Дисциплина

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Кафедра математических методов в экономике

Тема 2
Многокритериальная оптимизация

- Формулировка многокритериальной задачи.
- Множество Парето.
- Задача линейной многокритериальной максимизации с двумя переменными и двумя целевыми функциями.
- Применение метода идеальной точки.
- Пример решения экономической задачи с двумя критериями эффективности.
- Применение симплексного метода при решении многокритериальных задач.

2.1. Формулировка многокритериальной задачи

На практике при решении задач, связанных с принятием решений, нередко приходится учитывать набор из нескольких несоизмеримых, противоречивых целевых функций, которые необходимо рассматривать одновременно. Расширением математического программирования с единственной целевой функцией на случай нескольких целевых функций является *многокритериальное программирование*, или *многокритериальная оптимизация*.

Задача выбора наилучшего проектного решения.

Необходимо принять решение о строительстве нового предприятия. Для этого из нескольких конкурсных проектов необходимо выбрать один. Критериями эффективности могут служить *стоимость реализации проекта* и *величина прибыли*, которую обеспечит построенное предприятие. Если ограничить рассмотрение задачи лишь одним критерием эффективности, практическая значимость её решения окажется незначительной. Так как при использовании только первого критерия будет выбран самый дешёвый проект, но его реализация может привести к недопустимо малой прибыли. С другой стороны, на строительство самого прибыльного проекта, выбранного на основе второго критерия эффективности, может просто не хватить имеющихся средств. Поэтому в данной задаче необходимо учитывать оба указанных критерия одновременно. Если же дополнительно стараться минимизировать нежелательные экологические последствия строительства и функционирования предприятия, то к двум указанным следует добавить еще один – третий критерий и т. д. Рассмотренная многокритериальная задача носит название ***задачи выбора наилучшего проектного решения***.

Математическая формулировка многокритериальной задачи

Требуется найти значения действительных переменных $X_1, \ldots,$ X_n, при которых *целевые функции*

$$L_1(X), \ldots, L_p(X)$$

принимают экстремальные значения при ограничениях:

$$g_i(X) \leq 0, i = 1, \ldots, m,$$

где X — *n*-мерный вектор независимых переменных $X_1, \ldots, X_n$,

$g_i(X) \leq 0, i = 1, \ldots, m$ — система ограничений.

Эффективное решение

Если цели находятся в противоречии друг с другом, то не существует оптимального решения, которое удовлетворяло бы всем критериям эффективности. В этом случае вводится понятие «***эффективное решение***». Оно означает, что невозможно улучшить значение любой из целевых функций без ухудшения значений одной или нескольких целевых функций. Уточним введенное понятие для задачи максимизации: решение *X** называется эффективным, если не существует допустимого решения , такого, что

$$L_i(\overline{X}) \geq L_i(X^*),\ i = 1,\ldots,p, \text{ и } L_j(\overline{X}) \geq L_j(X^*)$$

по крайней мере, для одного индекса *j*. Множество всех эффективных решений в непрерывном случае известно как эффективная граница. Эффективное решение называют также ***недоминируемым решением***, ***неулучшаемым решением*** или ***решением по Парето (Парето-оптимальным решением)***.

2.2. Множество Парето

Внутренние и граничные точки

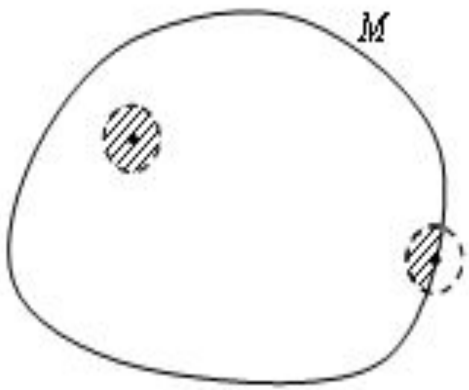


Рис. 1 Внутренняя и граничная точки

Пусть на плоскости (или в пространстве) дано некоторое множество точек *M*. Точка *P* называется *внутренней точкой множества M*, если существует такая окрестность этой точки, которая целиком состоит из точек данного множества. Если же в любой окрестности точки *P* имеются точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие множеству *M*, то точка *P* называется *граничной точкой множества M*. Совокупность всех граничных точек данного множества *M* называется его *границей*.

Если множество *M* не содержит ни одной своей граничной точки, то оно называется *открытым* (то есть любая точка открытого множества является внутренней). Если множество *M* содержит все свои граничные точки, то оно называется *замкнутым*. В дальнейшем будут рассматриваться только замкнутые множества.

Возможные перемещения точек

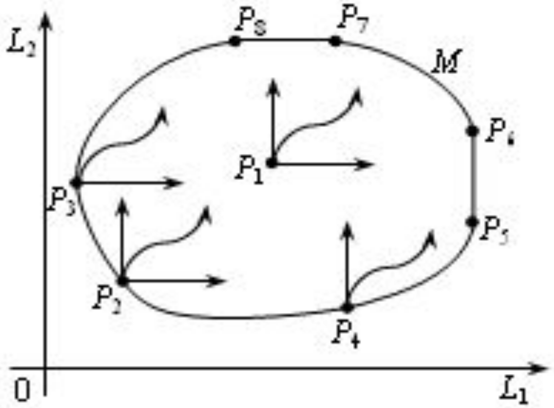


Рис. 2 Возможные перемещения

Рассмотрим на плоскости OL_1L_2 множество M. Пусть P — произвольная точка этого множества. Возможно ли во множестве M перемещение точки P в близкую ей точку так, чтобы при этом увеличились обе ее координаты? Если P — внутренняя точка, то такое перемещение возможно. Если P — граничная точка, то такое перемещение не всегда возможно. Требуемое перемещение точек P_1, P_2, P_3, P_4 возможно, а ни одна из точек как отрезков P_5P_6 и P_7P_8, так и дуги P_6P_7 такому перемещению подвергнута быть не может. Действительно, при перемещении любой точки

- вертикального отрезка P_5P_6 может увеличиваться лишь координата L_2 этой точки (координата L_1 при этом останется неизменной);
- горизонтального отрезка P_7P_8 может увеличиваться лишь координата L_1 (координата L_2 при этом останется неизменной);
- дуги P_6P_7 увеличение одной координаты влечет уменьшение другой.

Граница Парето

Каждая точка множества *M* попадает в один из трех следующих классов.

- Первый класс содержит точки, каждую из которых можно переместить так, чтобы при этом увеличились обе ее координаты, а сама точка осталась во множестве *M* (в этот класс попадают все внутренние точки множества *M* и некоторые его граничные точки (например, P_2)).
- Второй класс содержит точки, каждую из которых можно переместить во множестве *M* лишь при условии увеличения только одной из ее координат при сохранении значения второй (точки вертикального отрезка P_5P_6 и точки горизонтального отрезка P_7P_8).
- Третий класс содержит точки, каждую из которых можно переместить во множестве *M* лишь при условии уменьшения хотя бы одной из координат (точки дуги P_6P_7).

Множество точек третьего класса называют *границей* (*множеством*) *Парето* данного множества *M*. Часто говорят, что граница Парето множества *M* — это множество точек, из которых нельзя переместиться на «север», «восток» или «северо-восток», оставаясь во множестве *M*. Свойства множества Парето изучены достаточно подробно, разработаны методы и алгоритмы его построения. Считается, что наилучшие решения многокритериальной задачи следует искать именно среди множества Парето. Поэтому построение множества Парето нередко считают первым необходимым шагом в решении любой многокритериальной задачи.

2.3. Задача линейной многокритериальной максимизации с двумя переменными и двумя целевыми функциями

Указанная задача является частным случаем многокритериальной задачи в случае p = 2. Сформулируем ее. Пусть на плоскости Ox_1x_2 задано множество $\overline{X}$ и в каждой точке этого множества определены две непрерывные функции $L_1 = f_1(x_1, x_2)$ и $L_2 = f_2(x_1, x_2)$. Необходимо найти значения переменных, при которых указанные функции принимают наибольшие значения. Формулировку задачи максимизации с двумя целевыми функциями можно записать более компактно:

$$f_1(x_1, x_2) \to \max;$$
$$f_2(x_1, x_2) \to \max$$

при ограничениях:

$$(x_1, x_2) \in \overline{X}.$$

Геометрическая интерпретация

Решение. Изобразим на плоскости OL_1L_2 все точки, координаты которых удовлетворяют условиям $L_1 = f_1(x_1, x_2)$, $L_2 = f_2(x_1, x_2)$ и $(x_1, x_2) \in \overline{X}$. Полученное множество обозначим через $\overline{L}$.

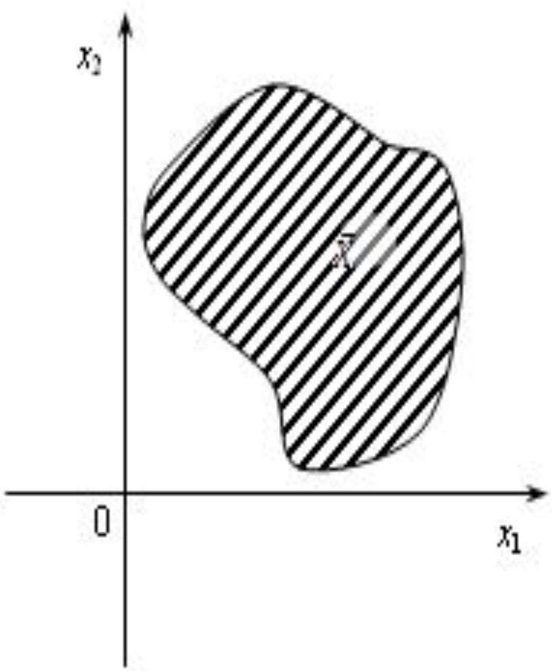


Рис. 3. ОДР на плоскости Ox_1x_2

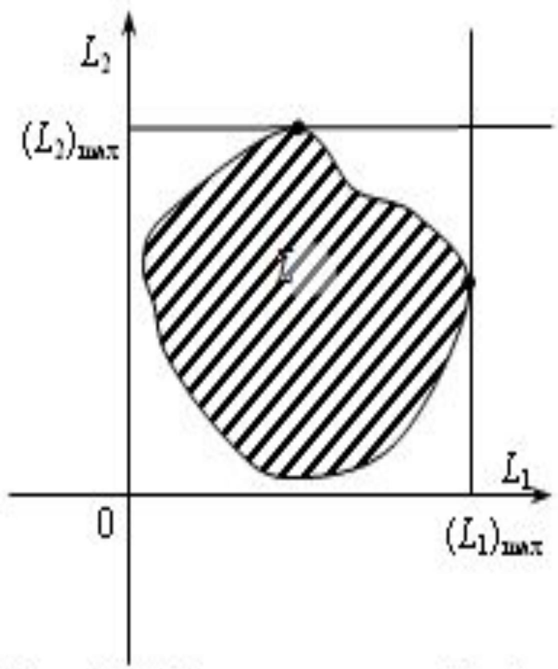


Рис. 4. ОДР на плоскости OL_1L_2

Неразрешимость задачи

Из рис. 4 видно, что $(L_1)_{\max}$ — наибольшее значение L_1 — и $(L_2)_{\max}$ — наибольшее значение L_2 — достигаются в разных точках. При этом $((L_1)_{\max}, (L_2)_{\max}) \notin \overline{L}$. Это означает, что задача неразрешима — не существует оптимального решения, которое одновременно максимизировало бы обе целевые функции. Поэтому нужно искать Парето-оптимальное решение. Как уже выше отмечалось, наилучшие решения многокритериальной задачи следует искать среди множества Парето.

Методы нахождения недоминируемого решения

Рассмотрим два метода нахождения недоминируемого решения, связанных с множеством Парето:

- ***Метод (последовательных) уступок.***
- ***Метод идеальной точки.***

Метод уступок

Метод (последовательных) уступок заключается в том, что ЛПР, работая в режиме диалога со специалистом, анализирует точки на границе Парето и выбирает одну из них — компромиссную.

Метод идеальной точки

Метод идеальной точки заключается в нахождении на границе Парето точки, ближайшей к *точке утопии*, задаваемой ЛПР. Как правило, ЛПР формулирует цель в виде определенных показателей, и часто в качестве координат целевой точки выбирается комбинация наилучших значений всех критериев (в данном случае — точка с координатами

$$((L_1)_{\max}, (L_2)_{\max}))$$

Обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому ее и называют *точкой утопии*.

Замечание 1

Задачу максимизации можно путем умножения Целевой функции на (–1) преобразовать в задачу минимизации, решаемую при тех же самых ограничениях. Это связано с наличием следующего свойства: функция (- f) достигает наибольшего значения в тех точках, в которых функция f принимает наименьшее значение, и наоборот. Это означает, что условия [$f \to \min$] и [$(-f) \to \max$] равносильны. Следовательно, поменяв знак целевой функции на противоположный, любую двухкритериальную задачу можно свести к задаче максимизации с двумя целевыми функциями.

2.4.Применение метода идеальной точки

Пример 1. Найти значения переменных, при которых функции

$$L_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \to \max;$$

$$L_2 = x_1 - x_2 + 5 \to \max$$

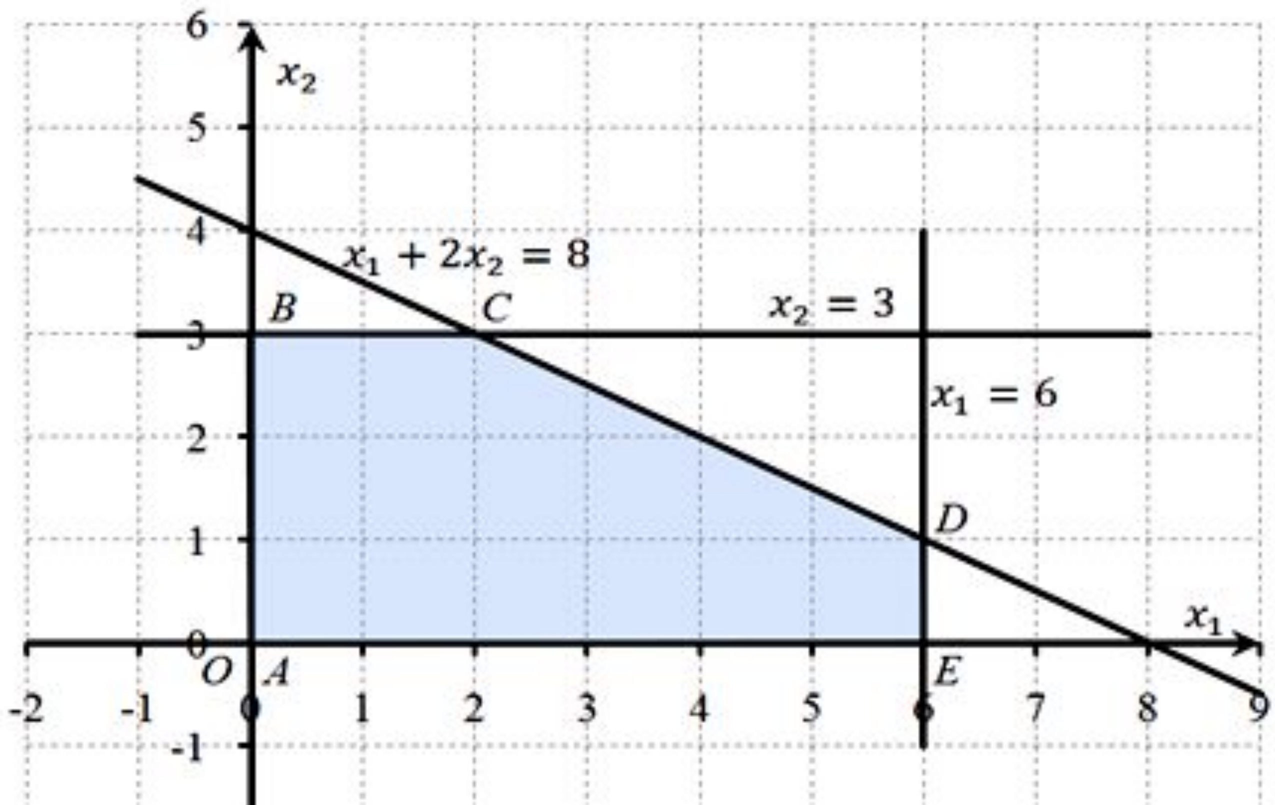
при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 0 \le x_1 \le 6, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2 и построим множество $\overline{X}$ — область допустимых решений данной задачи в указанной системе координат. Ограничительные условия определяют на плоскости многоугольник *ABCDE*, вершины которого имеют соответственно координаты: (0; 0), (0; 3), (2; 3), (6; 1), (6; 0). Следовательно, $\overline{X}$ представляет собою многоугольник *ABCDE*.

ОДР

Решение. Введем на плоскости прямоугольную систему координат Ox_1x_2 и построим множество $\overline{X}$ — область допустимых решений данной задачи в указанной системе координат. Ограничительные условия определяют на плоскости многоугольник *ABCDE*, вершины которого имеют соответственно координаты: (0; 0), (0; 3), (2; 3), (6; 1), (6; 0). Следовательно, $\overline{X}$ представляет собою многоугольник *ABCDE*.



Подвергнем координаты каждой точки плоскости Ox_1x_2 преобразованиям $L_1 = 2x_1 + x_2 + 1$ и $L_2 = x_1 - x_2 + 5$. Получим плоскость OL_1L_2. При этом в силу линейности проводимых преобразований прямоугольная система координат Ox_1x_2 перейдет в прямоугольную систему координат OL_1L_2, а многоугольник *ABCDE* в многоугольник *A*B*C*D*E**, вершины которого имеют соответственно координаты: (1; 5), (4; 2), (8; 4), (14; 10), (13; 11). Для наглядности укажем описанное соответствие вершин: *A*(0; 0) → *A**(1; 5), *B*(0; 3) → *B**(4; 2), *C*(2; 3) → *C**(8; 4), *D*(6; 1) → *D**(14; 10), *E*(6; 0) → *E**(13; 11).

Таким образом, все точки, координаты которых удовлетворяют условиям $L_1 = 2x_1 + x_2 + 1$, $L_2 = x_1 - x_2 + 5$ и $(x_1, x_2) \in \overline{X}$, определяют на плоскости многоугольник *A*B*C*D*E**. Следовательно, область допустимых решений $\overline{L}$ данной задачи в системе координат OL_1L_2 (пространстве критериев) представляет собою многоугольник *A*B*C*D*E**.

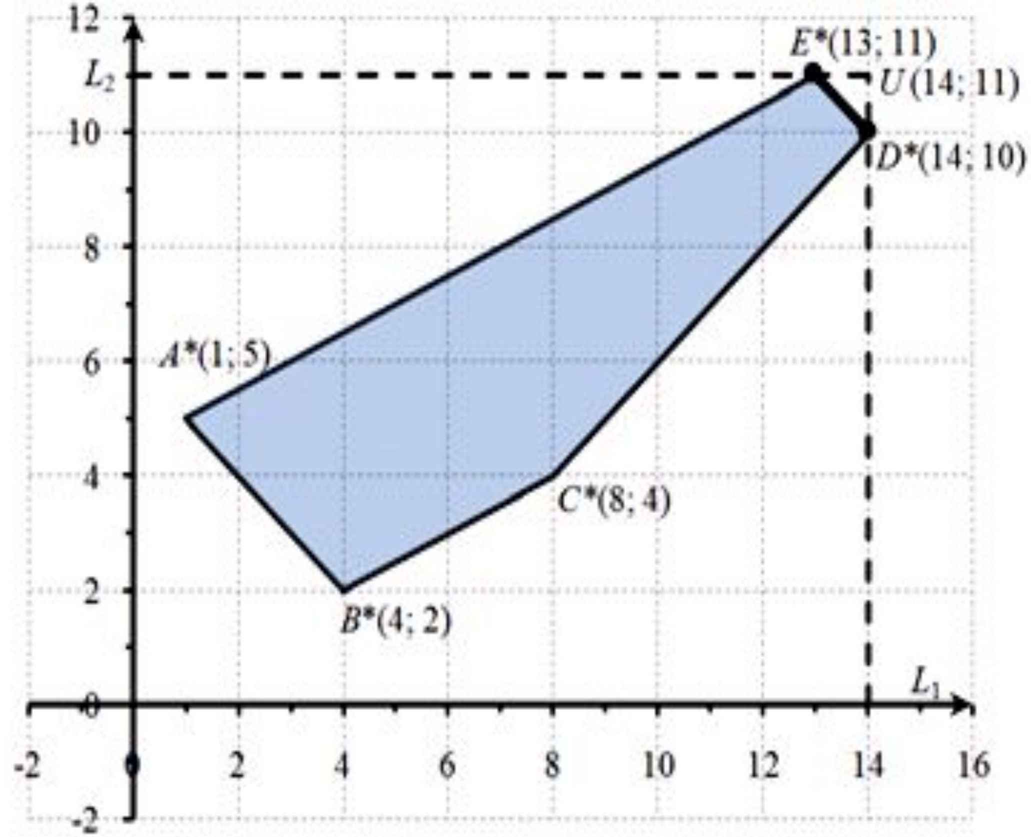


Рис. ОДР в пространстве критериев и множество Парето

Находим множество Парето. Это отрезок D^*E^*. В условии задачи не сказано, что считать точкой утопии. Поэтому выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка U с координатами (14; 11).

Теперь необходимо найти во множестве Парето точку, расположенную ближе всех к точке утопии U. Из рис. видно, что точка $I(I_1, I_2)$, являющаяся основанием перпендикуляра, проведенного из точки U (14; 11) к прямой D^*E^*, принадлежит отрезку D^*E^*. Это означает, что точка I — искомая. Найдем ее координаты.

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки. Имеем

$$\frac{L_1 - L_{1,D^*}}{L_{1,E^*} - L_{1,D^*}} = \frac{L_2 - L_{2,D^*}}{L_{2,E^*} - L_{2,D^*}},$$

где L_{1,D^*}, L_{2,D^*} и L_{1,E^*}, L_{2,E^*} — координаты точек D^* и E^* соответственно. Подставляя сюда числовые значения для координат D^* и E^*, находим:

$$\frac{L_1 - 14}{13 - 14} = \frac{L_2 - 10}{11 - 10}, \text{ или } L_1 + L_2 = 24.$$

Нормальным вектором прямой *D*E** является вектор $\vec{N}$ (1; 1), направляющим вектором для прямой ***UI***. Следовательно, ее каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{L_1 - L_{1,U}}{1} = \frac{L_2 - L_{2,U}}{1},$$

где $L_{1,U}, L_{2,U}$ — координаты точки ***U***. Подставляя сюда числовые значения для координат ***U***, находим:

$$\frac{L_1 - 14}{1} = \frac{L_2 - 11}{1}, \text{ или } L_1 - L_2 = 3.$$

Точка ***I*** принадлежит прямым ***D*E**** и ***UI***. Поэтому ее координаты удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = 24, \\ I_1 - I_2 = 3. \end{cases}$$

Отсюда находим $I_1 = \frac{27}{2}$, $I_2 = \frac{21}{2}$.

Идеальная точка

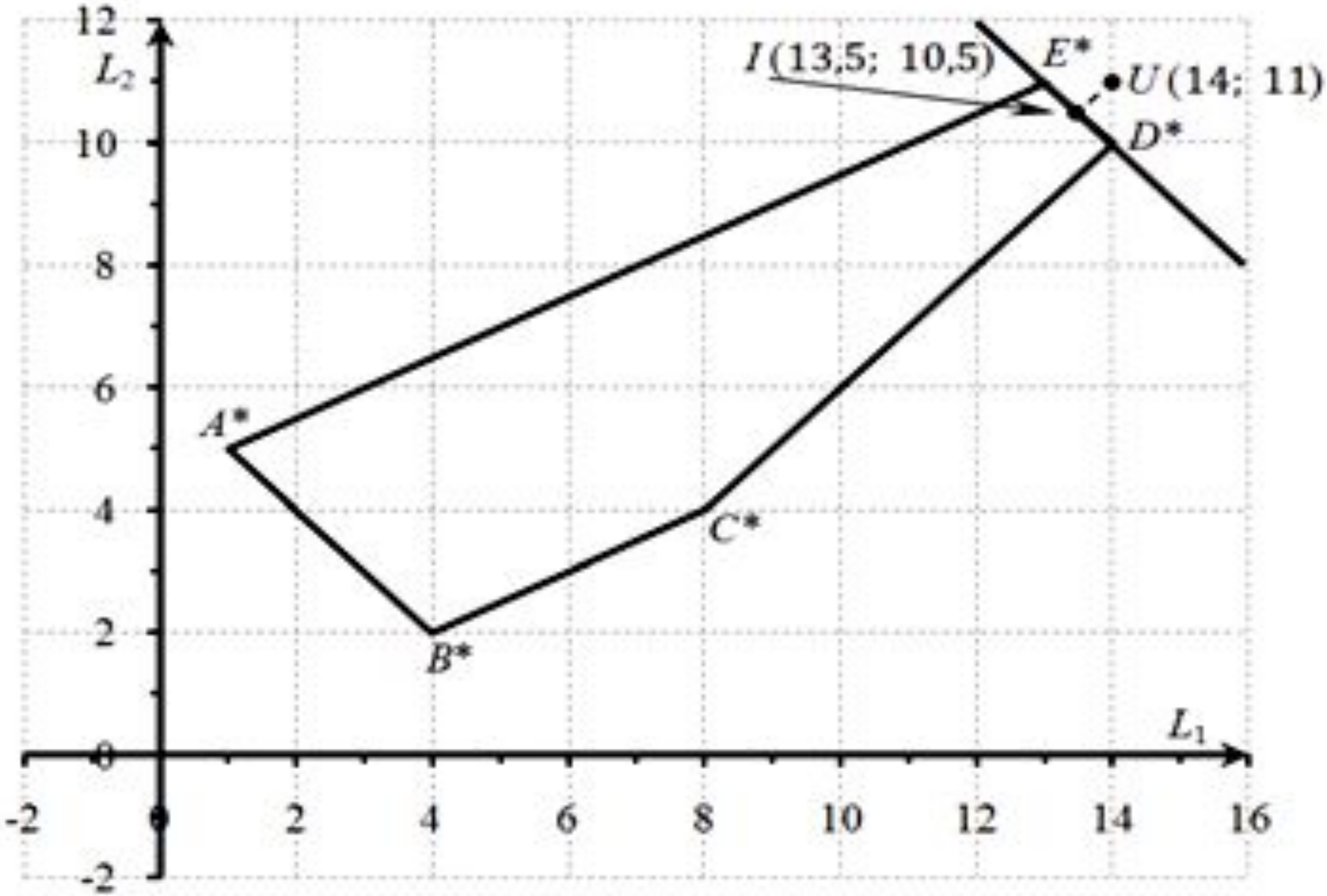


Рис. Идеальная точка

Ответ

Расстояние d между точками $I(\frac{27}{2};\frac{21}{2})$ и $U(14; 11)$ равно длине вектора $\vec{IU}$ = $(14-\frac{27}{2};11-\frac{21}{2})=(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$, которая, в свою очередь, равна корню квадратному из суммы квадратов его координат. Поэтому $d=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+1=\frac{27}{2}, \\ x_1-x_2+5=\frac{21}{2}. \end{cases}$$

Имеем $x_1=6, x_2=\frac{1}{2}$.

Таким образом, Парето-оптимальное решение $L_1=\frac{27}{2}, L_2=\frac{21}{2}$ достигается при $x_1=6, x_2=\frac{1}{2}$, а идеальная точка $(\frac{27}{2};\frac{21}{2})$ находится от точки утопии (14; 11) на расстоянии $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Замечание 2

При нахождении расстояния между точкой утопии и идеальной точкой, учитывая топологию множества Парето, был применен «геометрический» метод. В общем случае задача нахождения расстояния между указанными точками решается как экстремальная. Необходимо найти на множестве Парето точку, такую, что расстояние между ней и точкой утопии минимально:

$$\sqrt{(I_1 - U_1)^2 + (I_2 - U_2)^2} \rightarrow \min,$$

или, опуская знак квадратного корня,

$$(I_1 - U_1)^2 + (I_2 - U_2)^2 \rightarrow \min,$$

где I_1 и I_2 — неизвестные координаты искомой точки *I*, а U_1 и U_2 — уже найденные координаты точки утопии *U*.

Пример 2

Пример 2. Найти значения переменных, при которых функции

$$L_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \to \max;$$

$$L_2 = x_1 - x_2 + 5 \to \min$$

при тех же ограничениях, что и в примере 1.

Решение. Введем функцию $L_2' = -x_1 + x_2 - 5$. Тогда, согласно замечанию 1, исходная задача преобразуется в задачу максимизации

$$L_1 = 2x_1 + x_2 + 1 \to \max;$$

$$L_2' = -x_1 + x_2 - 5 \to \max.$$

Геометрическая интерпретация

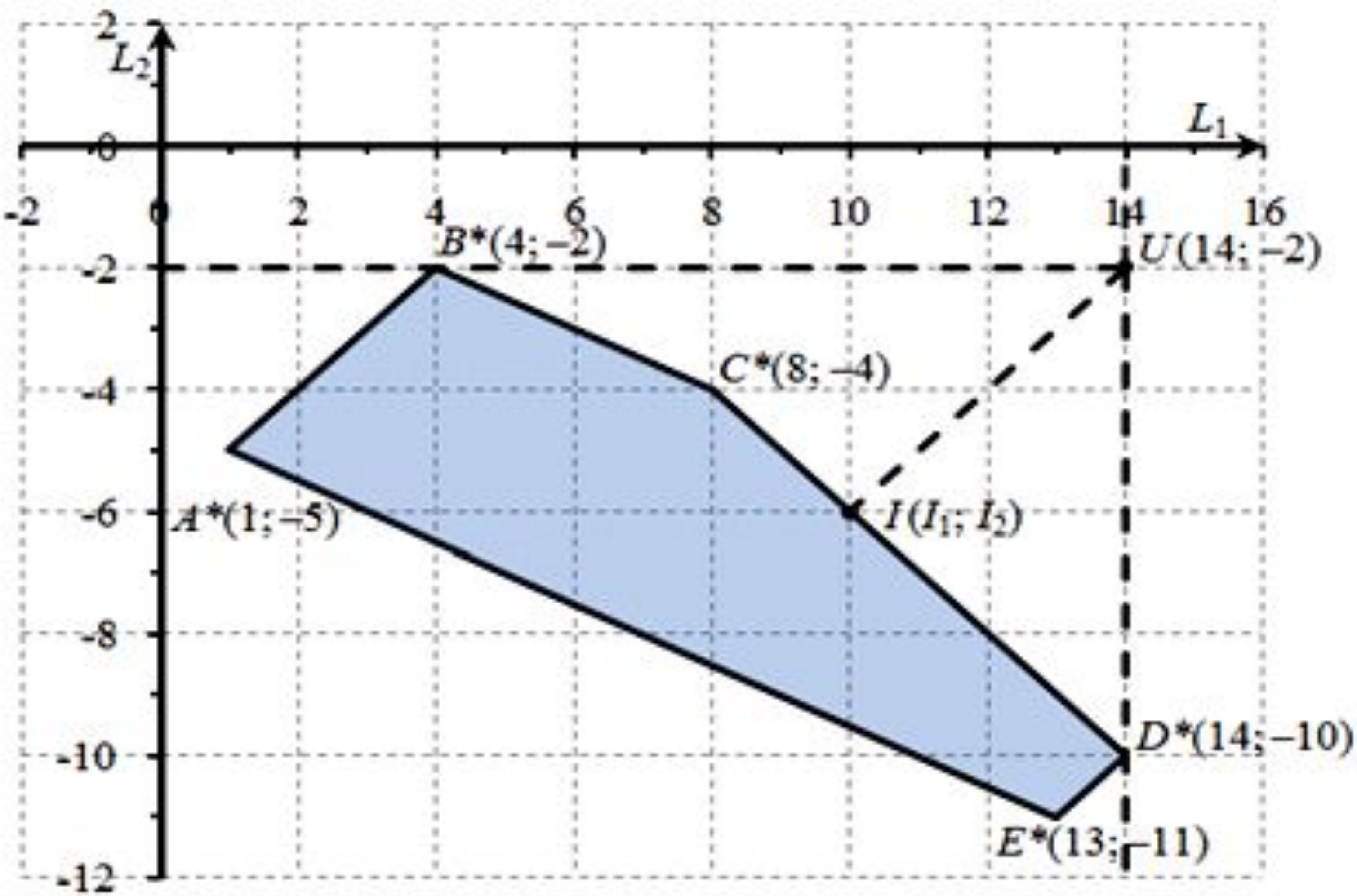


Рис. Геометрическая интерпретация задачи максимизации

Ограничительные условия те же, что и в примере 1. Они определяют на плоскости Ox_1x_2 многоугольник *ABCDE*), который функции $L_1 = 2x_1 + x_2 + 1$ и $L_2' = -x_1 + x_2 - 5$ переводят в многоугольник *A*B*C*D*E**. Его вершины в плоскости OL_1L_2' (пространстве критериев) имеют соответственно координаты: $(1; -5)$, $(4; -2)$, $(8; -4)$, $(14; -10)$, $(13; -11)$. Множество Парето образуют точки ломаной *B*C*D**. Как и в примере 1, в условии не сказано, что считать точкой утопии. Поэтому снова выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка *U* с координатами $(14; -2)$ (заметим, что в исходной задаче ей соответствует точка с координатами $(14; 2)$, и, следовательно, в исходной задаче точкой утопии является она). Из рис. видно, что точка, принадлежащая ломаной *B*C*D** и находящаяся на минимальном расстоянии от точки утопии, должна принадлежать отрезку *C*D**. Обозначим ее через $I(I_1; I_2)$. Для отыскания ее координат воспользуемся способом, описанным в замечании 2.

Согласно этому способу, нужно минимизировать функцию расстояния d между точкой $I\,(I_1; I_2)$ и точкой $U(14; -2)$:

$$d = \sqrt{(I_1 - 14)^2 + (I_2 + 2)^2} \to \min,$$

или

$$y = (I_1 - 14)^2 + (I_2 + 2)^2 \to \min.$$

Составим уравнение прямой C^*D^*. Имеем

$$\frac{L_1 - 8}{14 - 8} = \frac{L_2' + 4}{-10 + 4}, \text{ или } L_1 + L_2' = 4.$$

Точка I принадлежит множеству точек отрезка C^*D^*. Следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению прямой C^*D^*: $I_1 + I_2 = 4$, или $I_1 = -I_2 + 4$. Это означает, что минимизируется функция $y = 2(I_2)^2 + 24I_2 + 104$ на отрезке $[-10;-4]$. Вычисляем производную $y' = 4I_2 + 24$ и находим стационарную точку: $I_2 = -6$. Легко видеть, что $y' < 0$ на промежутке $[-10;-6)$ и $y' > 0$ на промежутке $(-6;-4]$. Следовательно, (-6) — точка минимума функции $y(I_2)$ на отрезке $[-10;-4]$, а $(10;-6)$— точка минимума функции $y(I_1, I_2) = (-I_1 - 10)^2 + (I_2 + 2)^2$ в замкнутой области, определяемой неравенствами $8 \le I_1 \le 14$ и $-10 \le I_2 \le -4$, при этом $d_{\min} = d(10;-6) =$
$= \sqrt{(10-14)^2 + (-6+2)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Заметим, что в исходной задаче точке $(10;-6)$ соответствует точка $(10;6)$.

Ответ

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 1 = 10, \\ -x_1 + x_2 - 5 = -6. \end{cases}$$

Имеем $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{7}{3}$.

Таким образом, Парето-оптимальное решение $L_1 = 10, L_2 = 6$ достигается при $x_1 = \frac{10}{3}, x_2 = \frac{7}{3}$. При этом идеальная точка $(10; 6)$ находится от точки утопии $(14; 2)$ на расстоянии $4\sqrt{2}$.

2.5. Пример решения экономической задачи с двумя критериями эффективности

Задача 1. ОАО «Мукомольный завод» реализует хлебопекарную муку высшего сорта двумя способами: через сеть магазинов и через прямые поставки по договорам неторговым организациям. Известно, что ежемесячно магазины могут реализовать не более 50 тыс., а ежемесячные поставки неторговым организациям не должны превышать 35 тыс. т муки. Для продажи в каждом месяце выделяется не более 45 тыс. т муки. Предприятие выработало определенную политику в области ценообразования, которой собиралось следовать. Однако в связи с сильно изменившейся экономической ситуацией, затраты на реализацию увеличились, а мука вошла в перечень продуктов, которые должны продаваться по ранее установленной цене, регулируемой местной властью. При продаже 1 тыс. тонны муки через магазины расходы на реализацию стали составлять 7 тыс. руб., а цена осталась прежней — 10 тыс. руб.; при втором способе реализации расходы и цена составили 5 и 8 тыс. руб. соответственно. Необходимо определить, сколько муки следует продавать каждым способом, чтобы расходы были минимальными, а выручка от продажи — максимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи.

Пусть x_1 и x_2 — ежемесячные объёмы (тысячи тонн) реализуемой хлебопекарной муки высшего сорта через сеть магазинов и через прямые поставки по договорам неторговым организациям соответственно.

Тогда целевые функции имеют вид:

$$L_1 = 7x_1 + 5x_2 \to \min;$$

$$L_2 = 10x_1 + 8x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 45, \\ 0 \le x_1 \le 50, \\ 0 \le x_2 \le 35. \end{cases}$$

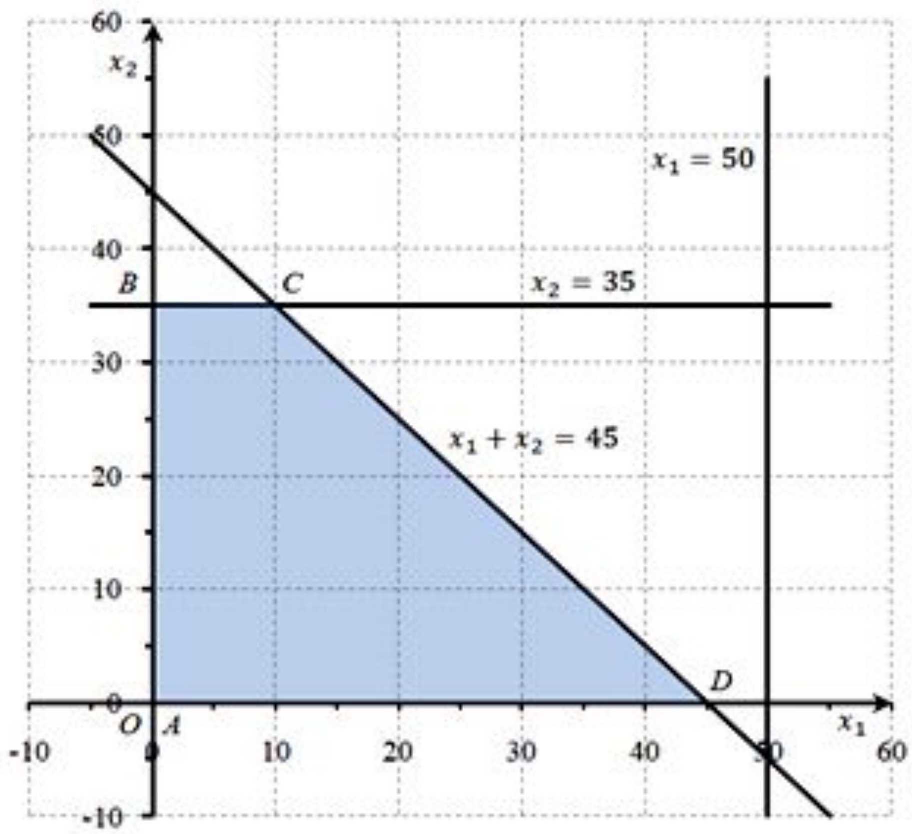
Введем функцию $L_1' = -7x_1 - 5x_2$. Тогда исходная задача преобразуется в задачу максимизации

$$L_1' = -7x_1 - 5x_2 \to \max;$$

$$L_2 = 10x_1 + 8x_2 \to \max.$$

ОДР на плоскости Ox_1x_2

Ограничительные условия остаются прежними. Они определяют на плоскости Ox_1x_2 многоугольник $ABCD$, который функции L_1' и L_2 переводят в многоугольник $A^*B^*C^*D^*$ плоскости $OL_1'L_2$:
$A(0; 0) \to A^*(0; 0)$, $B(0; 35) \to B^*(-175; 280)$, $C(10; 35) \to C^*(-245; 380)$, $D(45; 0) \to D^*(-315; 450)$.



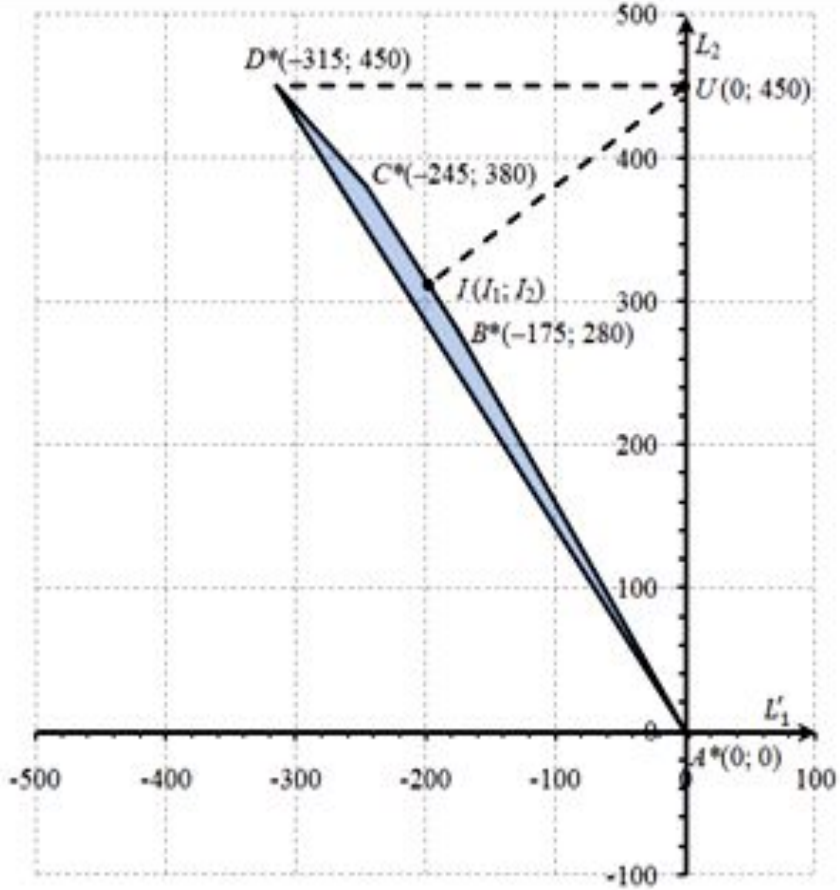


Рис. Геометрическая интерпретация задачи максимизации, эквивалентной задаче 1

Множество Парето образуют точки ломаной $A^*B^*C^*D^*$. Выбираем комбинацию наилучших значений всех критериев. В данном случае это точка U с координатами $(0; 450)$. Необходимо найти во множестве Парето точку, расположенную ближе всех к точке утопии U. Обозначим ее через $I\ (I_1; I_2)$.

Для отыскания координат указанной точки минимизируем функцию расстояния d между точкой $I\ (I_1;I_2)$ и точкой $U(0;415)$:

$$d = \sqrt{I_1^2 + (I_2 - 450)^2} \to \text{min},$$

или

$$y = I_1^2 + (I_2 - 450)^2 \to \text{min}.$$

Из рис. видно, что искомая точка находится на отрезке *B*C**.

Составим уравнение прямой *B*C**. Имеем

$$\frac{L_1' + 245}{-175 + 245} = \frac{L_2 - 380}{280 - 380}, \text{ или } 10L_1' + 7L_2 = 210.$$

Точка I принадлежит множеству точек отрезка B^*C^*. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению прямой B^*C^*: $10I_1 + 7I_2 = 210$, или $I_2 = -\frac{10}{7}I_1 + 30$. Это означает, что на отрезке $[-245; -175]$ минимизируется функция $y = \frac{149}{49}I_1^2 + 1200I_1 + 420^2$. Вычисляем производную $y' = \frac{298}{49}I_1 + 1200$ и находим стационарную точку: $I_1 = -197\frac{47}{149}$. Из того, что $y' < 0$ на промежутке $[-245; -197\frac{47}{149})$ и $y' > 0$ на промежутке $(-197\frac{47}{149}; -175]$, следует: $(-197\frac{47}{149})$ — точка минимума функции $y(I_1)$ на отрезке $[-245; -175]$. Тогда $(-197\frac{47}{149}; 311\frac{917}{1043})$ — искомая точка, что соответствует точке $(197\frac{47}{149}; 311\frac{917}{1043})$ в исходной задаче.

Соответствующие значения x_1, x_2 найдем из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 7x_1 + 5x_2 = 197\dfrac{47}{149}, \\ 10x_1 + 8x_2 = 311\dfrac{917}{1043} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1043\,x_1 + 745\,x_2 = 2940\,, \\ 10430\,x_1 + 8344\,x_2 = 325290\,. \end{cases}$$

Имеем $x_1 = 3\frac{196}{1043};\ x_2 = 35.$

Таким образом, ежемясячные объёмы реализации хлебопекарной муки высшего сорта ОАО «Мукомольный завод» должны составить: ≈ 3,19 тыс. т через сеть магазинов и 35 тыс. т через прямые поставки по договорам неторговым организациям. При таких способах и объёмах реализации расходы будут минимальными (составят ≈ 197,32 тыс.руб.), а выручка — максимальной (составит ≈ 311,88 тыс. руб.).

2.6. Применение симплексного метода при решении многокритериальных задач

Математическая модель каждой из таких задач имеет несколько целевых функций, что, как уже отмечалось, требует применения более гибких математических методов их решения. Например, многокритериальную модель, содержащую несколько задач с весовыми коэффициентами предпочтения, можно рассматривать как частный случай задач в условиях неопределенности. Если же вопроса о приоритетах не касаться, ограничившись рассмотрением задач с несколькими критериями, считая их равноправными, то можно предложить следующий способ решения.

Формулировка задачи

Сформулируем задачу:

$$L_1(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} x_j \to \max,$$

$$L_2(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} x_j \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le Bi,$$

$x_j \ge 0$ для $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Метод решения

Опишем один из возможных методов ее решения.

1. Решают задачу

$$L_1(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} x_j \to \max,$$

при тех же ограничениях, что и у исходной задачи.

2. Решают задачу

$$L_2(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} x_j \to \min,$$

оставляя ограничения неизменными.

3. Решают задачу

$$L = x_{n+1} \to \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} x_j + L_{1\max} x_{n+1} \geq L_{1\max}, \\ \sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} x_j - L_{2\min} x_{n+1} \leq L_{2\min}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \end{cases}$$

$x_j \geq 0$ для $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

На каждом из этапов применяют *симплексный метод*.

Алгоритм нахождения эффективного решения задач, имеющих более двух целевых функций, аналогичен.

Нахождение оптимального плана выпуска продукции

Задача 2. АООТ «Прицеп» выпускает 4,5-тонные прицепы и кормораздатчики «Ванюша» по цене 40,3 и 74,3 тыс. руб. соответственно. По результатам маркетинговых испытаний спрос на изделия первого вида не менее 1 200 шт. в год. Для производства прицепов используются сталь и чугун, запасы которых на предприятии составляют 25 000 и 4 500 т соответственно. Для изготовления одной тысячи прицепов норма расхода стали составляет 1 615 т, а чугуна — 385 т. Для изготовления одной тысячи кормораздатчиков расходуется: стали — 2 022 т, чугуна — 478 т. Себестоимость прицепов — 34,66, а кормораздатчиков — 63,9 тыс. руб. Составить годовой план производства прицепов и кормораздатчиков, такой, чтобы количество выпускаемых изделий и выручка от их реализации были максимальными, а себестоимость — минимальной.

Решение. Обозначим через x_1 количество прицепов (тыс. шт.); x_2 — количество кормораздатчиков (тыс. шт.), выпускаемых АООТ «Прицеп» в год.

Математическая модель задачи будет иметь вид:

$$L_1 = x_1 + x_2 \rightarrow \max,$$
$$L_2 = 40{,}3x_1 + 74{,}3x_2 \rightarrow \max,$$
$$L_3 = 34{,}66x_1 + 63{,}9x_2 \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 1615x_1 + 2022x_2 \le 25000 \text{ (ограничение по стали)}, \\ 385x_1 + 478x_2 \le 4500 \text{ (ограничение по чугуну)}, \\ x_1 \ge 1{,}2 \text{ (ограничение по спросу)} \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Применяя симплексный метод, решим задачу по каждой целевой функции в отдельности. Получим

$$X_{1\ \text{опт}} = (11{,}688;\ 0),\ X_{2\ \text{опт}} = (1{,}2;\ 8{,}448),\ X_{3\ \text{опт}} = (1{,}2;\ 0),$$

$$L_{1\max} = 11{,}688,\ L_{2\max} = 676{,}0464,\ L_{3\min} = 41{,}592.$$

Математическая модель задачи нахождения эффективного решения в канонической форме имеет вид:

$$L = x_3 \to \min$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 11{,}688x_3 - x_4 = 11{,}688, \\ 40{,}3x_1 + 74{,}3x_2 + 676{,}05x_3 - x_5 = 676{,}05, \\ 34{,}66x_1 + 63{,}9x_2 + 41{,}592x_3 + x_6 = 41{,}592, \\ 1615x_1 + 2022x_2 + x_7 = 25000, \\ 385x_1 + 478x_2 + x_8 = 4500, \\ x_1 - x_9 = 1{,}2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1{,}9}.$$

Получим $X_{эффект}$ = (1,2; 0,564). Таким образом, АООТ «Прицеп» целесообразно выпускать 1 200 прицепов и 564 кормораздатчика ежегодно. При таком плане производства количество изделий и выручка от их реализации будут максимальными (составят 1 764 единиц и 90,096 млн руб. соответственно), а себестоимость — минимальной (составит 77,6316 млн руб.).

Список литературы

1. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н., Методы оптимизации: линейные модели. М.: МЭСИ, 2015.
2. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н., Исследование операций и методы оптимизации.

   М.: МЭСИ, 2015.
1. Мастяева И.Н., Горемыкина Г.И., Семенихина О.Н., Методы оптимальных решений. М.: Курс, 2016.