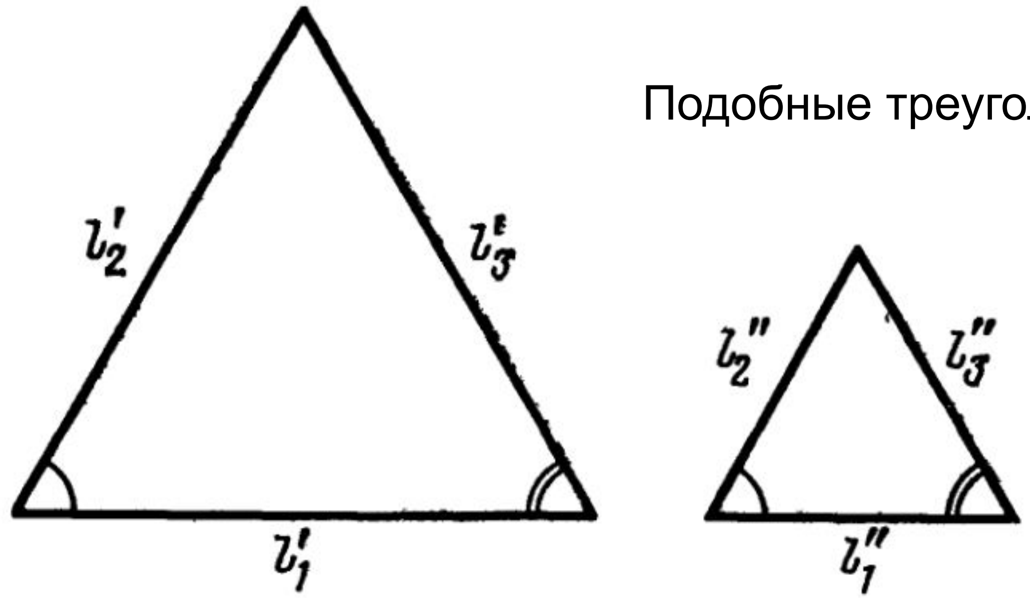
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии



Подобные треугольники

Математическая формулировка геометрического подобия

$$l_1''/l_1' = l_2''/l_2' = l_3''/l_3' = c_l$$

Где Cl – постоянная геометрического подобия

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии

1. Понятие подобия в отношении физических явлений применимо только к явлениям одного и того же рода, которые качественно одинаковы и аналитически описываются уравнениями, одинаковыми как по форме, так и по содержанию.
   Если же математическое описание каких-либо явлений одинаково по форме, но различно по физическому содержанию, то такие явления называются <u>аналогичными</u>.
2. Обязательной предпосылкой подобия физических явлений является <u>геометрическое подобие</u>.
3. При анализе подобных явлений сопоставлять можно только однородные величины и лишь в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени.

<u>Однородными</u> называются величины, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность.
<u>Сходственными точками</u> геометрически подобных систем называются такие, для которых выполняется условие (3-1)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии

Для <u>сходственных точек</u> координаты удовлетворяют условию:

$$x'' = c_l x', \quad y'' = c_l y', \quad z'' = c_l z'$$

Два промежутка времени $T`$ и $T``$ называются <u>сходственными</u>, если они имеют общее начало отсчета и связаны преобразованием подобия, т.е. $T`` = c_T T`$

4. Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления. Это означает, что в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени любая величина $\phi`$ первого явления пропорциональна однородной с ней величине $\phi``$ второго явления:

$$\phi`` = c_\phi \phi`$$

$c\phi$ - *константа (постоянная) подобия*

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии

Каждая величина ϕ имеет свою константу подобия, численно отличающуюся от других.
Для того, чтобы различать константы подобия, их снабжаю соответствующими индексами

Сущность подобия двух явлений означает подобие полей одноименных физических величин, определяющих эти явления

Соотношения между константами подобия – ключ теории подобия
Эти соотношения устанавливают существование особых величин, называемых <u>числами подобия</u> (инвариантами)

<u>Числа подобия</u> являются безразмерными комплексами, составлен-ными из величин, характеризующих явление.
Нулевая размерность – характерное свойство чисел подобия

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии

Re (Reynolds)

Eu (Euler)

Nu (Nusselt)

$$\alpha' = -\frac{\lambda'}{\Delta t'}\left(\frac{\partial t'}{\partial n'}\right)_{n'=0}$$

$$\alpha'' = -\frac{\lambda''}{\Delta t''}\left(\frac{\partial t''}{\partial n''}\right)_{n''=0}$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии

$$C_\alpha = \frac{\alpha''}{\alpha'} \qquad C_\lambda = \frac{\lambda''}{\lambda'} \qquad C_t = \frac{\Delta t''}{\Delta t'} \qquad C_l = \frac{n''}{n'} = \frac{l''}{l'}$$

l – характерный размер системы

$$\alpha'' = C_\alpha \alpha' \qquad \lambda'' = C_\lambda \lambda'$$ и т.д.

$$\alpha' = -\frac{C_\lambda}{C_\alpha C_l} \frac{\lambda'}{t'} \left(\frac{\partial t'}{\partial n'} \right)_{n'=0}$$

$$\boxed{\frac{C_\lambda}{C_\alpha C_l} = 1}$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ
Подобие явлений, моделирование, аналогии

$$\frac{\alpha' l'}{\lambda'} = \frac{\alpha'' l''}{\lambda''}$$

Число Нуссельта $$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = idem$$

В случае, если число подобия представляет собой соотношение двух величин одной природы (например, отношение длины к диаметру) его называют <u>симплексом</u>

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Теоремы подобия

Первая теорема подобия. У подобных явлений одноименные числа подобия одинаковы.

Вторая теорема подобия. Если физическое явление описывается системой дифф. уравнений, то интеграл этой системы можно представить как функцию чисел подобия, полученных из дифф. уравнений.

Таким образом, числа подобия могут быть получены из дифф. уравнений, Описывающих данное явление.

Из второй теоремы подобия следует, что зависимость между переменными может быть представлена в виде зависимости между числами подобия $K_1, K_2, K_3 \ldots K_n$

$$f(K_1, K_2, \ldots, K_n) = 0$$

Уравнение подобия

Для подобных явлений уравнения подобия также одинаковы, следовательно можно переносить результаты опыта на подобные процессы (явления)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Теоремы подобия

<u>Третья теорема подобия</u>. Подобны те процессы (явления), условия однозначности которых подобны. (Числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, должны иметь одинаковые численные значения)

Числа подобия, составленные из величин, входящих в условия однозначности, называются <u>определяющими</u> или <u>критериями подобия</u>
Остальные числа подобия называют <u>определяемыми</u>

Таким образом, теория подобия позволяет, не интегрируя дифференциальных уравнений, получить из них числа подобия и, используя опытные данные, установить уравнения подобия, которые справедливы для всех подобных между собой процессов (явлений)

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Условия однозначности

Условия однозначности включают в себя:

- Геометрические условия, характерную форму и размеры тела, в которых протекает процесс.
- Физические условия, характеризующие свойства среды и тела.
- Временные (начальные) условия, характеризующие распределение
- Температур в изучаемом теле в начальный момент времени.
- Граничные условия, характеризующие взаимосвязь тела с окружающей
- Средой
- Физические параметры (условия) - λ, *c*, ρ и другие, и их функции.

Начальные условия применяю при рассмотрении нестационарных процессов, в общем случае:

$$\tau = 0 \qquad T = f(x, y, z)$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Граничные условия (ГУ)

Граничные условия задаются четырьмя основными способами:

Граничные условия I-го рода. Задаются распределением температуры на поверхности тела для каждого момента времени.

$$T_n = f(x, y, z, \tau)$$

Где T_n – температура на поверхности тела

Частный случай T_n = *const*

Граничные условия II-го рода. Задаются значения теплового потока момента для каждой точки поверхности и любого момента времени.

$$q_n = f(x, y, z, \tau)$$

Где q_n – плотность теплового потока на поверхности тела

В простейшем случае q_n = *const*

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Граничные условия (ГУ)

Граничные условия III-го рода. Задаются $t_{ж}$ ($T_{ж}$) – температурой Окружающей среды и законом теплообмена между поверхностью и средой.

Граничные условия III-го рода характеризуют закон теплообмена между поверхностью и окружающей средой для нагреваемого или охлаждаемого тела.

Обычно задается законом Ньютона-Рихмана:

$$q = \alpha(t_{ст} - t_{ж})$$

Математическая формулировка ГУ III-го рода:

$$\left(\frac{dt}{dn}\right)_{ст} = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(t_{ст} - t_{ж}\right)$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Граничные условия (ГУ)

Граничные условия IV-го рода. Система тел взаимодействует по закону теплопроводности (идеальный контакт):

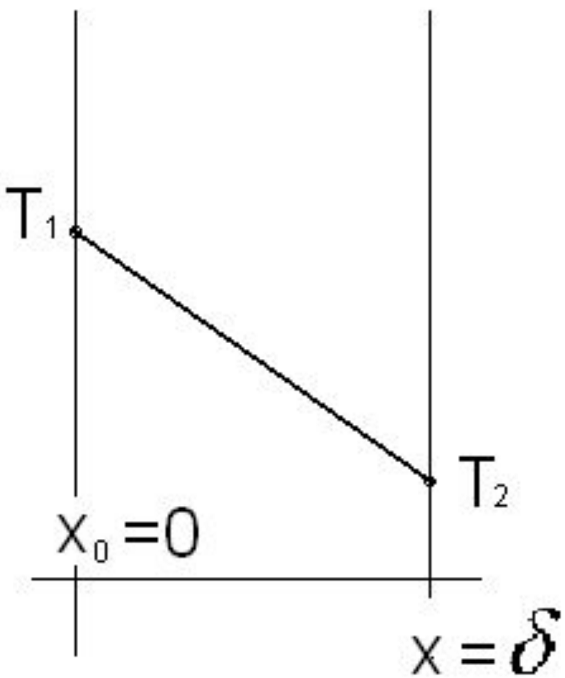
$$\lambda_1 \left(\frac{dt_1}{dn} \right)_{пов} = \lambda_2 \left(\frac{dt_2}{dn} \right)_{пов}$$

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_2} = const$$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Подобие явлений, моделирование, аналогии

Безразмерные величины



$$\Theta = \frac{T_1 - T}{\Delta T}$$

$$X = \frac{x - x_0}{\delta}$$