

Формула

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, тогда $d(u(x) \cdot v(x)) = u(x)dv(x) + v(x)du(x)$ откуда $u(x)dv(x) = d(u(x) \cdot v(x)) - v(x)du(x)$. Интегрируя последнее равенство получим:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

или в сокращённой форме:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*.

Рекомендации применения метода

Интегрирование по частям применяется в интегралах вида (в нижеследующих равенствах показано, как подводить интегралы к формуле интегрирования по частям)

$$\int x^n \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \int \underbrace{x^n}_u \underbrace{d \sin \alpha x}_v$$

$$\int x^n \sin \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} \int \underbrace{x^n}_u \underbrace{d \cos \alpha x}_v$$

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int \underbrace{x^n}_u \underbrace{d e^{\alpha x}}_v$$

$$\int x^n \ln^k x dx = \frac{1}{n+1} \int \underbrace{\ln^k x}_u \underbrace{dx^{n+1}}_v$$

$$\int x^n \arcsin^k x dx = \frac{1}{n+1} \int \underbrace{\arcsin^k x}_u \underbrace{dx^{n+1}}_v$$

$$\int x^n \operatorname{arctg}^k x dx = \frac{1}{n+1} \int \underbrace{\operatorname{arctg}^k x}_u \underbrace{dx^{n+1}}_v$$

$$\int \frac{x^k dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{x^{k-1} dx^2}{(1+x^2)^m} = \frac{-1}{2(m-1)} \int \underbrace{x^{k-1}}_u \underbrace{d \frac{1}{(1+x^2)^{m-1}}}_v$$

Примеры нахождения первообразных

Пример 1. Вычислить интеграл $\int x e^x dx$.

Решение. Внесем e^x под знак дифференциала и применим формулу интегрирования по частям, обозначив $x = U$ и $e^x = V$:

$$\int x e^x dx = \int \underbrace{x}_U \underbrace{d e^x}_V = \underbrace{x \cdot e^x}_{U \cdot V} - \int \underbrace{e^x}_V \underbrace{d x}_U = x e^x - e^x + C$$

Пример 2. Найти интеграл $\int x^2 \cos 2x dx$

Р е ш е н и е. Внесем $\cos 2x$ под знак дифференциала, помня что $\int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} + C$:

$$\int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int x^2 d \sin 2x =$$

и, обозначив $x^2 = U$, $\sin 2x = V$, применим формулу интегрирования по частям

$$= \frac{1}{2} \int \underbrace{x^2}_{U} \underbrace{d \sin 2x}_{V} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{x^2 \cdot \sin 2x}_{U \cdot V} - \int \underbrace{\sin 2x}_{V} \underbrace{d x^2}_{U} \right) =$$

так как $dx^2 = (x^2)' dx = 2x dx$, то

$$= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \int 2x \sin 2x dx =$$

найдем отдельно интеграл, повторно применяя метод интегрирования по частям

$$\int 2x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int \underbrace{2x}_{U} \underbrace{d \cos 2x}_{V} = - (x \cos 2x - \int \cos 2x dx) = -x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x dx &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x - \frac{1}{2} \cdot (-x \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x) + C = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Решение. Внесем x под знак дифференциала и проведем ряд преобразований:

$$= \int \frac{x d \frac{x^2}{2}}{\sqrt{(x^2+1)^3}} = \frac{1}{2} \int x (x^2+1)^{-\frac{3}{2}} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \int x d \frac{(x^2+1)^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} = - \int x d \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$$

Обозначим $x = U$, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = V$ и применим формулу интегрирования по частям:

$$- \int \underbrace{x}_U d \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}_V = - \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} \right) = - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int e^x \cos x dx$.

Решение. Внесем e^x под знак дифференциала и проинтегрируем по частям

$$\int e^x \cos x dx = \int \underbrace{\cos x}_U d \underbrace{e^x}_V = e^x \cos x - \int e^x d \cos x = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx =$$

И снова применим формулу, внося e^x под знак дифференциала:

$$\begin{aligned} &= e^x \cos x + \int \underbrace{\sin x}_U d \underbrace{e^x}_V = e^x \cos x + (e^x \sin x - \int e^x d \sin x) = \\ &= e^x (\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

Вернулись к исходному интегралу. Обозначим его I и запишем уравнение:

$$I = e^x (\cos x + \sin x) - I,$$

решая которое, находим искомый интеграл

$$I = \frac{e^x}{2} (\cos x + \sin x) + C.$$

З а м е ч а н и е: Интегралы такого типа, в которых применение несколько раз метода интегрирования по частям приводит к исходному интегралу, называются циклическими.

Найти интеграл $\int x \sin 2x dx$

- $\frac{\cos 2x}{4} - x \sin 2x + C$
- $\frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{2} \cos 2x + C$
- $\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2} \cos 2x + C$
- $\sin 2x - x \cos 2x + C$

Найти интеграл $\int x3^x dx$

- $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x - 1) + C$
- $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x \ln 3 - 1) + C$
- $3^x(x \ln^2 3 - 1) + C$
- $3^x(x \ln 3 - 1) + C$

Найти интеграл $\int (x^2 - 2x + 3) \cos x dx$

- $(x^2 - 2x + 1) \sin x - 2(x - 1) \cos x + C$
- $(x^2 - 2x + 3) \cos x + 2(x - 1) \sin x + C$
- $(x^2 - 2x + 1) \sin x - (x - 1) \cos x + C$
- $(x^2 - 2x + 1) \sin x + 2(x - 1) \cos x + C$

Найти интеграл $\int \arccos x dx$

- $x \arccos x - \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} + C$
- $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
- $x \arccos x + \sqrt{1-x^2} + C$
- $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$

Найти интеграл $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

- $\frac{3}{2} \ln \sqrt[3]{x^2} - \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^2} + C$
- $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \ln x + \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^2} + C$
- $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x} \ln x - \frac{9}{4} \sqrt[3]{x} + C$
- $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} \ln x - \frac{9}{4} \sqrt[3]{x^2} + C$

Найти интеграл $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx$

- $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) \ln x + \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} + C$
- $\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right) \ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{4} - x + C$
- $(x^3 - x^2 + x) \ln x - x^3 + x^2 - x + C$
- $(x^2 + x - 1) \ln x - x^3 - x^2 - x + C$

Найти интеграл $\int x^2 e^{-x} dx$

- $-(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C$
- $-(x^2 + 2) e^{-x} + C$
- $-(x^2 + 2x + 2) e^x + C$
- $(x^2 + 2x + 2) e^{-x} + C$

Найти интеграл $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx$

- $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2} + C$
- $(x^2 + 1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$
- $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$
- $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - x + C$

Найти интеграл $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

- $x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\sin x| + C$
 - $x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + C$
 - $x \cdot \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$
 - $x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + C$
-

Найти интеграл $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}} dx$

- $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$
- $2\sqrt{x-1} \arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$
- $2\sqrt{x+1} \arcsin x + \sqrt{1-x} + C$
- $2\sqrt{x+1} \arcsin x + 4\sqrt{1-x} + C$