

Пример.

X	80	100	120
P	0.2	0.5	0.3

$$\begin{aligned} M(X) &= 80 \cdot 0.2 + 100 \cdot 0.5 + 120 \cdot 0.3 = \\ &= 16 + 50 + 36 = 102 \text{ гр.} \end{aligned}$$

Свойства $M(X)$

1. $M(C) = C$, где $C = \text{const}$;
2. $M(CX) = CM(X)$;

$$3. M(X + Y) = M(X) + M(Y);$$

$$4. M(X - Y) = M(X) - M(Y);$$

$$5. M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

Пример. $M(X) = 3$, $M(Y) = 5$.

Найти $M(4X - Y)$; $M(X + M(X))$.

$$M(4X - Y) = 4M(X) - M(Y) = 4 \cdot 3 - 5 = 7;$$

$$\begin{aligned} M(X + M(X)) &= M(X) + M(M(X)) = \\ &= M(X) + M(X) = 2M(X) = 2 \cdot 3 = 6 \end{aligned}$$

Определение. Дисперсией $D(X)$ СВ X называется математическое ожидание квадрата отклонения СВ X от ее математического ожидания

дания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

ИЛИ

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 p_i$$
$$= \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (M(X))^2$$

По смыслу дисперсия есть разброс или рассеяние значений СВ X относительно ее среднего значения. Иными словами, дисперсия является мерой колеблемости СВ около ее среднего

значения. Дисперсия имеет размерность квадрата СВ.

Свойства дисперсии $D(X)$

1. $D(X) > 0$.
2. $D(C) = 0$, где $C = \text{const}$.
3. $D(CX) = C^2 * D(X)$.
4. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.
5. $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Определение. Средним квадратическим отклонением СВ X называется

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Среднее квадратическое отклонение показывает, на сколько в среднем отклоняются значения СВ от ее среднего значения.

$\sigma(X)$ имеет размерность самой СВ X .

Определение. Коэффициентом вариации СВ X называется

$$V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} \quad \text{или} \quad V = \frac{\sigma(X)}{M(X)} * 100\%.$$

Коэффициент вариации V является безразмерной величиной.

Пример.

X	80	100	120
P	0.2	0.5	0.3

$$M(X)=102$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 80^2 * 0.2 + 100^2 * 0.5 + \\ + 120^2 * 0.3 - 102^2 = 196.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{196} = 14.$$

$$V(X) = \frac{14}{102} * 100\% = 13.73\%$$

Пример. $D(X)=4$; $D(Y)=7$.

Найти $D(2X - 3Y + 5)$.

$$D(2X - 3Y + 5) = D(2X) + D(3Y) + D(5) = \\ = 2^2D(X) + 3^2D(Y) + 0 = 4*4 + 9*7 = 16 + 63 = 79.$$

Теоремы о матем. ожидании и дисперсии СВ X
– числа наступлений события A в n
испытаниях

Теорема 1. $M(X)$ индикатора события A равно вероятности этого события.

X	0	1
P	q	p

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0*q + 1*p = p$$

Теорема 2. Дисперсия индикатора события A равна $D(X) = pq$

$$D(X) = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - (M(X))^2 = 0^2 q + 1^2 p - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Теорема 3. Матем. ожидание СВ X – числа появлений события A в n независимых испытаниях равно np .

$$M(X) = np$$

Теорема 4. Дисперсия СВ X - числа появлений события A в n независимых испытаниях равна npq .

$$D(X) = npq$$

Пример. В ящике 400 деталей. Вероятность стандартной детали равна 0.8. Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$ СВ X – числа стандартных деталей.

Дано:

$$n = 400$$

$$p = 0.8$$

$$q = 0.2$$

$$M(X), D(X),$$

$$\sigma(X) - ?$$

$$M(X) = np = 400 \cdot 0.8 = 320$$

$$D(X) = npq = 400 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 64$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{64} = 8.$$

Непрерывная случайная величина (НСВ)

Определение. Непрерывной СВ называется такая СВ, которая в результате испытаний может принимать любые значения из конечного или бесконечного интервала.

Так как любой интервал содержит бесконечное множество точек, то НСВ принимает бесконечное несчетное множество значений. Поэтому перечислить все значения НСВ невозможно.

Способы задания НСВ

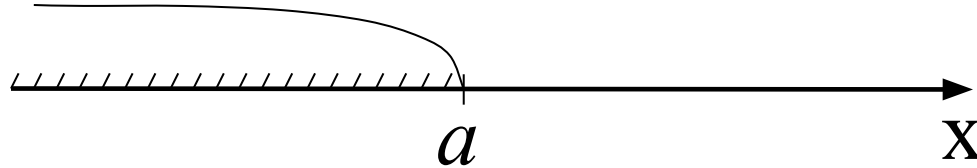
НСВ задается двумя способами:

1. С помощью интегральной функции распределения (или функции распределения) $F(x)$.
2. С помощью дифференциальной функции распределения (или плотности распределения) $f(x)$.

Определение. Функцией распределения СВ X называется такая функция $F(x)$, которая для любого числа x определяет вероятность того, что СВ X примет значения $X < x$:

$$F(x) = P(X < x).$$

Например, при $x = a$ $F(a) = P(X < a)$



Свойства функции распределения $F(x)$

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, т. к. $0 \leq P \leq 1$.

2. $P(a \leq X < b) = F(b) - F(a)$.

3. Следствие из 2-го свойства:

$$P(X = x_0) = 0, \text{ отсюда}$$

$$P(X = a) = P(X = b) = 0.$$

Поэтому,

$$P(a \leq X < b) = P(a \leq X \leq b) = \\ = P(a < X \leq b) = P(a < X < b).$$

4. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е.

$$\text{при } x_2 > x_1 \quad F(x_2) \geq F(x_1)$$

5. Если СВ X задана на всей числовой прямой, то $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$.

6. $F(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Пример. Функция распределения СВ X

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2, \\ a(x - 2)^2 & \text{при } 2 < x \leq 4, \\ 1 & \text{при } x \geq 4. \end{cases}$$

Найти:

a) значение параметра a ;

b) $P(2 \leq X \leq 3)$.

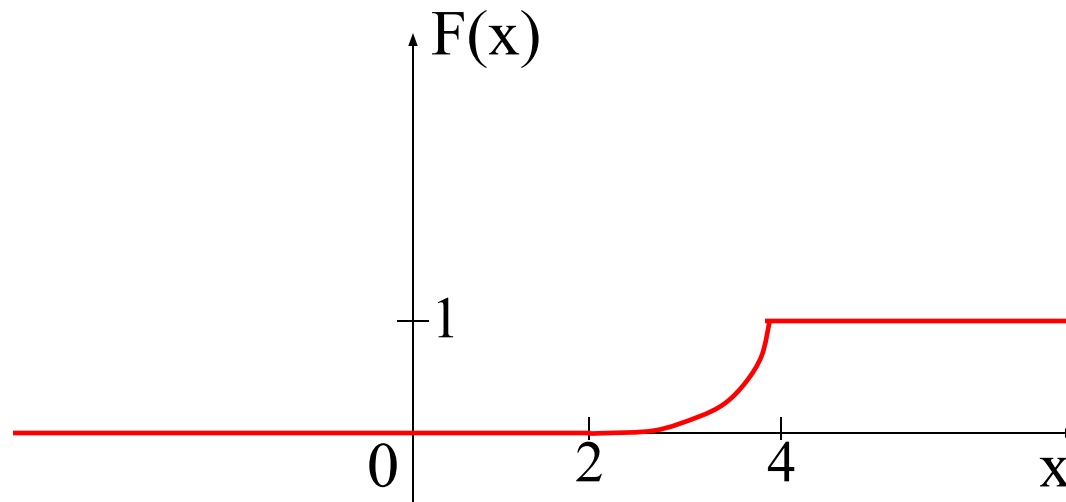
Решение. По определению непрерывной функции:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} F(x) = F(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 4+0} F(x) = F(4) = 1$$

$$F(4) = a(4 - 2)^2 = 1, \text{ отсюда } a = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 3) &= F(3) - F(2) = \\ &= \frac{1}{4} (3 - 2)^2 - \frac{1}{4} * 0 = \frac{1}{4} . \end{aligned}$$



Замечание. Графиком функции распределения ДСВ X является разрывная ступенчатая (кусочно- постоянная) линия. При каждом новом значении СВ X функция $F(x)$ испытывает скачок на величину, равную вероятности p_i этого значения x_i . Сумма величин всех скачков функции $F(x)$ равна 1.

Дифференциальная функция распределения НСВ(плотность распределения вероятностей) $f(x)$

Пусть НСВ X принимает значения из элементарного отрезка $[x, x + \Delta x]$, а функция ее распределения $F(x)$ непрерывно дифференцируема.

Тогда

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Поделим на Δx :

$$\frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

и перейдем к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$.

Определение. Предел отношения вероятности попадания НСВ X в элементарный промежуток $[x, x + \Delta x]$ к длине этого промежутка Δx при $\Delta x \rightarrow 0$ называется **плотностью распределения вероятностей** НСВ X и обозначается $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$F'(x) = f(x).$$

В свою очередь, $F(x)$ – первообразная к $f(x)$.
Геометрически $P(x \leq X \leq x + \Delta x)$ есть площадь криволинейной трапеции, ограниченной дугой $f(x)$, отрезком $[x, x + \Delta x]$, вертикальными прямыми, проходящими через концы этого отрезка, и осью Ox .

Свойства плотности распределения $f(x)$

1. $f(x) \geq 0$, т.к. $F(x)$ – неубывающая, то $F'(x) \geq 0$.
2. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$.
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

$$4. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Числовые характеристики НСВ

К ним относятся $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Математическое ожидание:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Дисперсия:

$$D(X) = \int_a^b x^2f(x)dx - (M(X))^2.$$

Среднее квадратическое отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$