Пределы функций

Понятие, основные определения, свойства, методы вычислений

План

I Понятие предела функции

II Геометрический смысл предела

III Бесконечно малые и большие функции и их свойства

IV Вычисления пределов:

1) Некоторые наиболее употребительные пределы;

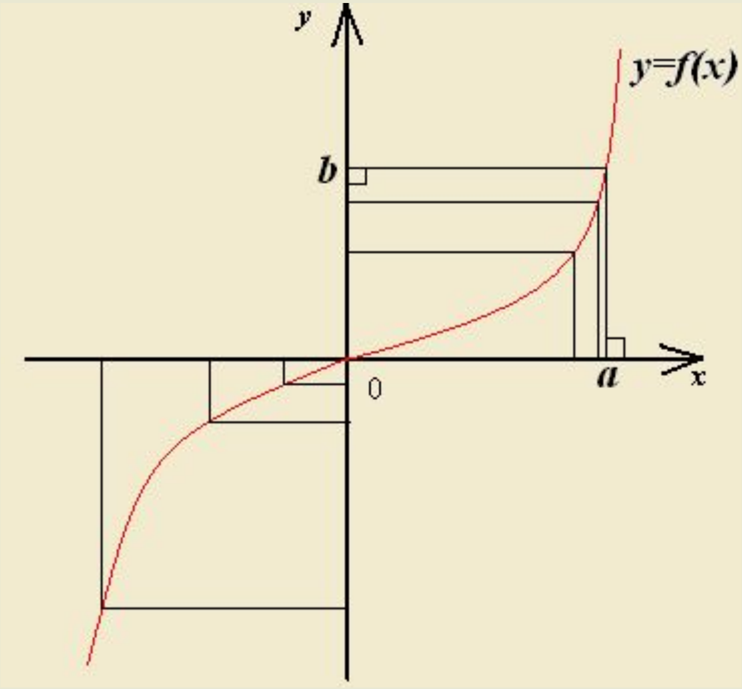
2) Пределы непрерывных функций;

3) Пределы сложных функций;

4) Неопределенности и методы их решений

Понятие предела функции

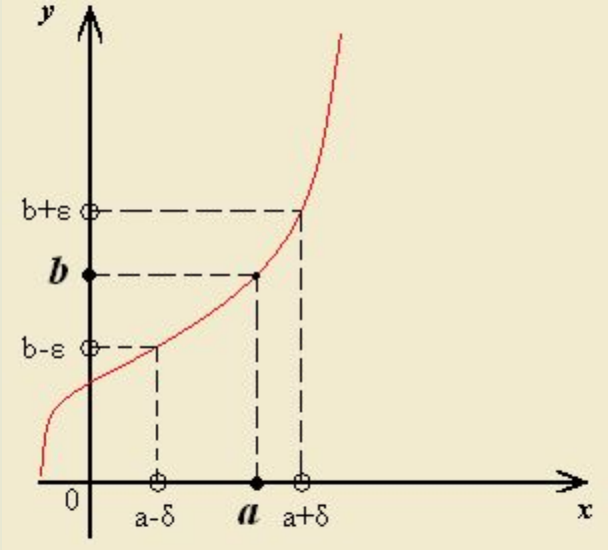
- *Определение:* ***Пределом функции*** $y = f(x)$ ***называется некоторое число b при x→a.***



- ***И записывается это так :*** $\lim_{x \to a} f(x) = b$

Геометрический смысл предела

Определение: *Для любого $\varepsilon>0$ можно указать δ-окрестность точки а на оси Ox ,такую что для всех x из этой окрестности кроме $x=a$, соответствующее значение y лежат в ε-окрестности точки b*



Математическая запись:

При $|x-a|<\delta$ *выполняется* $|f(x)-b|<\varepsilon$

$-\delta<x-a<\delta \leftrightarrow -\varepsilon<f(x)<\varepsilon$

$a-\delta<x<a+\delta \leftrightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$

$x\in(a-\delta;a+\delta) \leftrightarrow f(x)\in(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$

Геометрический смысл предела (продолжение)

- Если число b_1 есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$, так что $x<0$, то число b_1 называется левым односторонним пределом точки a: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1$
- Если число b_2 есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to a$, так что $x>0$ то число b_2 называется правым односторонним пределом точки a:
$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2$$
- Если $b_1 = b_2 = b$, то число b есть предел этой функции при $x \to a$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

Бесконечно малые и большие функции и их свойства

- ***Определение:*** Ф у н к ц и я ***f(x)*** называется бесконечно малой при $x \to a$ $(x \to \infty)$ если предел этой функции $$\lim_{x \to a (x \to \infty)} f(x) = 0$$

- ***Определение:*** Функция ***f(x)*** называется бесконечно большой при $x \to a$ $(x \to 0)$ если предел этой функции $$\lim_{x \to a (x \to 0)} f(x) = \infty$$

Свойства бесконечно малых и больших функции

- **Функция обратная по величине бесконечно большой, есть бесконечно малая**

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

- **Функция обратная по величине бесконечно малой, но отличная от 0, есть бесконечно малая**

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1: Для того, чтобы число А было пределом функции $\boldsymbol{f(x)}$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

Следствие 1: Функция не может в одной точке иметь 2 различных предела.

Теорема 2: Предел постоянной величины равен самой постоянной

Теорема 3: Если функция $f(x) \geq 0 (f(x) \leq 0)$ для всех $\boldsymbol{x}$ в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{a}$, кроме, быть может, самой точки $\boldsymbol{a}$, и в точке $\boldsymbol{a}$ имеет предел, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) \geq 0$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leq 0$

Основные теоремы о пределах (продолжение)

Теорема 4: Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют пределы при $x \to a$, то при $x \to a$, имеет пределы также их сумма $f_1(x)+f_2(x)$, произведение $f_1(x)*f_2(x)$, и при условии $\lim f_2(x) \neq 0$ частное $f_1(x)/f_2(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} f_1(x) / \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Следствие 2: Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$, где n – натуральное число.

Следствие 3: Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x), \text{C - const}$$

Неопределенности и методы их решений

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

- *Методы:*

1. ***Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением***
2. ***Устранение иррациональных разностей. Домножение на сопряженное.***
3. ***Первый замечательный предел.***

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Неопределенности и методы их решений

Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

- ***Методы:*** ***Деление на наибольшую степень***
- ***Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремится к ∞) равен пределу отношения их старших членов.***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}=\begin{cases}0 & (\mathrm{m}<\mathrm{n})\\ \dfrac{a_0}{b_0} & (\mathrm{m}=\mathrm{n})\\ \infty & (\mathrm{m}>\mathrm{n})\end{cases}$$

Здесь $\mathrm{a}_0\neq 0$ и $\mathrm{b}_0\neq 0$

Примеры:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 14x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$$