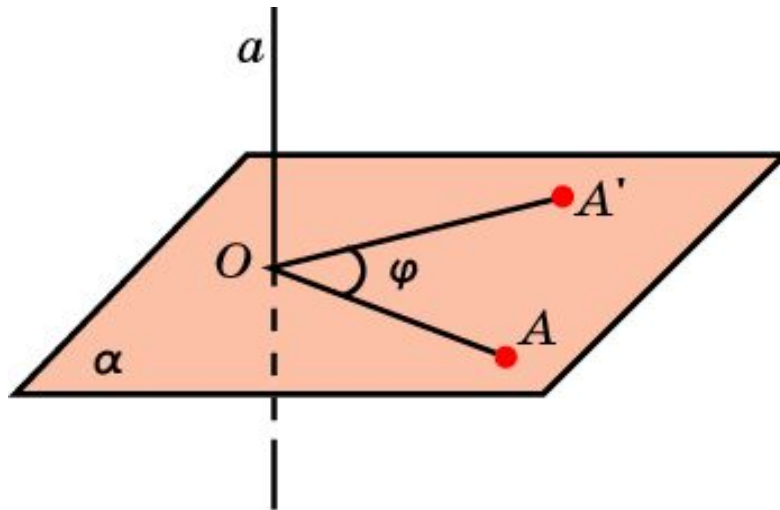


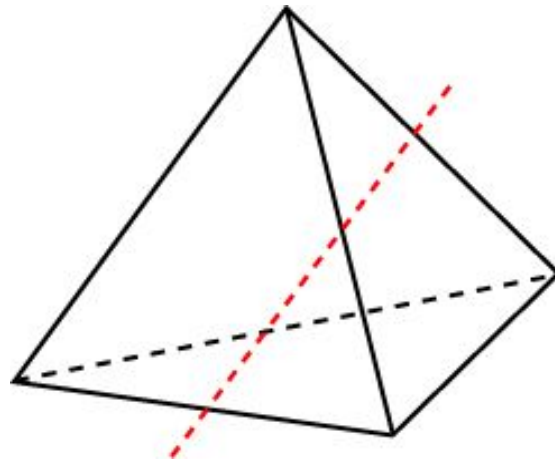
# ПОВОРОТ

Пусть теперь в пространстве задана прямая  $a$  и точка  $A$ , не принадлежащая этой прямой. Через точку  $A$  проведем плоскость  $\alpha$ , перпендикулярную прямой  $a$ , и точку пересечения  $a$  и  $\alpha$  обозначим  $O$ . Говорят, что точка  $A'$  пространства получается из точки  $A$  поворотом вокруг прямой  $a$  на угол  $\varphi$ , если в плоскости  $\alpha$  точка  $A'$  получается из точки  $A$  поворотом вокруг центра  $O$  на угол  $\varphi$ . Преобразование пространства, при котором точки прямой  $a$  остаются на месте, а все остальные точки поворачиваются вокруг этой прямой (в одном и том же направлении) на угол  $\varphi$  называется **поворотом**, или **вращением**. Прямая  $a$  при этом называется **осью вращения**.



# Упражнение 1

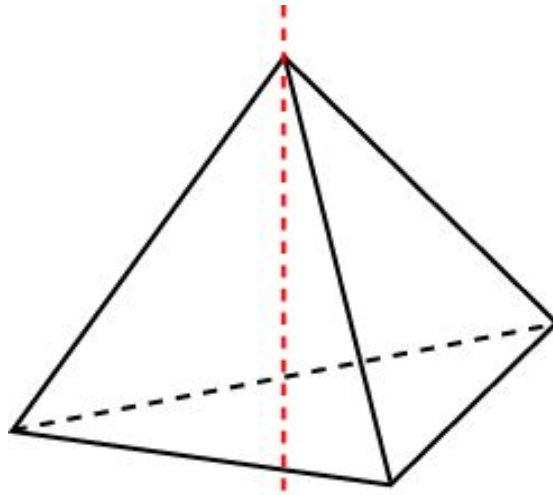
На какой угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $180^\circ$ .

## Упражнение 2

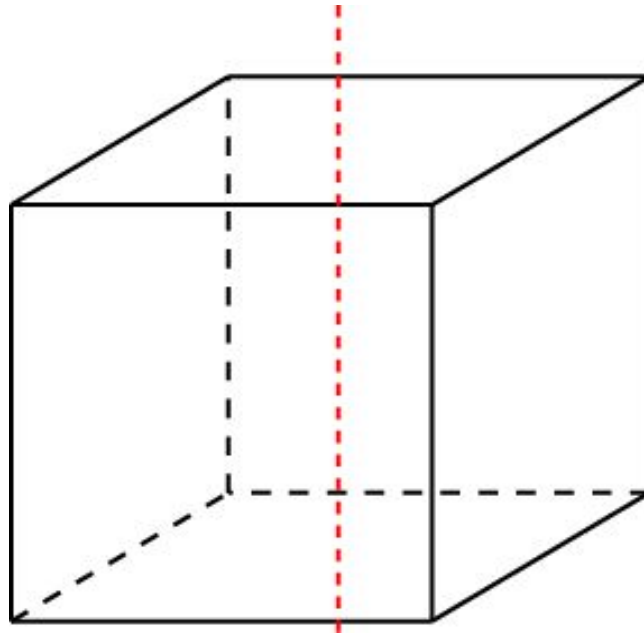
На какой наименьший угол нужно повернуть правильный тетраэдр вокруг прямой, содержащей его высоту, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $120^\circ$ .

## Упражнение 3

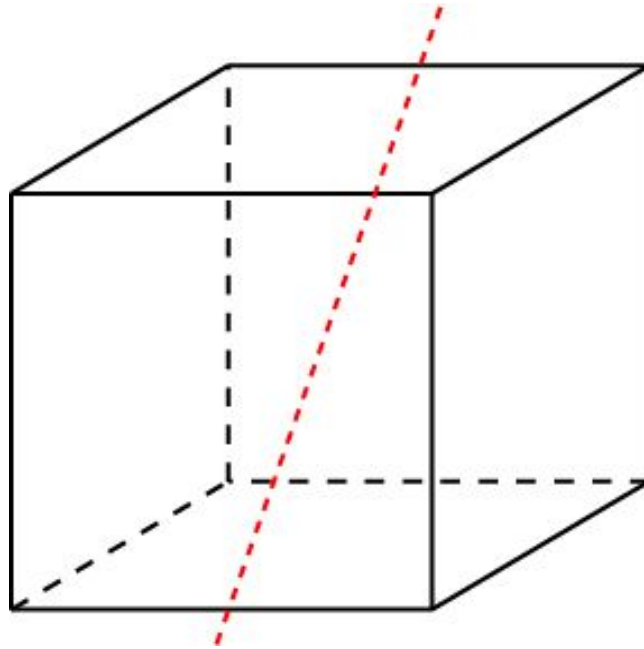
На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 4

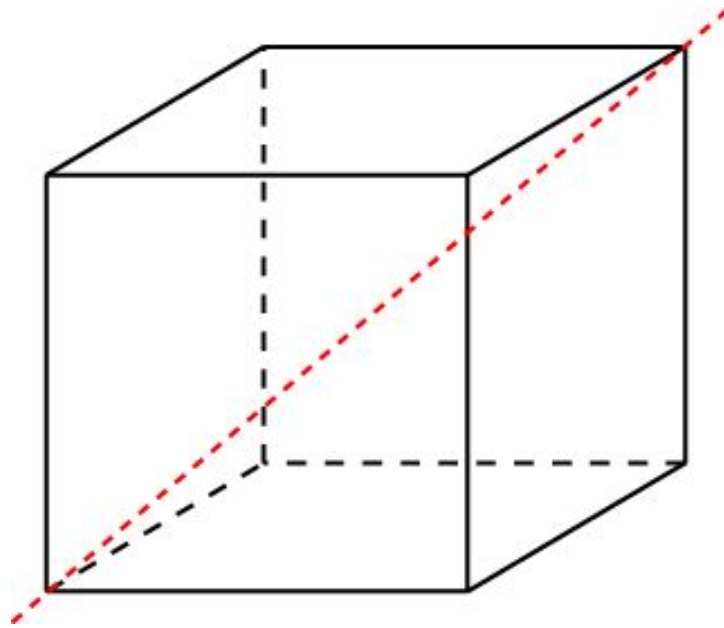
На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $180^\circ$ .

## Упражнение 5

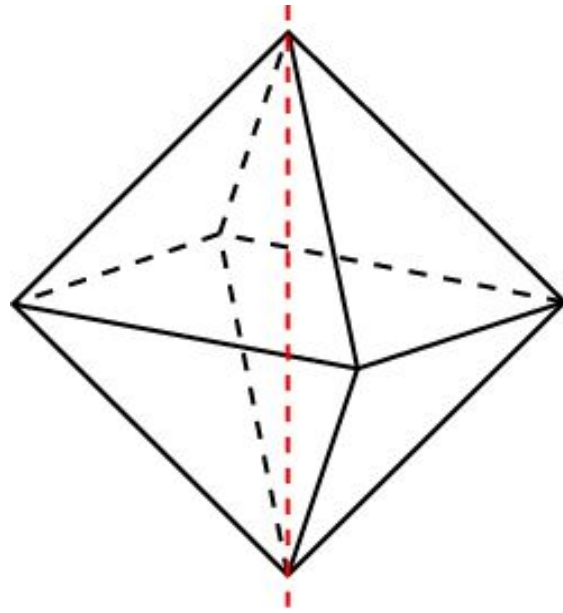
На какой наименьший угол нужно повернуть куб вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $120^\circ$ .

## Упражнение 6

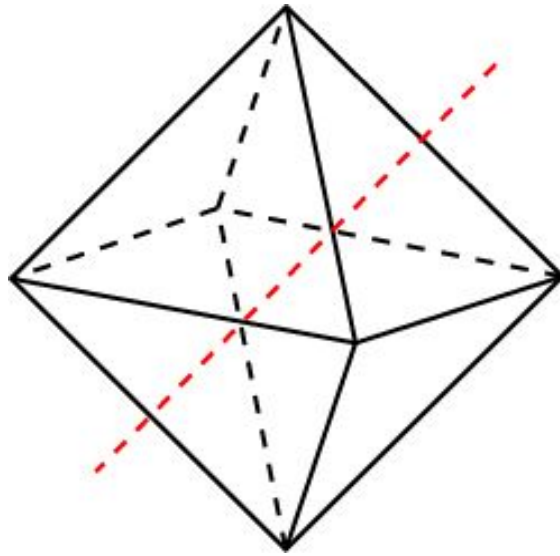
На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $90^\circ$ .

## Упражнение 7

На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?

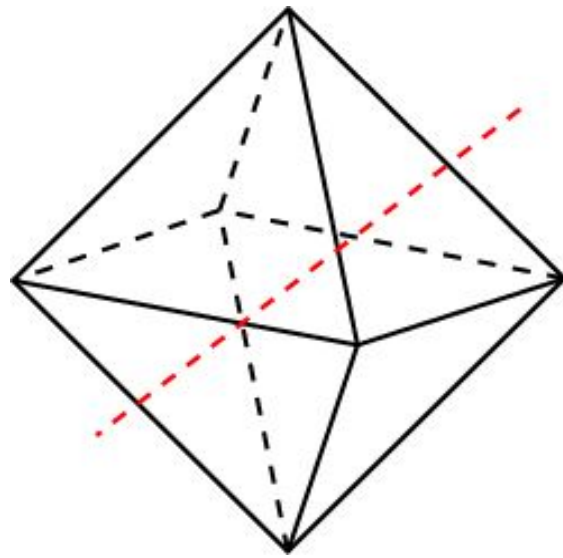


Ответ:  $180^\circ$ .



## Упражнение 8

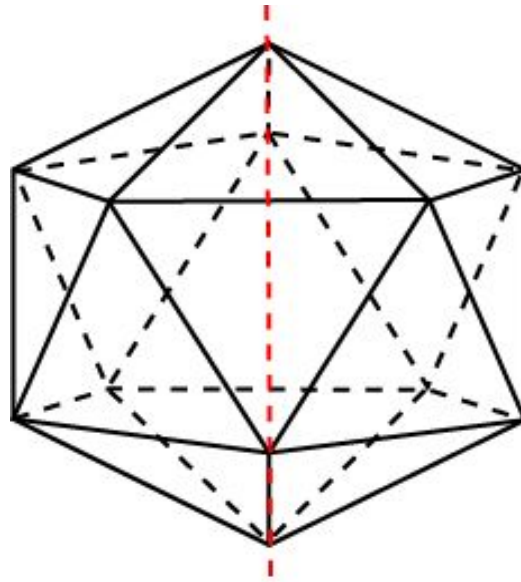
На какой наименьший угол нужно повернуть октаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $120^\circ$ .

## Упражнение 9

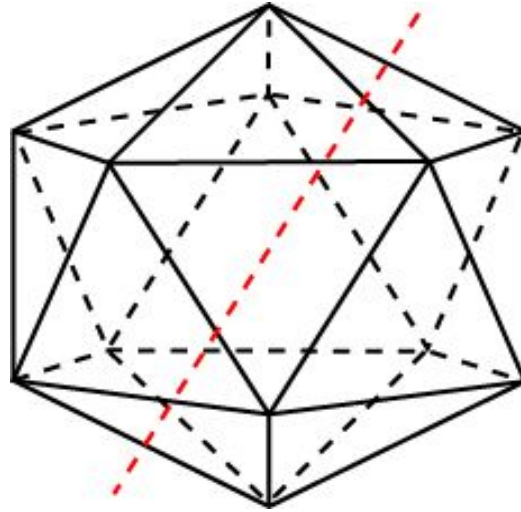
На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $72^\circ$ .

## Упражнение 10

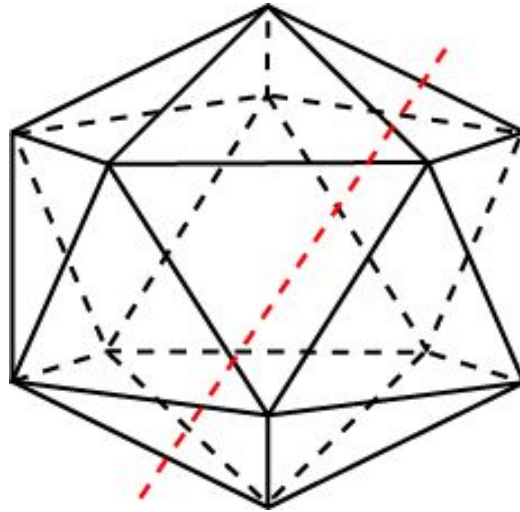
На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $180^\circ$ .

## Упражнение 11

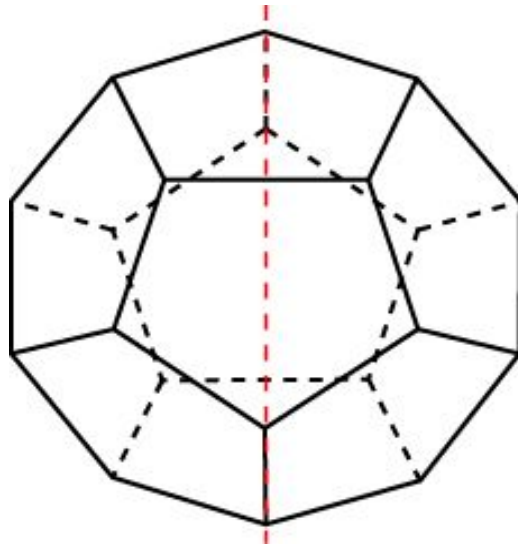
На какой наименьший угол нужно повернуть икосаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $120^\circ$ .

## Упражнение 12

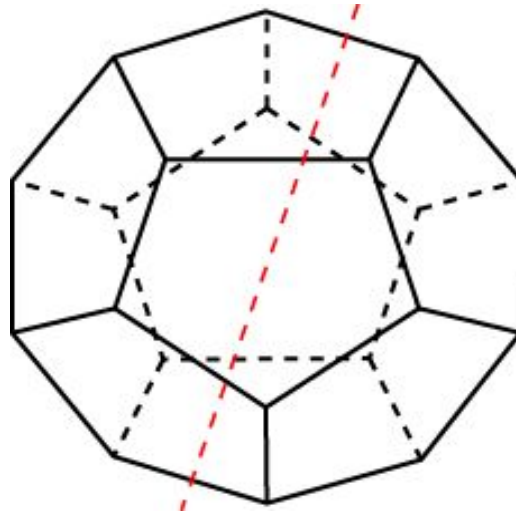
На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через противоположные вершины, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $120^\circ$ .

## Упражнение 13

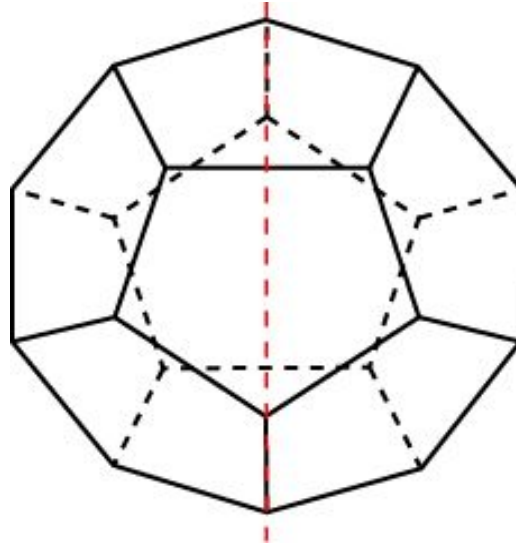
На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через середины противоположных ребер, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $180^\circ$ .

## Упражнение 14

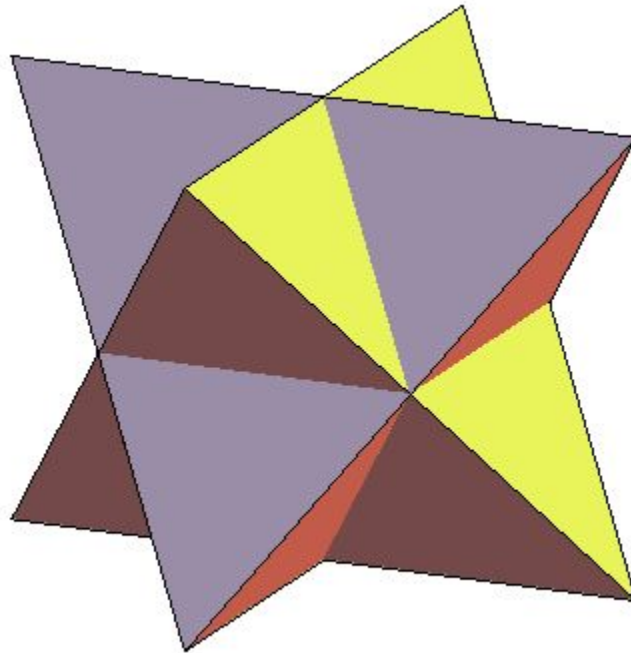
На какой наименьший угол нужно повернуть додекаэдр вокруг прямой, проходящей через центры противоположных граней, чтобы он совместился сам с собой?



Ответ:  $72^\circ$ .

## Упражнение 15

Тетраэдр повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол  $90^\circ$ . Какая фигура является объединением и пересечением исходного тетраэдра и повернутого?

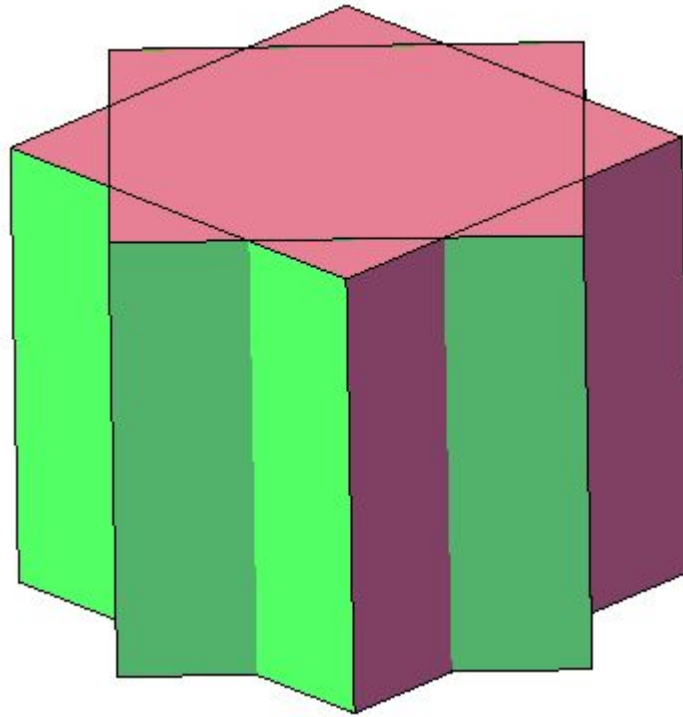


**Ответ:** Звезда Кеплера, октаэдр.



## Упражнение 16

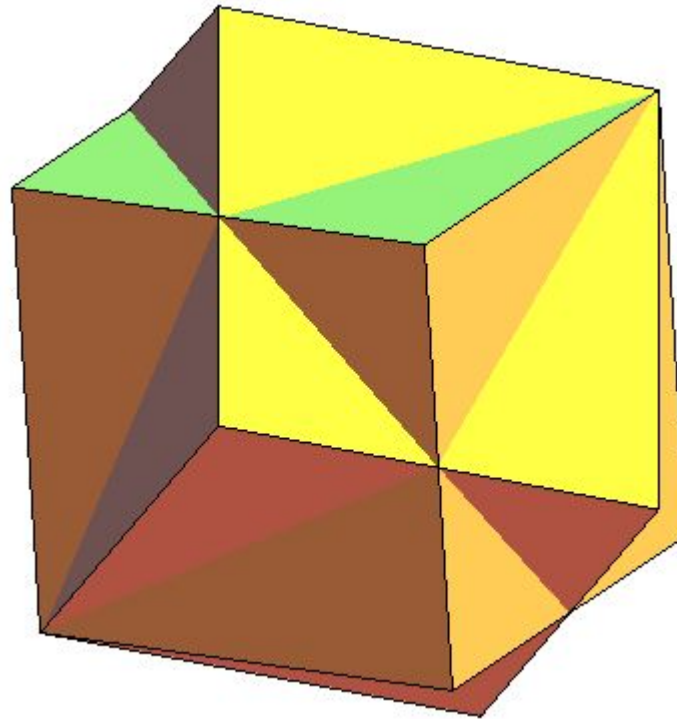
Куб повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



**Ответ:** Правильная 8-я призма.

## Упражнение 17

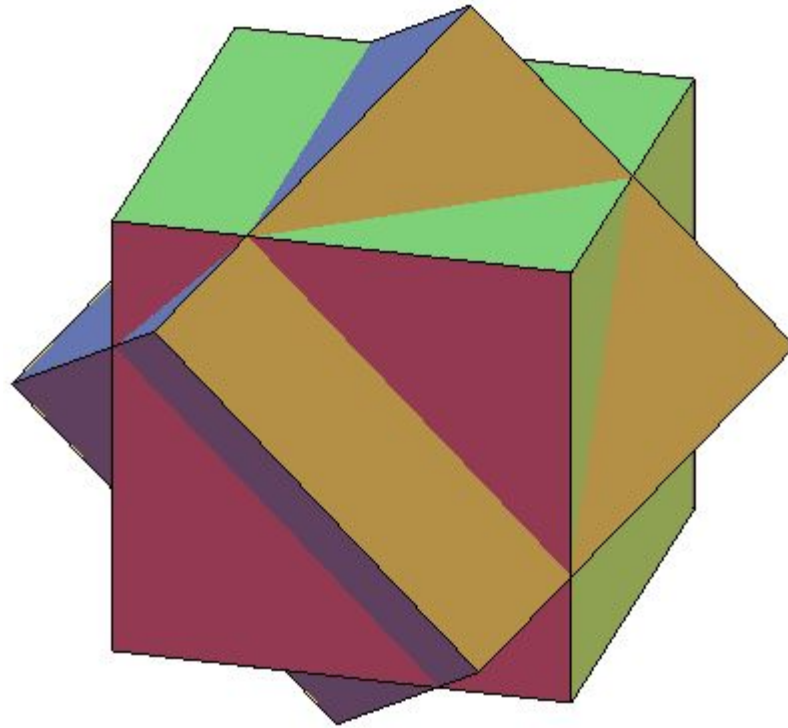
Куб повернут вокруг диагонали на угол  $60^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



**Ответ:** Правильная 6-я бипирамида.

## Упражнение 18

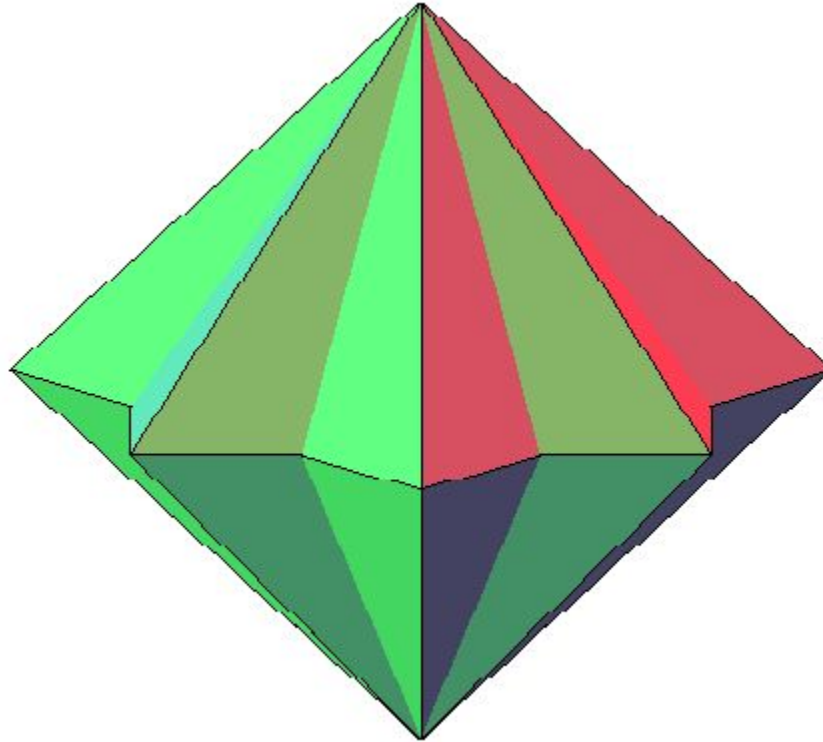
Куб повернут вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер, на угол  $90^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного куба и повернутого?



**Ответ:** Две правильные 4-е пирамиды, поставленные на основания правильной 4-ой призмы.

## Упражнение 19

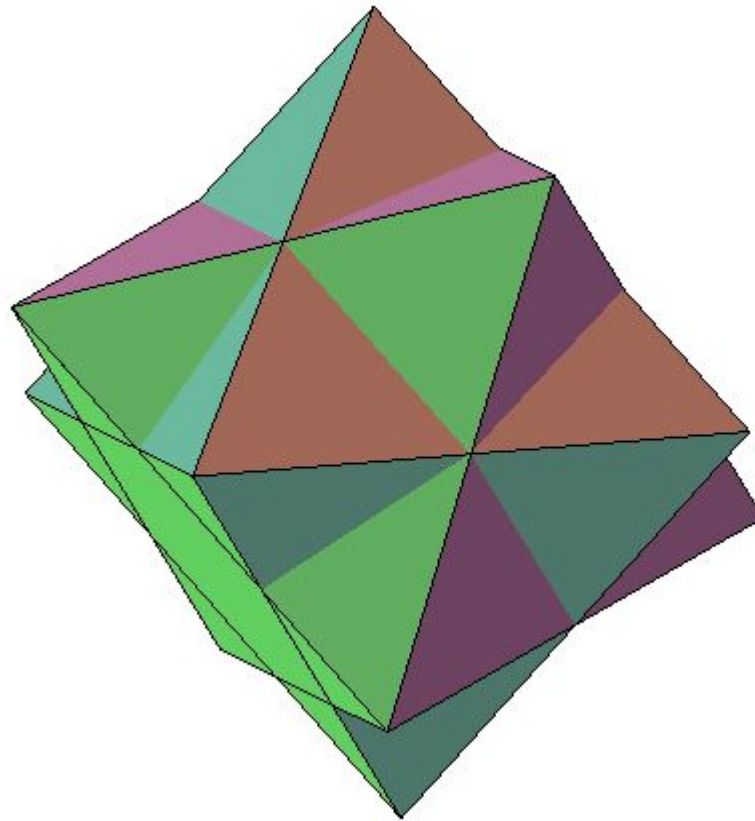
Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол  $45^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?



**Ответ:** Правильная 8-я бипирамида.

## Упражнение 20

Октаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол  $60^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного октаэдра и повернутого?

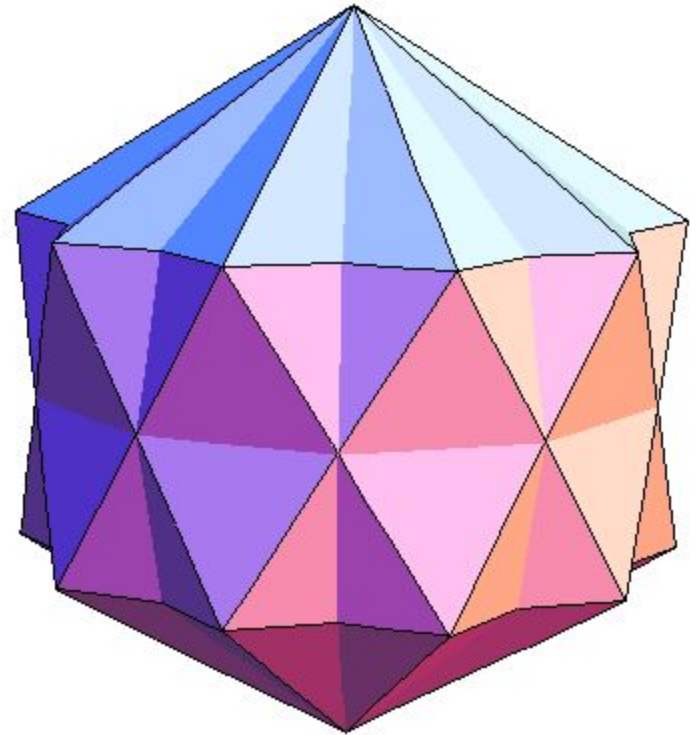


**Ответ:** Правильная усеченная 6-я бипирамида.

## Упражнение 21

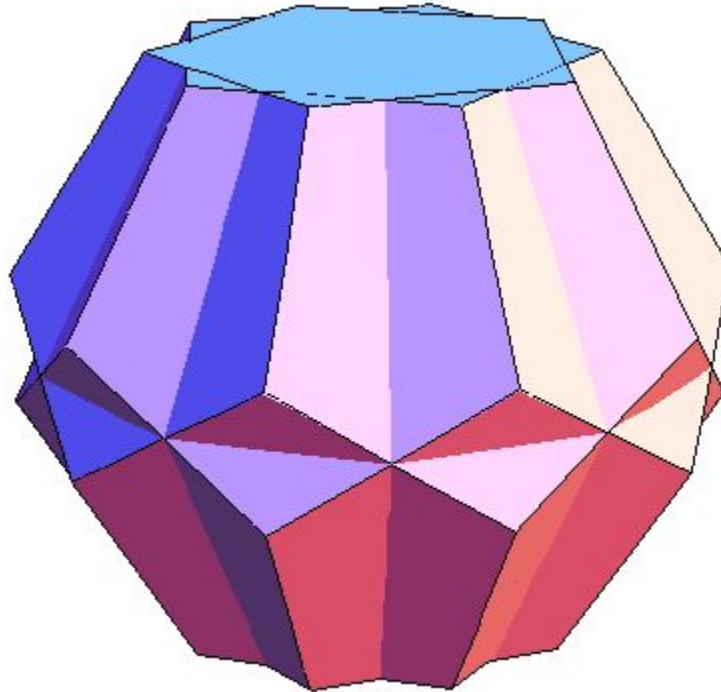
Икосаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей противоположные вершины, на угол  $36^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного икосаэдра и повернутого?

**Ответ:** Правильная усеченная 10-я бипирамида, на основания которой поставлены правильные 10-угольные пирамиды.



## Упражнение 22

Додекаэдр повернут вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней, на угол  $36^\circ$ . Какая фигура является общей частью исходного додекаэдра и повернутого?



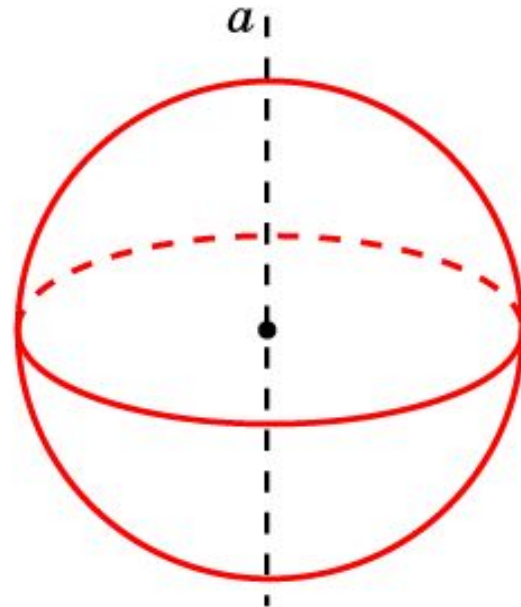
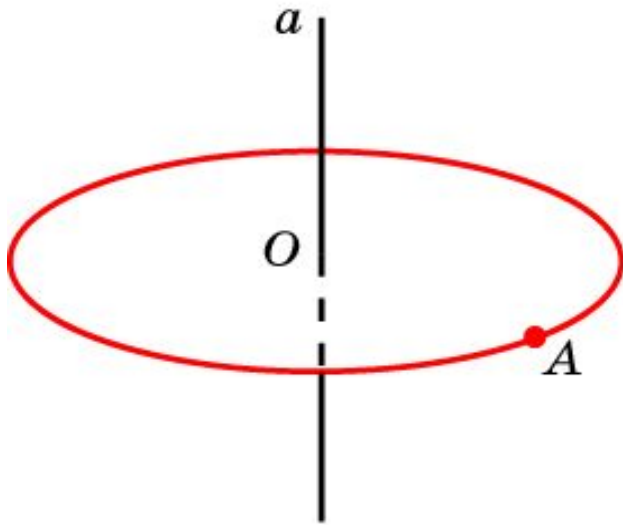
**Ответ:** Правильная усеченная 10-я бипирамида

# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Говорят, что фигура  $\Phi$  в пространстве получена вращением фигуры  $F$  вокруг оси  $a$ , если точки фигуры  $\Phi$  получаются всевозможными поворотами точек фигуры  $F$  вокруг оси  $a$ . Фигура  $\Phi$  при этом называется **фигурой вращения**.

При вращении точки  $A$  вокруг прямой  $a$  получается **окружность**.

**Сфера** получается вращением окружности вокруг ее диаметра. Аналогично, **шар** получается вращением круга вокруг какого-нибудь его диаметра.



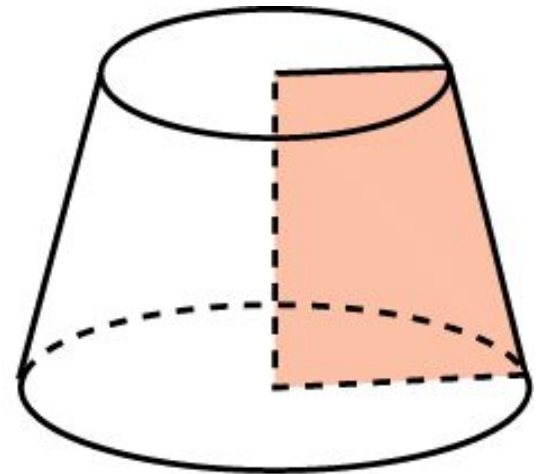
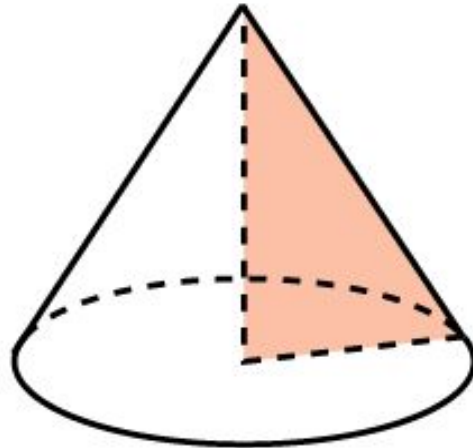
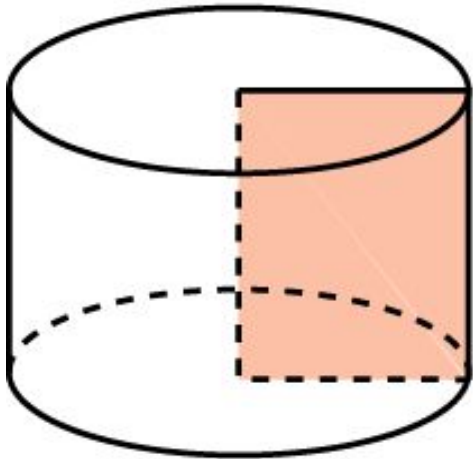


# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

**Цилиндр** получается вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

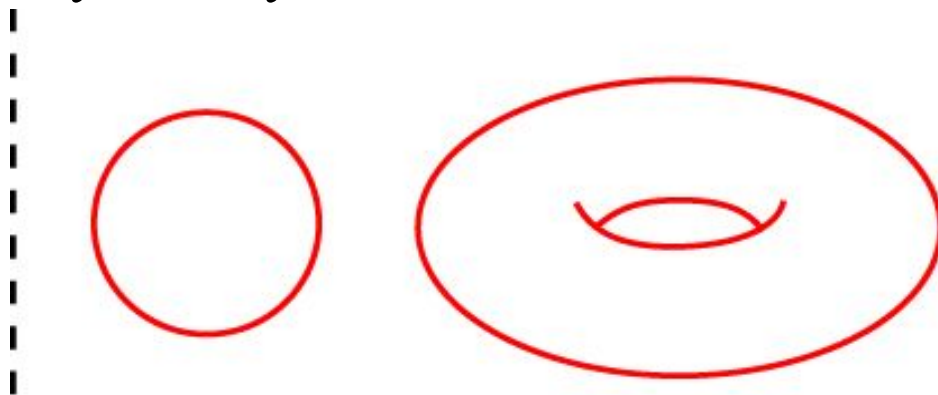
**Конус** получается вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов.

**Усеченный конус** получается вращением трапеции, один из углов которой является прямым, вокруг боковой стороны, прилегающей к этому углу.

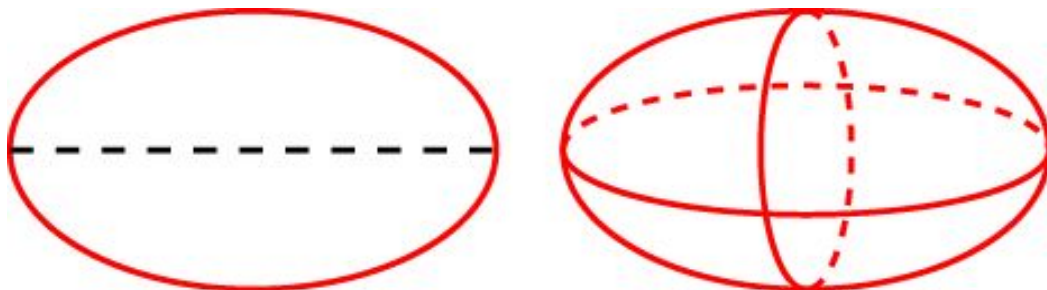


# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Если окружность вращать вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек, то полученная поверхность вращения называется **тором** и по форме напоминает баранку или бублик.

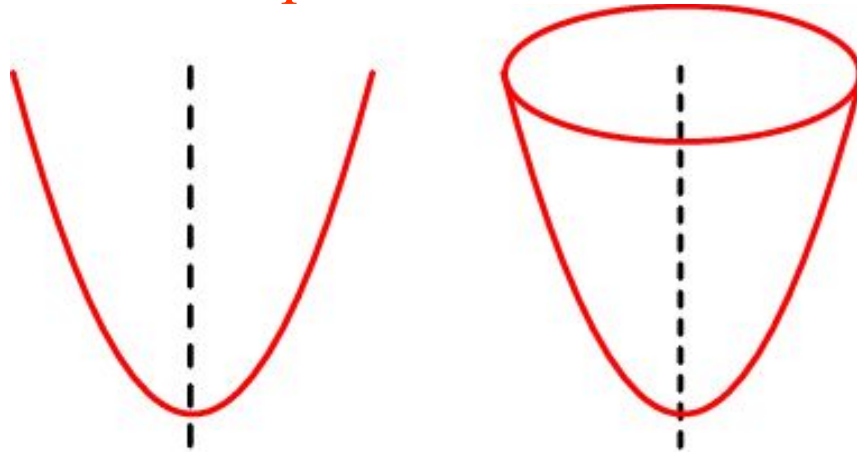


При вращении эллипса вокруг его оси получается поверхность, называемая **эллипсоидом вращения**.



# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

При вращении параболы вокруг ее оси получается поверхность, называемая **параболоидом вращения**.

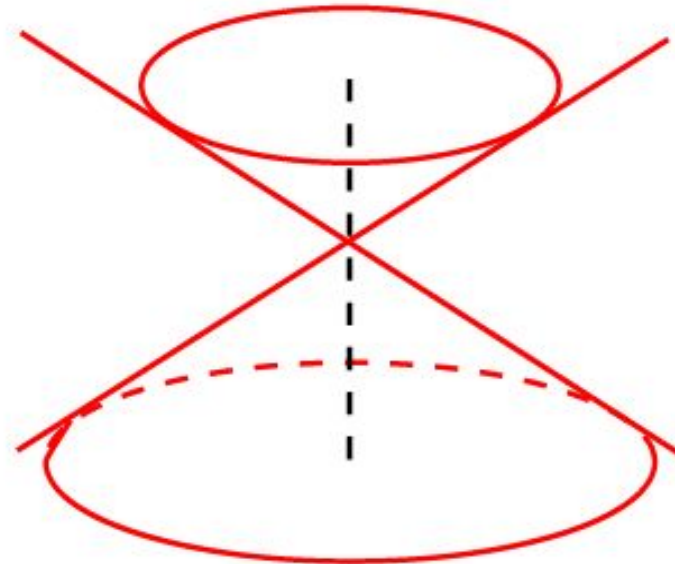
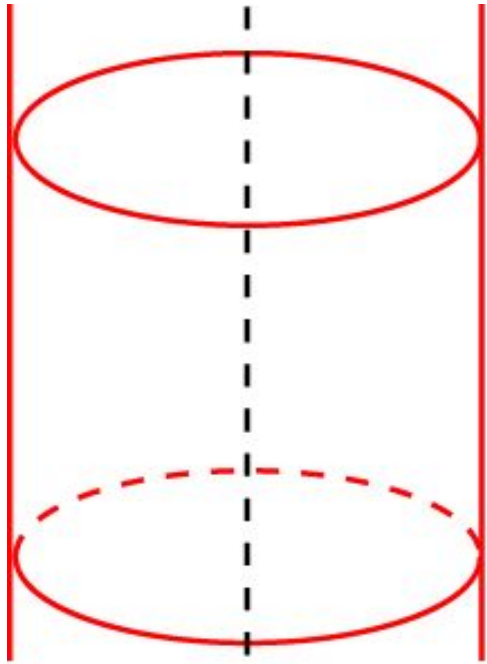


При вращении гиперболы вокруг ее оси получается поверхность, называемая **гиперболоидом вращения**.



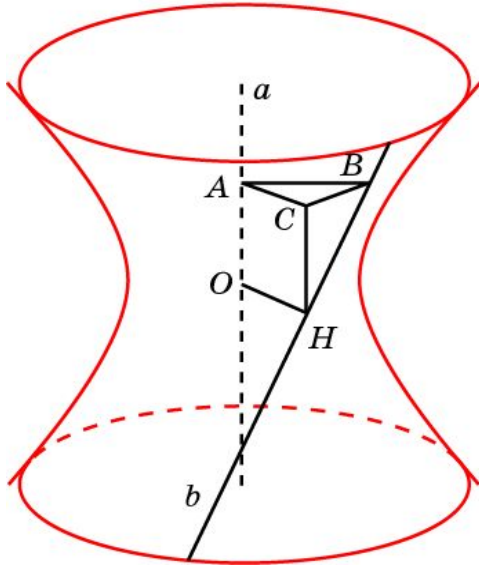
# ФИГУРЫ ВРАЩЕНИЯ

Если прямая параллельна оси, то при вращении получается фигура, называемая **цилиндрической поверхностью**. Если прямая пересекает ось, то при вращении получается фигура, называемая **конической поверхностью**.



# ГИПЕРБОЛОИД ВРАЩЕНИЯ

**Теорема.** При вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения, получается гиперboloид вращения.



**Доказательство.** Пусть  $a$  и  $b$  - скрещивающиеся прямые,  $OH$  - их общий перпендикуляр длины  $d$ . Рассмотрим произвольную точку  $B$  на прямой  $b$ , отличную от  $H$ , и опустим из нее перпендикуляр  $BA$  на прямую  $a$ . При вращении точка  $B$  описывает окружность, радиус которой равен  $AB$ . Через точку  $H$  проведем прямую, параллельную  $a$ , и через точку  $A$  - прямую, параллельную  $OH$ . Точку пересечения этих прямых обозначим  $C$ .

Пусть расстояние  $AB$  равно  $x$ , расстояние  $OA$  равно  $y$  и угол  $BHC$  равен  $\alpha$ . Треугольник  $ABC$  - прямоугольный, катет  $AC$  равен  $d$ , катет  $BC$  равен  $y \cdot \operatorname{tg} \alpha$ . Поэтому выполняется равенство  $x^2 = d^2 + y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$ . Перенеся слагаемое, содержащее  $y$ , в левую часть равенства и разделив обе части полученного равенства на  $d^2$ , получим уравнение  $\frac{x^2}{d^2} - \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{d^2} = 1$ , которое представляет собой уравнение гиперболы. При вращении этой гиперболы получается та же самая фигура, что и при вращении прямой, скрещивающейся с осью вращения. Следовательно, искомой фигурой вращения является гиперboloид вращения.

# Упражнение 1

Какая фигура получается при вращении отрезка  $OA$  вокруг прямой, проходящей через точку  $O$  и перпендикулярной  $OA$ ?

Ответ: Круг.

## Упражнение 2

Назовите прямые, при вращении вокруг которых данного прямоугольника получается цилиндр.

**Ответ:** Прямые, пересекающие прямоугольник по отрезку, параллельному его стороне.

## Упражнение 3

Какая фигура получается при вращении равнобедренного треугольника вокруг прямой, содержащей высоту, опущенную на основание этого треугольника?

**Ответ:** Конус.



## Упражнение 4

Какая фигура получается при вращении полукруга вокруг прямой, содержащей диаметр?

Ответ: Круг.

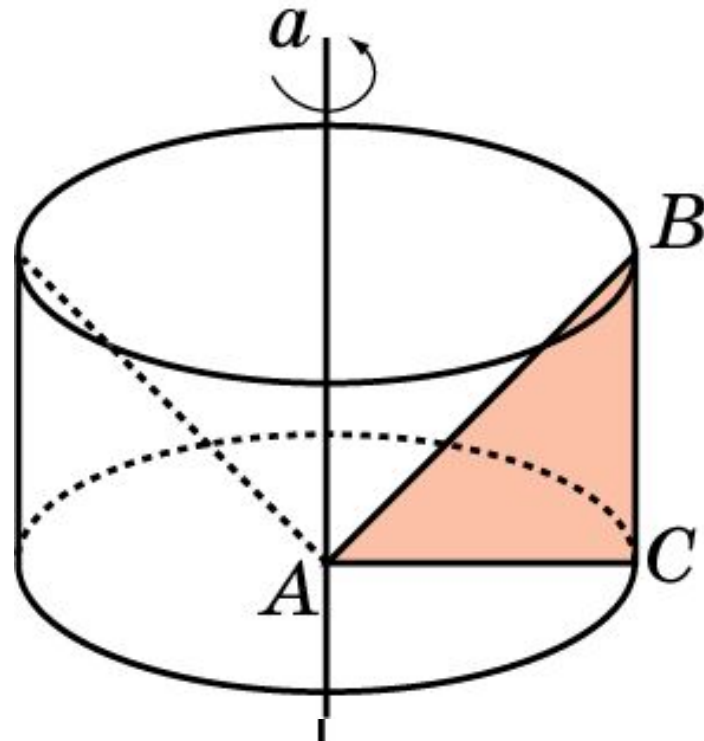
## Упражнение 5

Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его катет?

**Ответ:** Конус.

## Упражнение 6

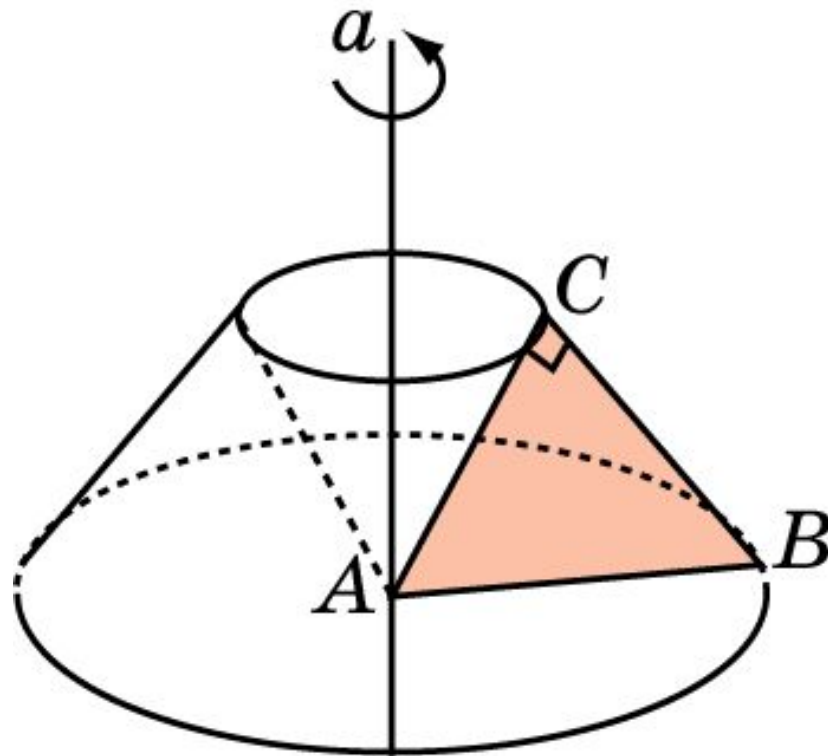
Какая фигура получается вращением прямоугольного треугольника  $ABC$  вокруг прямой  $a$ , проходящей через вершину  $A$  острого угла, и параллельную катету  $BC$ ?



**Ответ:** Цилиндр, из которого вырезан конус.

## Упражнение 7

Какая фигура получается вращением равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$  вокруг прямой  $a$ , лежащей в плоскости этого треугольника, перпендикулярной гипотенузе  $AB$  и проходящей через вершину  $A$  острого угла.



**Ответ:** Усеченный конус, из которого вырезан конус.

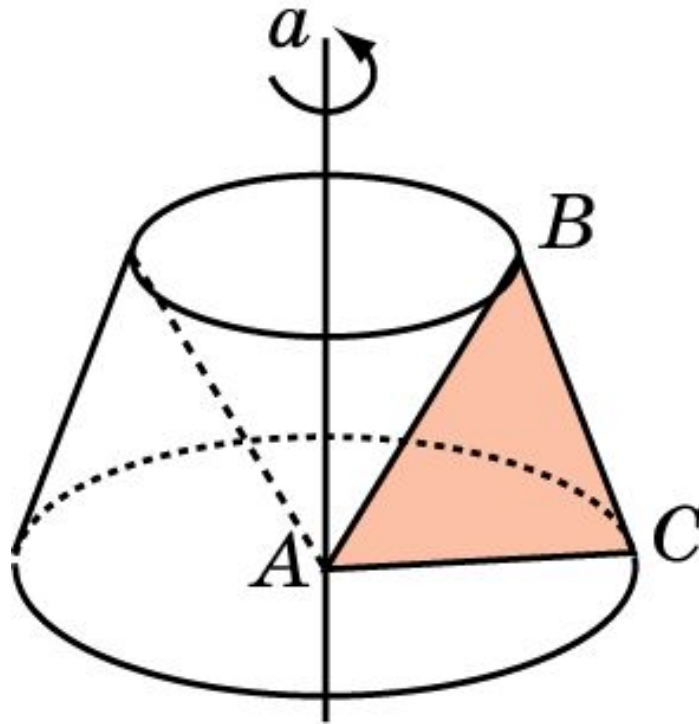
## Упражнение 8

Какая фигура получается вращением остроугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его сторону?

**Ответ:** Фигура, состоящая из двух конусов с общим основанием.

## Упражнение 9

Какая фигура получается вращением остроугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через его вершину перпендикулярно стороне?



**Ответ:** Усечённый конус с вырезанным внутри конусом.

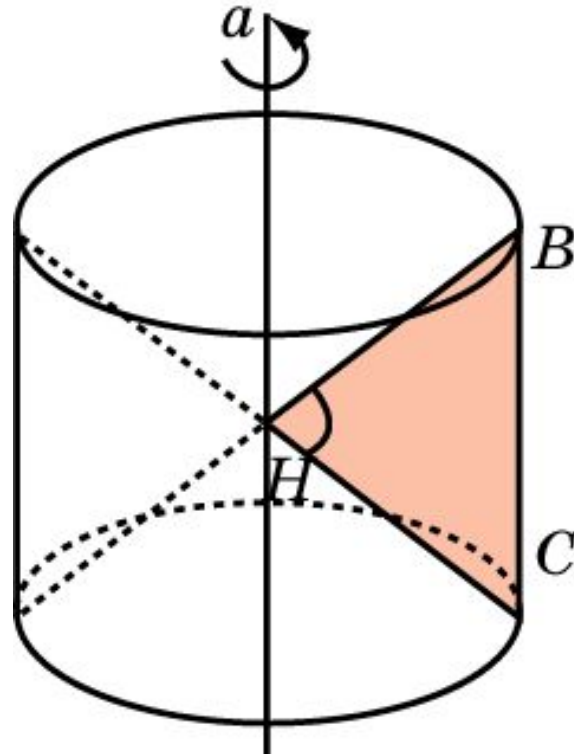
## Упражнение 10

Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей его сторону, прилежащую к тупому углу?

**Ответ:** Фигура, полученная из конуса, вырезанием из него другого конуса.

## Упражнение 11

Какая фигура получается вращением тупоугольного треугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого треугольника и проходящей через вершину тупого угла параллельно противоположной стороне?

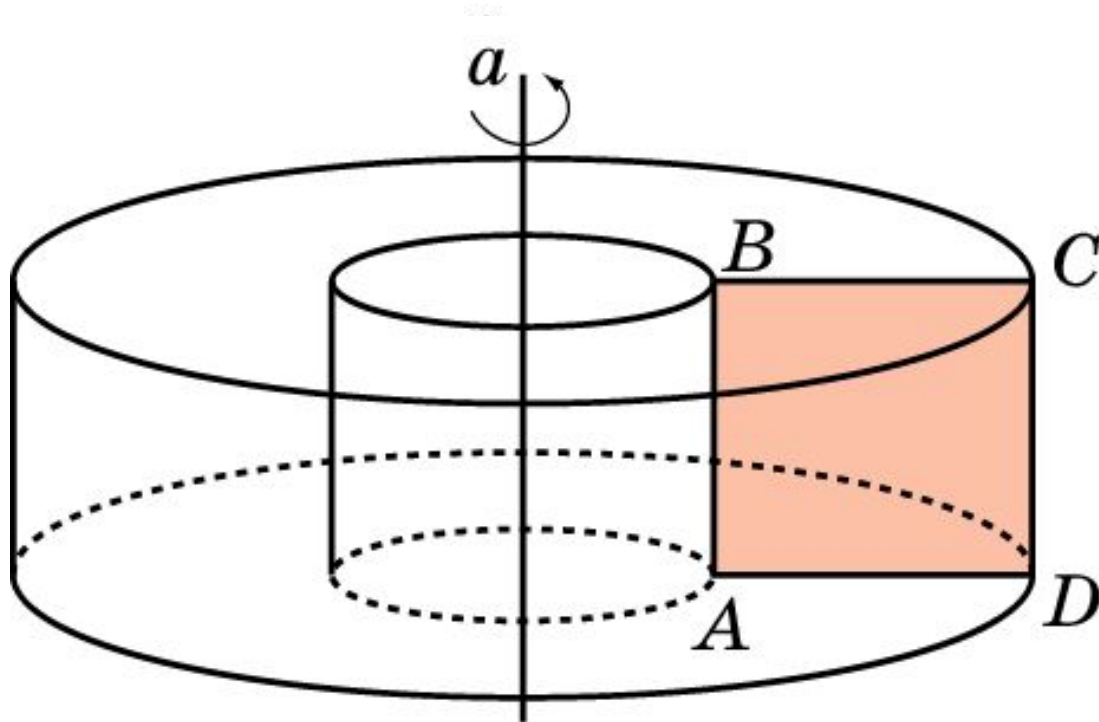


**Ответ:** Цилиндр с вырезанными внутри двумя конусами, имеющими общую вершину.



## Упражнение 12

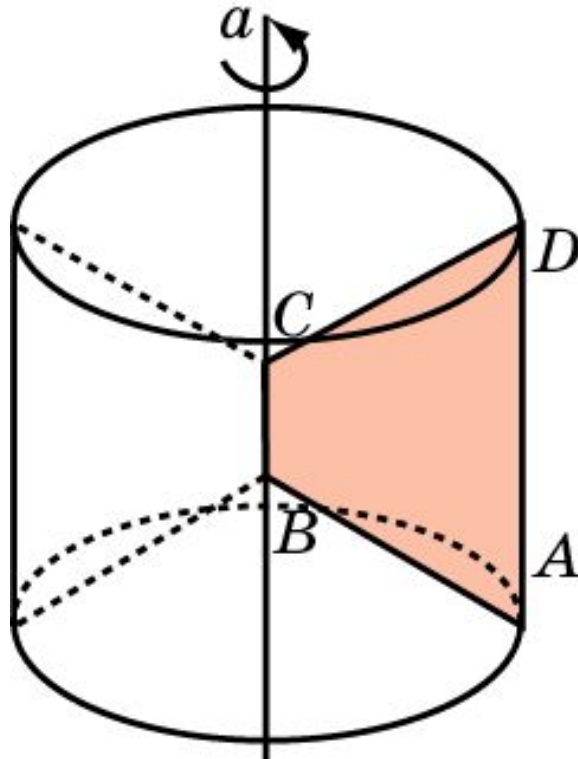
Какая фигура получается вращением прямоугольника вокруг прямой, лежащей в плоскости этого прямоугольника, параллельной его стороне, и не имеющей с ним общих точек?



**Ответ:** Фигура, полученная из цилиндра, вырезанием из него другого цилиндра.

## Упражнение 13

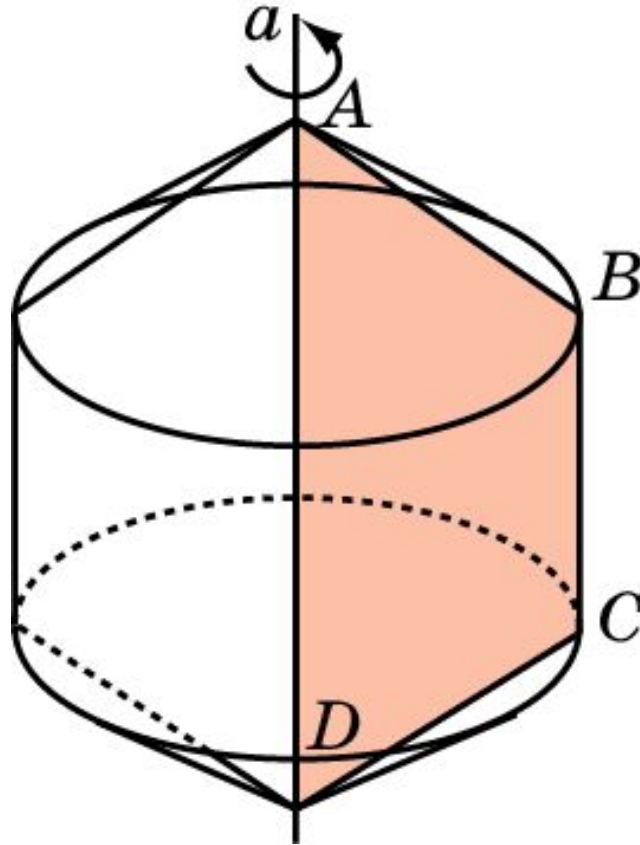
Какая фигура получается вращением трапеции вокруг прямой, содержащей меньшее её основание?



**Ответ:** Цилиндр с вырезанными внутри двумя конусами.

## Упражнение 14

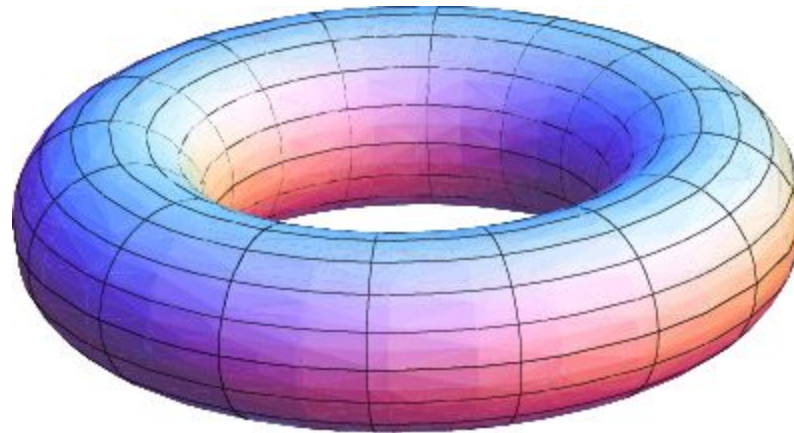
Какая фигура получается вращением трапеции вокруг прямой, содержащей большее её основание?



**Ответ:** Цилиндр, на основания которого поставлены конусы.

## Упражнение 15

Вращением какой фигуры получается поверхность, изображенная на рисунке, называемая тором.



**Ответ:** Вращением окружности вокруг прямой, лежащей в плоскости окружности и не имеющей с этой окружностью общих точек.

## Упражнение 16

Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей центры противоположных граней.

**Ответ:** Цилиндр.

## Упражнение 17

Какая фигура получится при вращении правильной  $n$ -угольной призмы вокруг прямой, проходящей через центры ее оснований?

**Ответ:** Цилиндр.

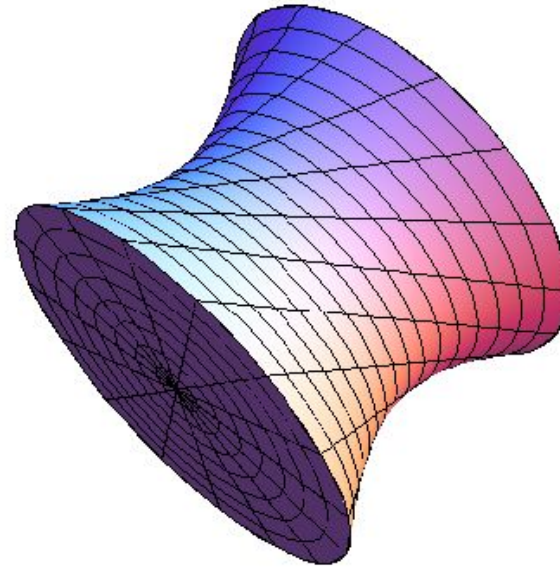
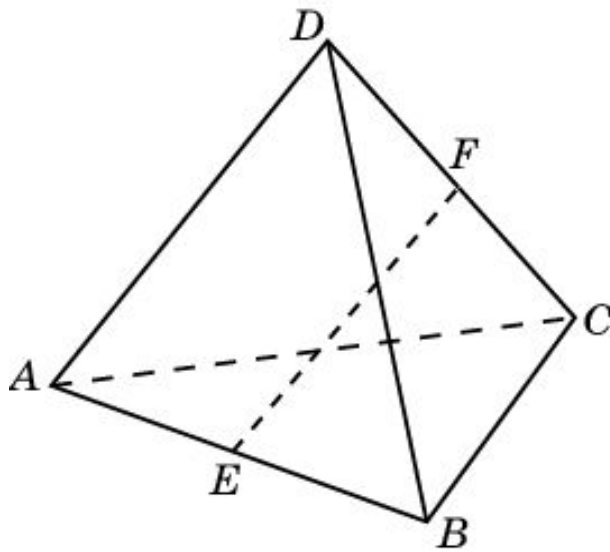
## Упражнение 18

Какая фигура получается при вращении правильной  $n$ -угольной пирамиды вокруг прямой, содержащей ее высоту?

**Ответ:** Конус.

## Упражнение 19

Какая фигура получается при вращении тетраэдра вокруг прямой, соединяющей середины скрещивающихся ребер?

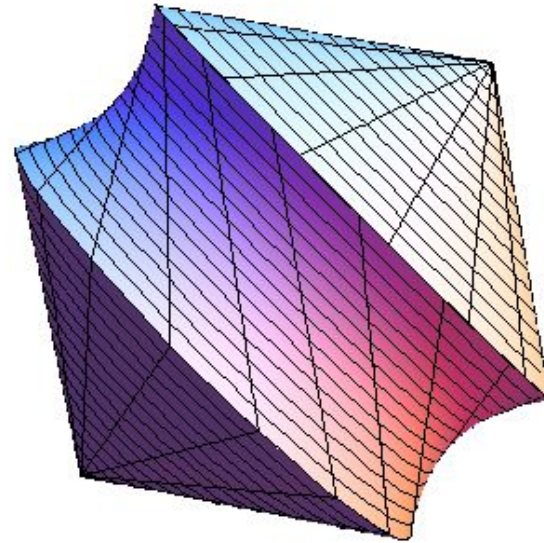
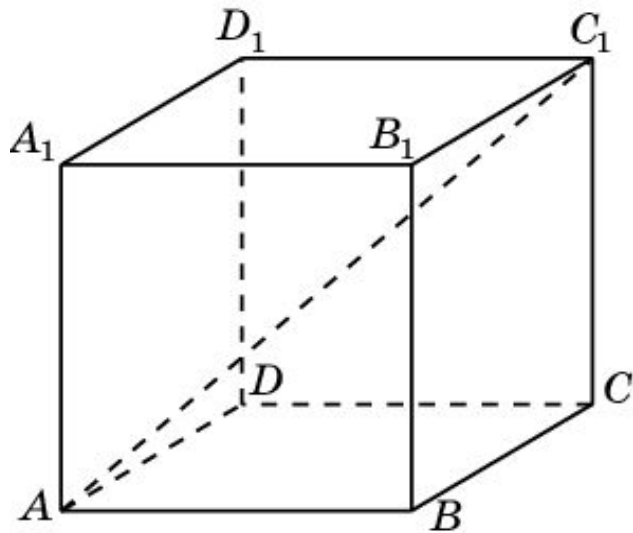


**Ответ:** Фигура, ограниченная двумя кругами и гиперболоидом вращения.



## Упражнение 20

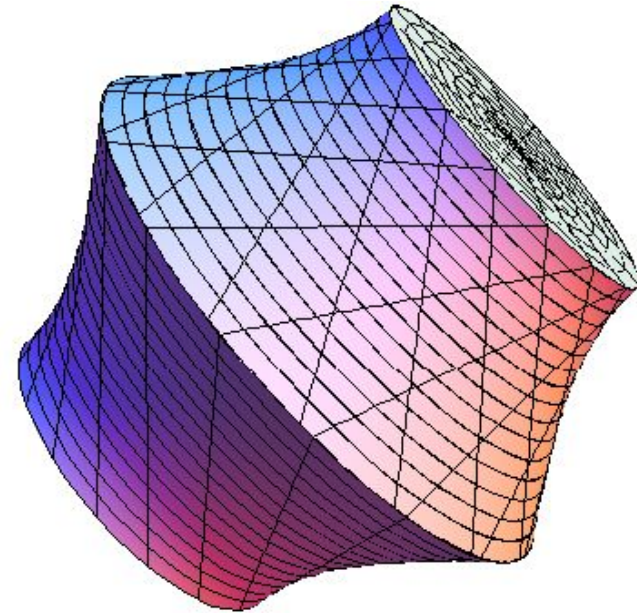
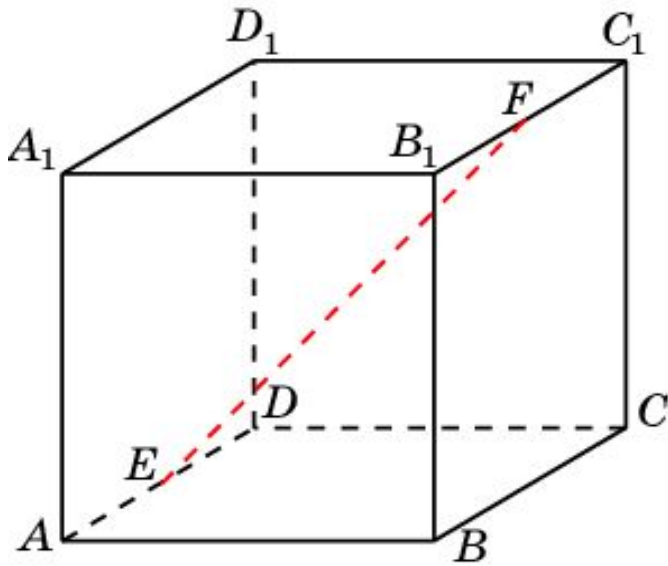
Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, содержащей его диагональ?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из боковых поверхностей двух конусов и гиперboloида вращения.

## Упражнение 21

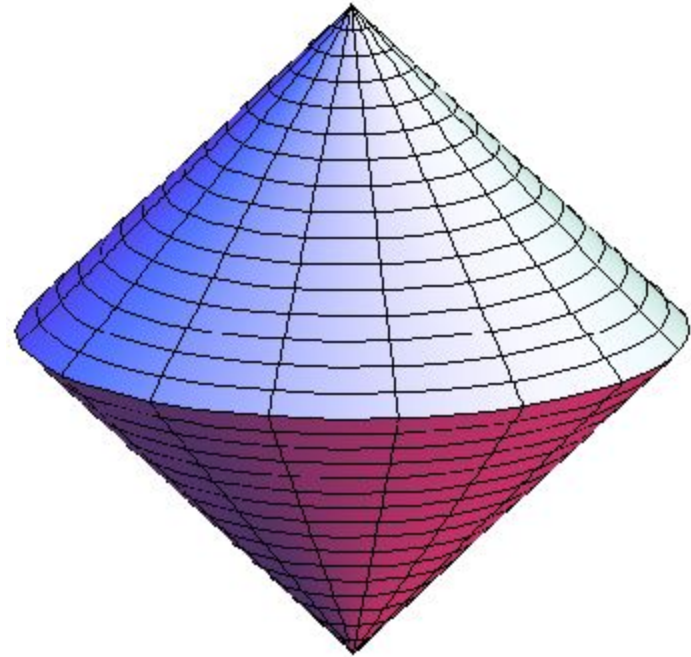
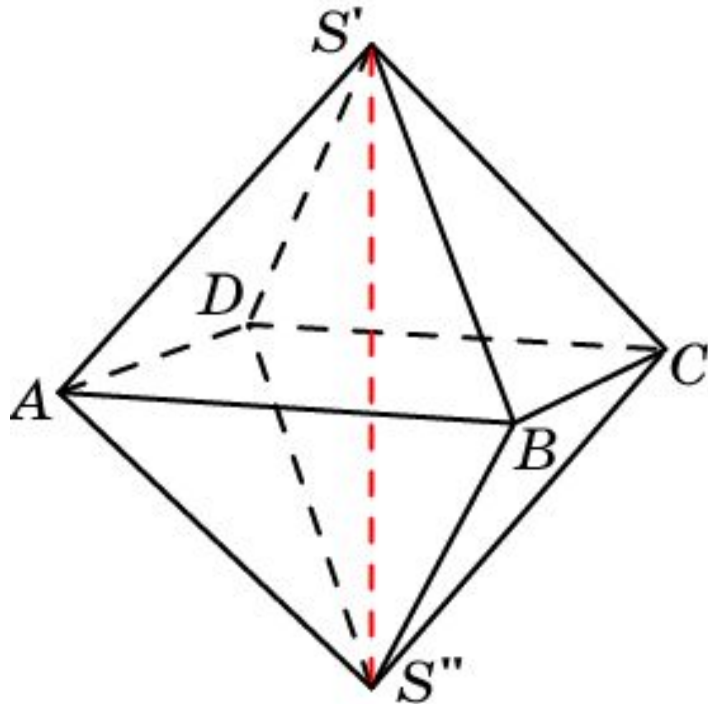
Какая фигура получается при вращении куба вокруг прямой, соединяющей середины двух противоположных ребер?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и двух гиперболоидов вращения.

## Упражнение 22

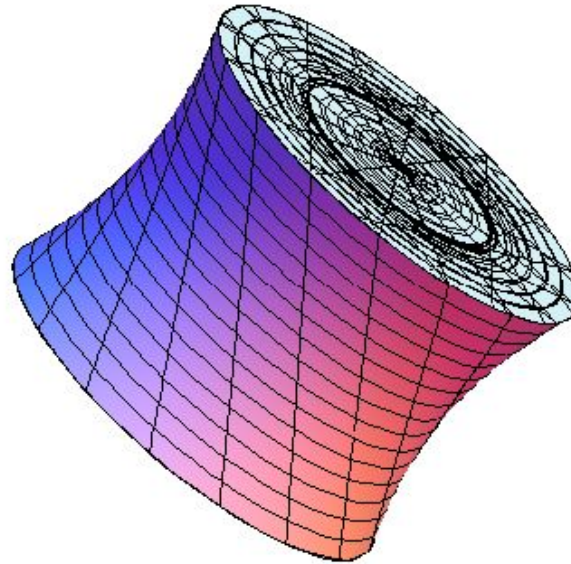
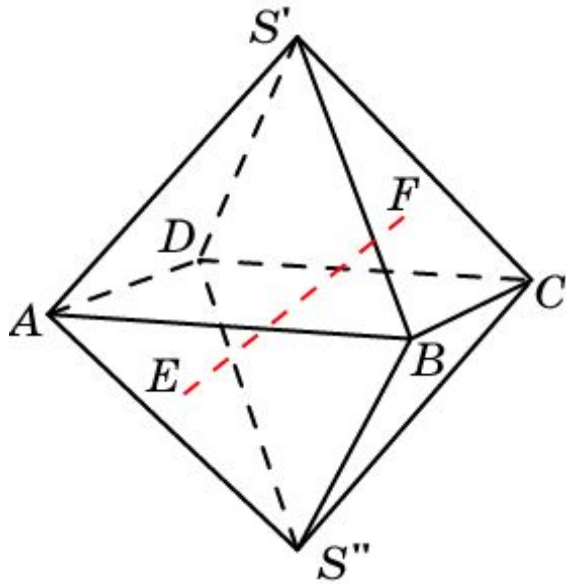
Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через две противоположные вершины?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из двух боковых поверхностей конусов.

## Упражнение 23

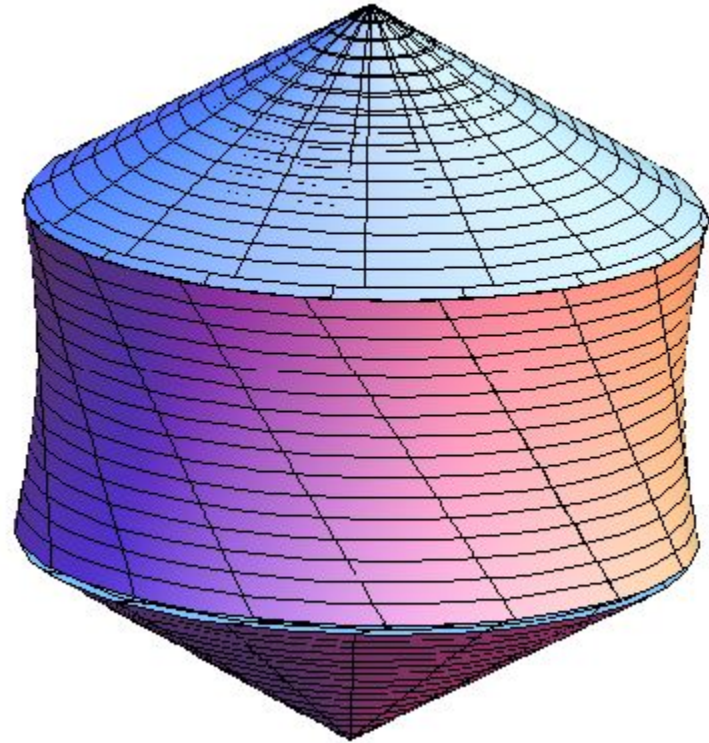
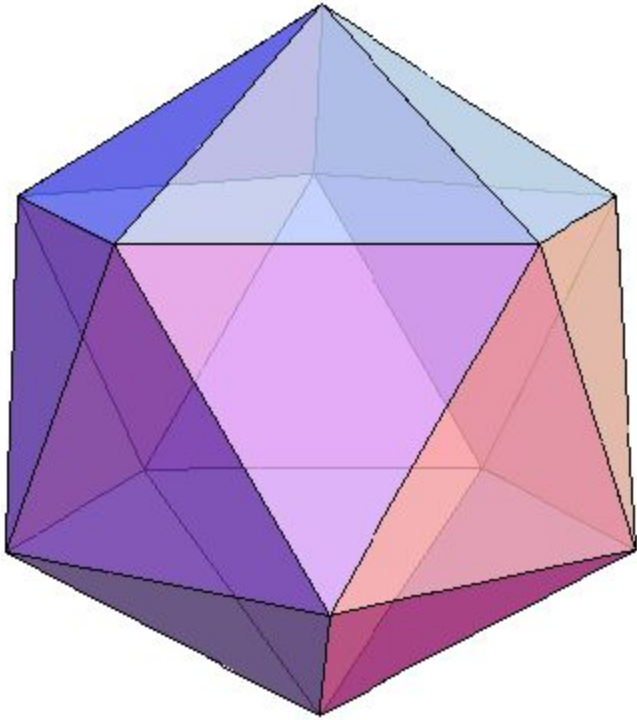
Какая фигура получается при вращении октаэдра вокруг прямой, проходящей через центры двух противоположных граней?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и гиперboloида вращения.

## Упражнение 24

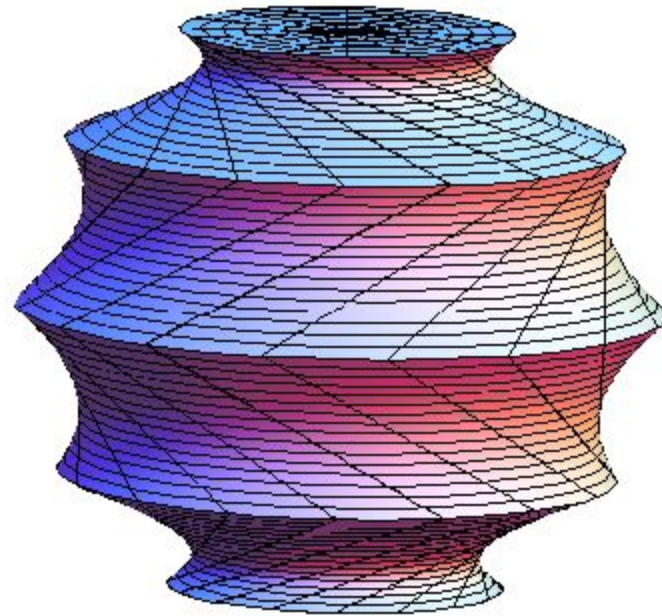
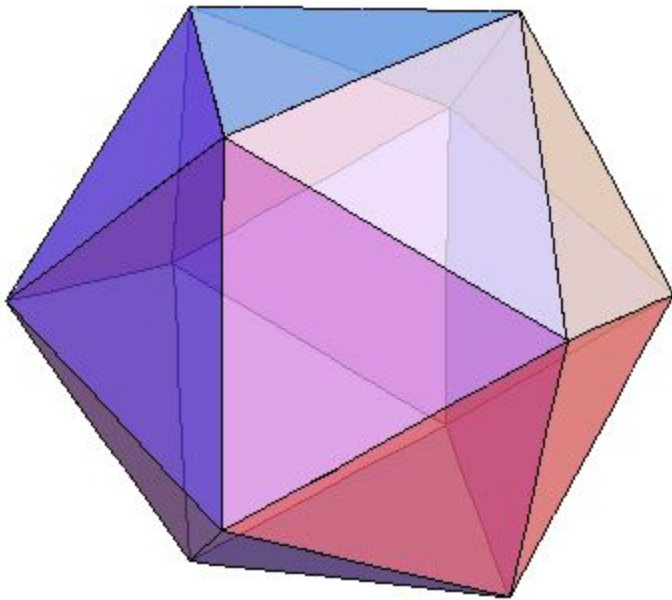
Какая фигура получается при вращении икосаэдра вокруг прямой, проходящей через две противоположные вершины?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из двух боковых поверхностей конусов и гиперboloида вращения.

## Упражнение 25

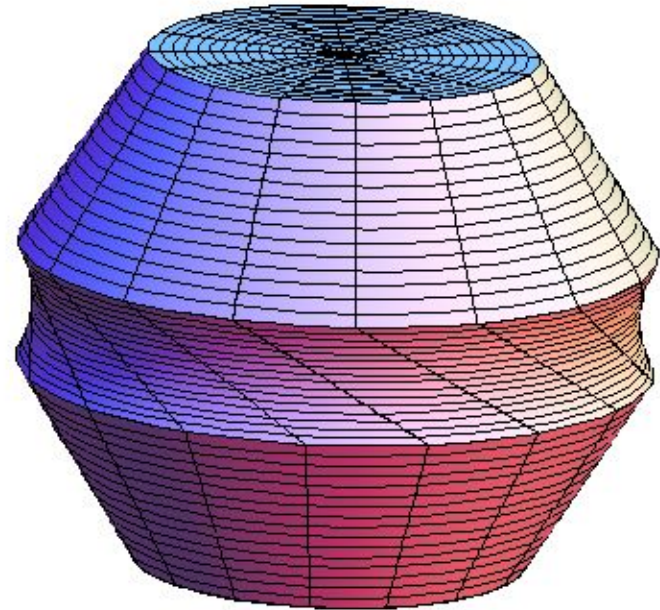
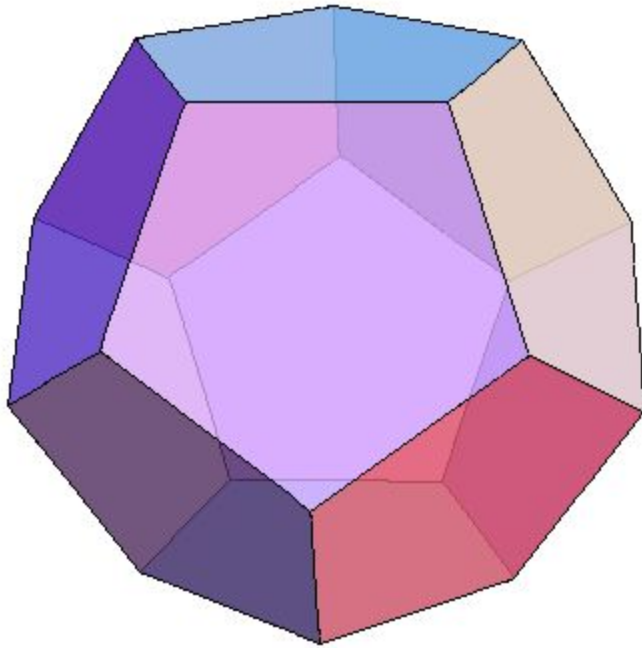
Какая фигура получается при вращении икосаэдра вокруг прямой, проходящей через середины двух противоположных ребер?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов и четырех гиперболоидов вращения.

## Упражнение 26

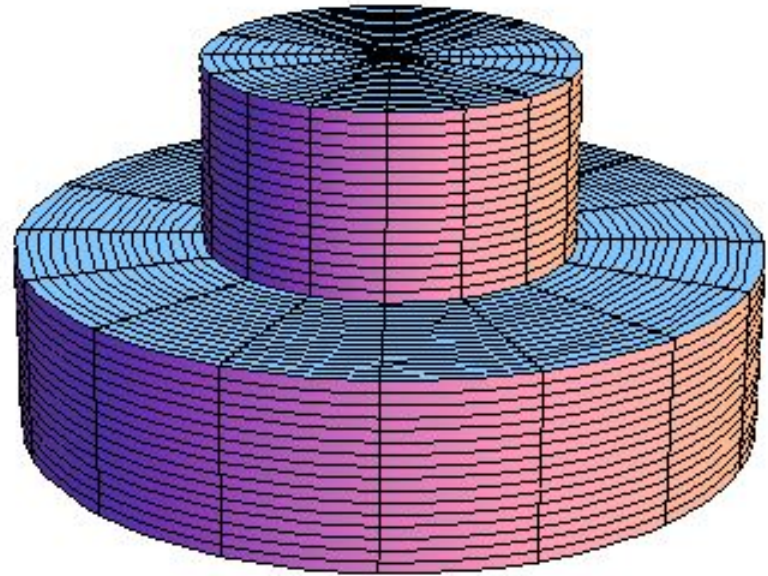
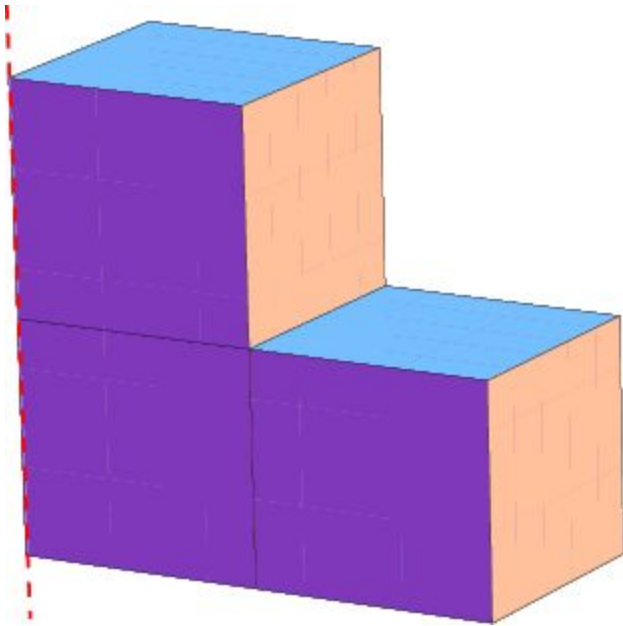
Какая фигура получается при вращении додекаэдра вокруг прямой, проходящей через центры двух противоположных граней?



**Ответ.** Фигура, поверхность которой состоит из двух кругов, двух боковых поверхностей усеченных конусов и гиперboloида вращения.

## Упражнение 27

Какая фигура получается при вращении многогранника, состоящего из трех кубов вокруг прямой, изображенной на рисунке?

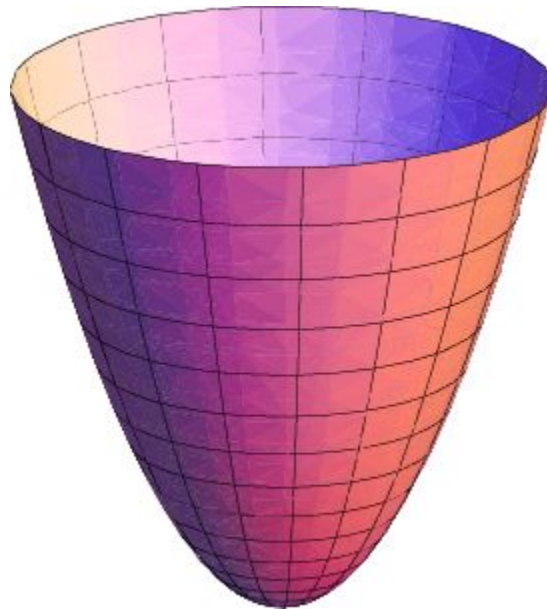


**Ответ.** Фигура, состоящая из двух цилиндров.



## Упражнение 28

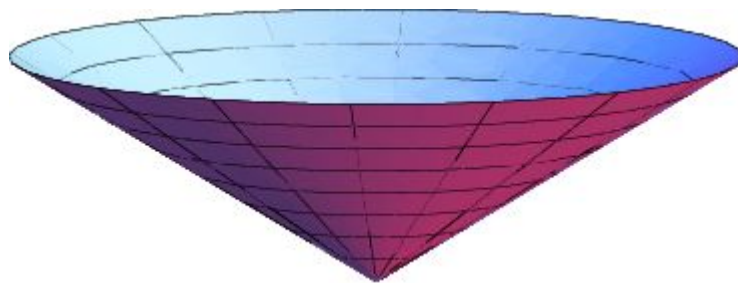
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ:  $y = x^2$ .

## Упражнение 29

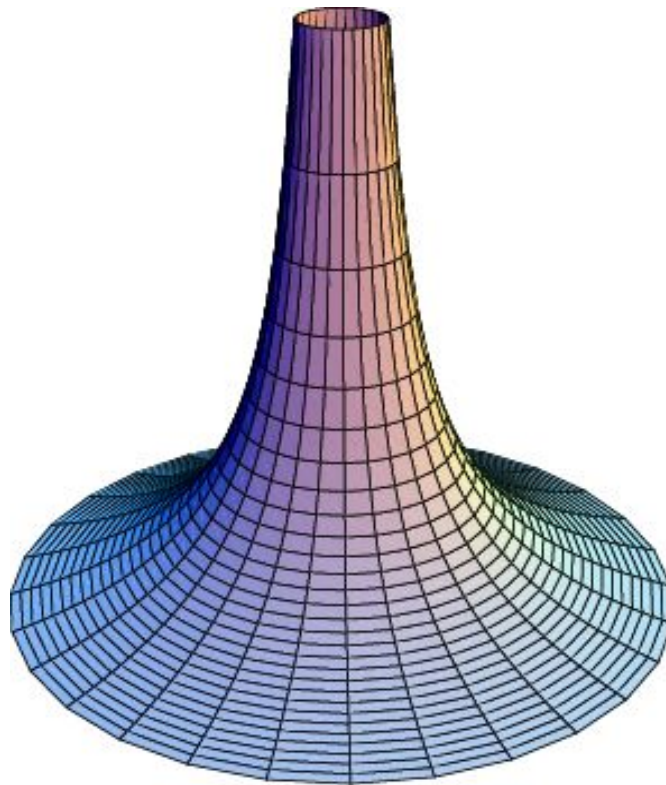
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ:  $y = |x|$ .

## Упражнение 30

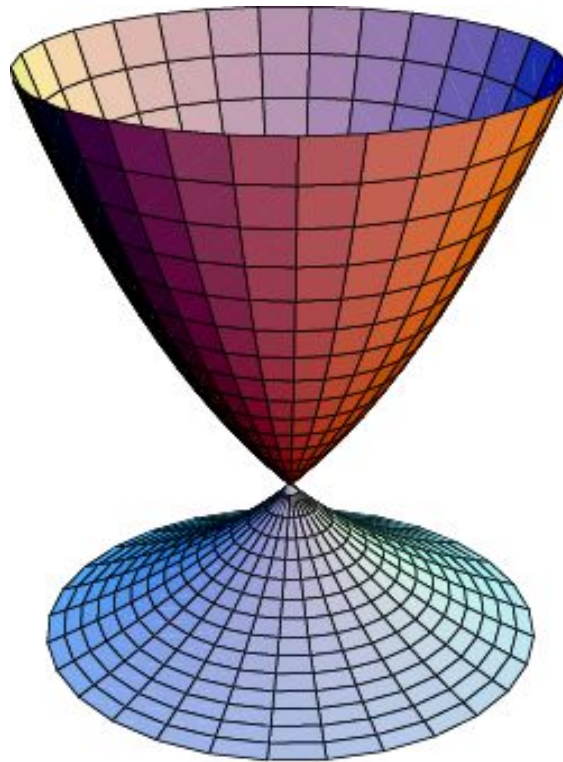
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ:  $y = \frac{1}{x}$ .

## Упражнение 31

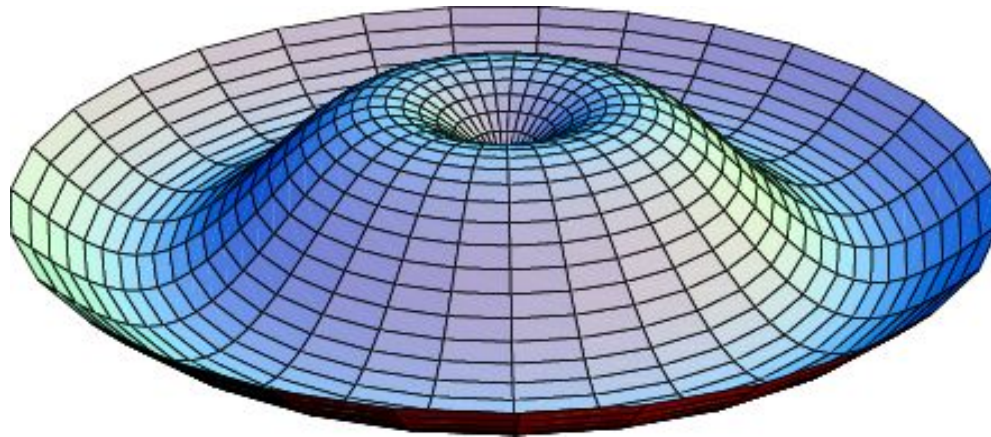
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



**Ответ:** Показательной функции.

## Упражнение 32

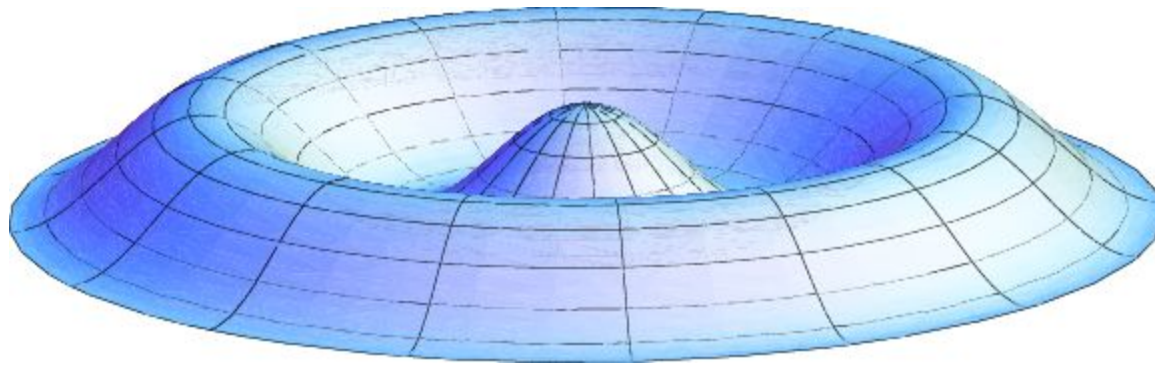
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



**Ответ:** Синусоиды.

## Упражнение 33

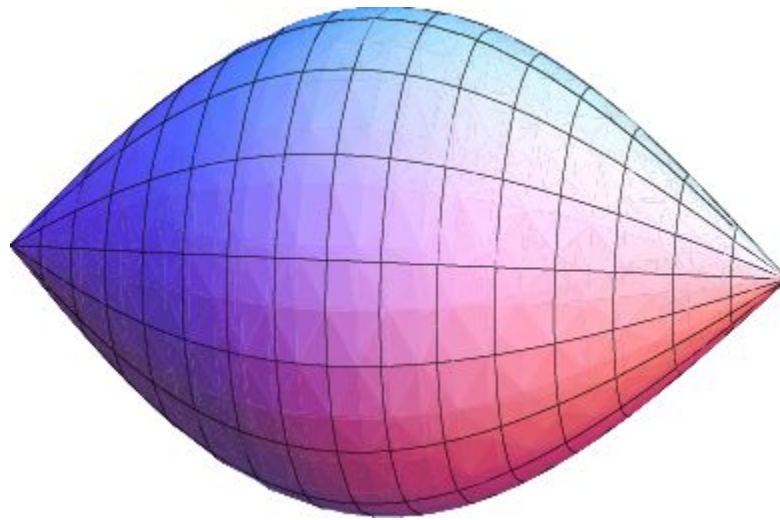
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



**Ответ:** Косинусоиды.

## Упражнение 34

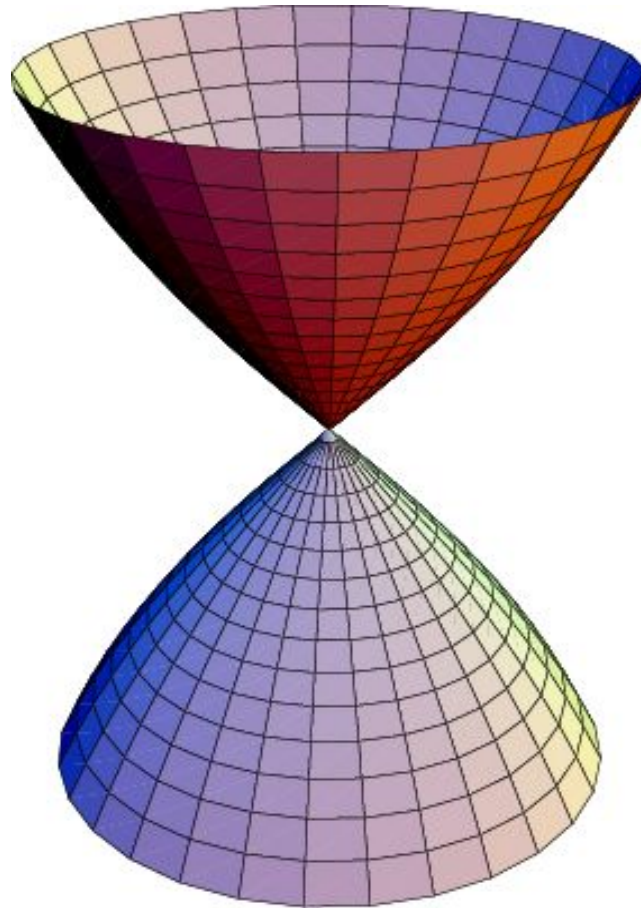
Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ:  $y = \sin x$ .

## Упражнение 35

Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?

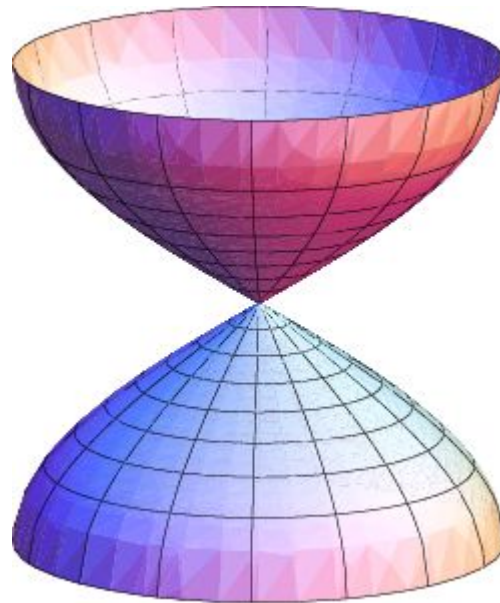


Ответ:  $y = \operatorname{tg} x$ .



## Упражнение 36

Вращением графика какой функции получена поверхность, изображенная на рисунке?



Ответ:  $y = \arcsin x$ .