Интегральное исчисление. Дифференциальные уравнения

Элементы интегрального исчисления

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Основные приемы вычисления неопределенных интегралов
3. Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен
4. Интегрирование дробно-рациональных функций
5. Интегрирование тригонометрических функций
6. Интегрирование некоторых иррациональностей

Первообразная и неопределенный интеграл

Если $F(x)$- первообразная функции $f(x)$, то $F(x)+C$, где C - некоторая постоянная, также является первообразной функции $f(x)$.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная функции $f(x)$, то всякая функция вида $\Phi(x)=F(x)+C$ также является первообразной функции $f(x)$ и всякая первообразная представима в таком виде.

Первообразная и неопределенный интеграл

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$, определенных на некотором промежутке, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на этом промежутке и обозначается $\int f(x)dx$.

Определение 1.
Функция $F(x)$ называется **первообразной** для $f(x)$ в (a,b),
если $F(x)$ определена в (a,b) и $F'(x) = f(x)$

•Пример.

$$f(x) = \sin x \;\Rightarrow\; F(x) = -\cos x$$
$$(\text{ так как } (-\cos x)' = \sin x\ )$$

- **Теорема** (о разности первообразных)**.**

$$\boxed{\begin{array}{l} F(x)\ \text{и}\ G(x) - \text{первообразные} \\ \quad \text{для}\ f(x)\ \text{в}\ (a,b) \end{array}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F(x) - G(x) \equiv const}$$

- **Доказательство.**
- Обозначим через $\Phi(x) = F(x) - G(x)$.
- Пусть $x_1, x_2 \in (a,b)$.
- Функция $\Phi(x)$ удовлетворяет
- условиям теоремы Лагранжа:
- а) $\Phi(x) - \text{непрерывна на}\ [x_1, x_2]$
- б) $\exists\, \Phi'(x) = F'(x) - G'(x) \equiv$

$$\equiv f(x) - f(x) \equiv 0\ \ \text{в}\ (x_1, x_2)$$

$$\Rightarrow$$

$$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi'(c)(x_2 - x_1) = 0$$

$$\Rightarrow\ \Phi(x_2) = \Phi(x_1) \quad \forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$$

$$\Rightarrow\ \Phi(x) \equiv const.$$

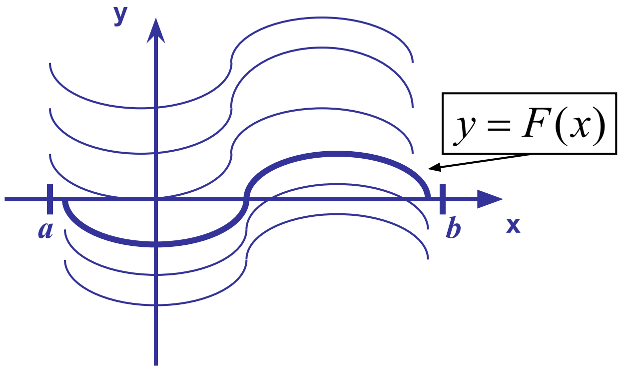
- **Следствие.**
- Пусть $F(x)$ первообразная для $f(x)$ в (a, b).
- Тогда любая другая первообразная

$$G(x) \equiv F(x) + C$$

- **Определение 2.**
- **Неопределенным интегралом** от $f(x)$
- называется **совокупность** всех первообразных

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$$

Графическая иллюстрация



- Пример.

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а его дифференциал- подынтегральному выражению. Действительно:

$$1.(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$2.d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

Свойства интеграла, вытекающие из определения

Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

3. $\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx = \varphi(x) + C,$

так как $\varphi(x)$ является первообразной для $\varphi'(x).$

Свойства интеграла

Сформулируем далее следующие свойства неопределенного интеграла:

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причем $\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;

5. $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$;

6. $\int f'(x)dx = f(x)+C$;

7. $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F[\varphi(x)]+C$.

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

Интегрирование по частям

Этот метод основан на формуле $\int u dv = uv - \int v du$.

Методом интегрирования по частям берут такие интегралы:

а) $\int x^n \sin x dx$, где $n = 1,2...k$;

б) $\int x^n e^x dx$, где $n = 1,2...k$;

в) $\int x^n arctgx dx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm k.$;

г) $\int x^n \ln x dx$, где $n = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm k$.

При вычислении интегралов а) и б) вводят обозначения: $x^n = u$, тогда $du = nx^{n-1}dx$, а, например $\sin x dx = dv$,тогда $v = -\cos x$.

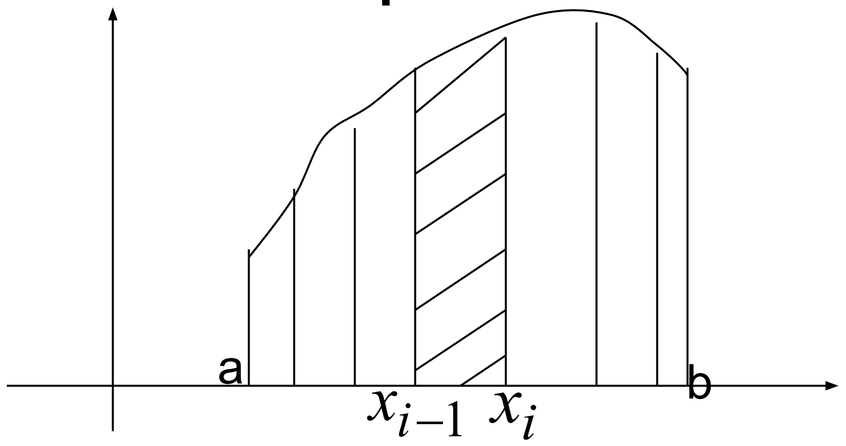
При вычислении интегралов в), г) обозначают за u функцию $arctgx$, $\ln x$, а за dv берут $x^n dx$.

Метод замены переменной

Пусть требуется найти $\int f(x)dx$, причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует. Часто удается найти первообразную, введя новую переменную, по формуле $\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi_t' dt$, где $x = \varphi(t)$, а t - новая переменная

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Решим задачу о вычислении площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, отрезками прямых $x = a$, $x = b$ и осью Ох.Такую фигуру называют криволинейной трапецией



Задача о вычислении площади плоской фигуры

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n = b$.

При этом криволинейная трапеция разобьется на n элементарных криволинейных трапеций. Заменим каждую такую криволинейную трапецию прямоугольником с основанием $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, где $i = 1, 2, .., n$ и высотой $h = f\left(\overline{x_i}\right)$, где $\overline{x_i}$ -произвольно выбранная внутри отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ точка.

Задача о вычислении площади плоской фигуры

Площадь прямоугольника будет равна $\Delta S_i = f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, а площадь всей криволинейной фигуры приблизительно будет равна сумме площадей всех прямоугольников:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i \quad .$$

Определенный интеграл

Определение.

Выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, где

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, называется

интегральной суммой функции $f(x)$

на отрезке $[a,b]$.

Определенный интеграл

Определение.

Если существует конечный $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f\left(\overline{x_i}\right)\Delta x_i$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части, ни от выбора точек $\overline{x_i} \in [x_{i-1}, x_i]$, то этот предел называется определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Определенный интеграл

Замечание.

С геометрической точки зрения

при $f(x) \geq 0$ $\int\limits_a^b f(x)dx$ равен

площади криволинейной трапеции

Теорема о существовании определенного интеграла

Теорема.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \Delta x_i$ существует и конечен, т.е.

существует и конечен $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

2. $\int_a^b dx = b - a$;

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$;

Свойства определенного интеграла

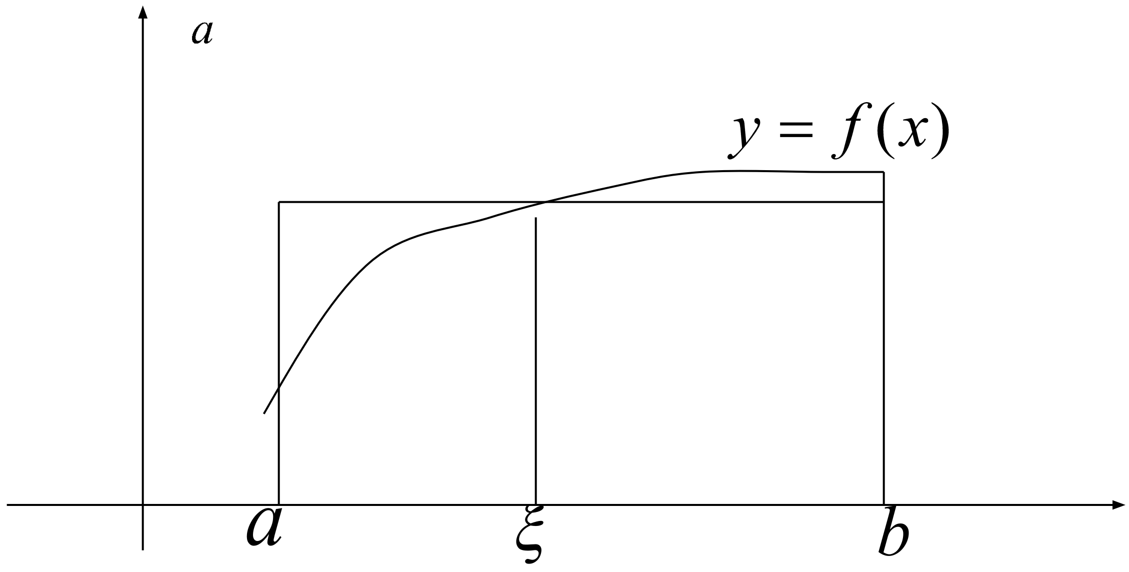
5. $\int\limits_a^b Kf(x)dx = K\int\limits_a^b f(x)dx$;

6. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$;

7. $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$, если $f(x) \geq 0$.

Теорема о среднем

Если функция непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $\xi \in [a,b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.



Вычисление определенного интеграла

Теорема.

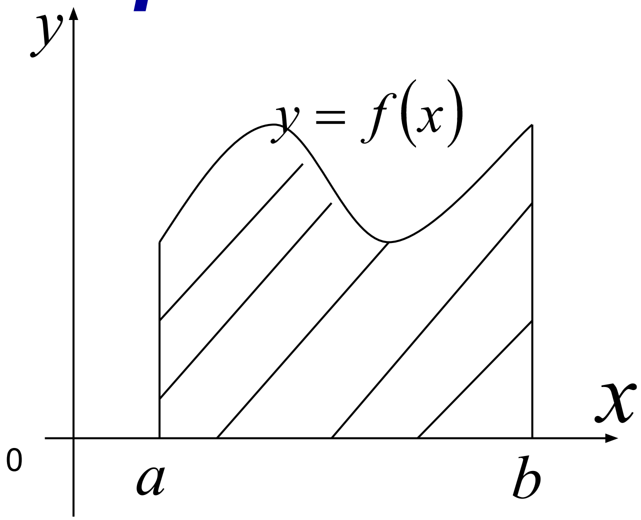
Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница, из которой следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо найти первообразную подынтегральной функции.

Вычисление площадей

Площадь фигуры в декартовых координатах.



Площадь такой фигуры, называемой криволинейной трапецией, вычисляют по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Уравнение первого порядка

Функциональное уравнение

$F(x,y,y') = 0$ или $y'= f(x,y)$, связывающее между собой независимую переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется *дифференциальным уравнением первого порядка.*

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \phi(x,C)$, которая при любом значении параметра С является решением этого дифференциального уравнения.

Уравнение Ф(x,y,C) =0, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

Постановка задачи Коши

Задача отыскания решения дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad ,$$

удовлетворяющего начальному условию

$y = y_0$ при $x = x_0$, называется *задачей Коши для уравнения 1-го порядка.*

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$f(x)dx = g(y)dy$$

называется уравнением с *разделенными переменными.*

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с *разделяющимися переменными*, если оно имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad .$$

Для решения уравнения делят обе его части на произведение функций

$$N_1(y)M_2(x) \quad ,$$

а затем интегрируют.

Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду y′= $f(\frac{y}{x})$ или к виду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ где $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одного порядка .

Линейные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x) \quad .$$

Решают такое уравнение с помощью подстановки y=uv, где u и v-вспомогательные неизвестные функции, которые находят, подставляя в уравнение вспомогательные функции и на одну из функций налагают определенные условия.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1-го порядка, имеющее вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m,$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$

Его, как и линейное уравнение решают с помощью подстановки

$$y = uv$$

Основные понятия

Уравнение 2-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Или $$y'' = f(x, y, y')$$

Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, которая при любых значениях параметров c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Задача Коши для уравнения 2-го порядка

Если уравнение 2-го порядка разрешить относительно второй производной, то для такого уравнения имеет место задача: найти решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$,

удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$

Эту задачу называют *задачей Коши* для дифференциального уравнения 2-гопорядка.

Теорема существования и единственности решения уравнения 2-го порядка

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по аргументам y и y' непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0, y'_0) ,

то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$

Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение

Простейшее уравнение 2-го порядка $y'' = f(x)$ решают двукратным интегрированием.

Уравнение $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно y, решают с помощью подстановки $y' = p$, $y'' = p'$

Уравнение $F(y, y', y'') = 0$ не содержащее x, решают заменой

$$y' = p , \qquad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

Линейные однородные уравнения

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение . $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Если все коэффициенты этого уравнения постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами .

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ ***называется характеристическим уравнением*** линейного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Оно получается из ЛОУ заменой соотстветствующей порядку производной степенью k .

Вывод формул общего решения ЛОУ 2-го порядка

Корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Случай 1. Если $\frac{p^2}{4} - q > 0$, то характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня $k_1 \neq k_2 \in R$

В этом случае общее решение имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

Случай 2. Если $\frac{p^2}{4} - q = 0$, то характеристическое уравнение имеет одинаковые корни $k_1 = k_2 = k$.

Частные решения ЛОУ выбираем так, чтобы они были линейно независимыми:

$y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$.

Общее решение ЛОУ 2-го порядка будет иметь вид $y = e^{kx}(C_1 + xC_2)$.

Случай 3. Если $\frac{p^2}{4} - q < 0$, то характеристическое уравнение имеет два комплексно-сопряженных корня

$k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$, где $\alpha = -\frac{p}{2}$

и $\beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Общее решение ЛОУ 2-го порядка в действительной форме можно записать в виде $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$


СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!