

## Неопределенный интеграл

Первообразной функции  $f(x)$  на промежутке  $X$  называется дифференцируемая на  $X$  функция  $F(x)$ , такая, что для всех  $x \in X$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

Совокупность всех первообразных функции  $f(x)$  имеет вид  $F(x) + C$ , где  $C$  – произвольная константа, и называется *неопределенным интегралом* функции  $f(x)$ . Обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция  $f(x)$ , стоящая под знаком интеграла  $\int$ , называется подынтегральной функцией, выражение  $f(x) dx$  – подынтегральным выражением, при этом  $dx$  – дифференциал независимой переменной  $x$ .

## Свойства неопределенного интеграла

$$1) \int df(x) = f(x) + C.$$

$$2) d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

$$3) \int k f(x)dx = k \int f(x)dx.$$

$$4) \int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

## Таблица первообразных

$$1. \int 0 dx = C$$

$$2. \int 1 dx = x + C$$

$$3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$11. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

$$13. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$14. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$$

$$15. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$16. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$17. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$18. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$20. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$21. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

**Пример 1.**  $\int \left( 3x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx$

---

**Решение.** Применим теорему об арифметике интегралов (интеграл от суммы функций равен сумме интегралов, числовой множитель можно вынести за знак интеграла)

$$\int \left( 3x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3} \right) dx = 3 \int x^3 dx - \int \sqrt[3]{x} dx + \int \frac{dx}{x^3} =$$

Воспользуемся таблицей интегралов (в данном случае формулой первообразной степенной функции для показателей  $\alpha = 3$ ,  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha = -3$ )

$$= 3 \frac{x^{3+1}}{4} - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{4}{3}} + \frac{x^{-3+1}}{-2} = 3 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

Проверим результат дифференцированием:

$$\left( \frac{3}{4} x^4 - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2x^2} \right)' = \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} \cdot (-2)x^{-3} = 3x^3 - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x^3}.$$

**Пример 2.**  $\int (1 + 2x)^2 dx$

---

**Решение.** Возведем в квадрат выражение  $(1 + 2x)$  по формуле сокращенного умножения

$$\int (1 + 2x)^2 dx = \int (1 + 4x + 4x^2) dx =$$

перейдем к сумме интегралов по теореме об арифметике

$$= \int dx + 4 \int x dx + 4 \int x^2 dx =$$

и найдем первообразные по формуле интеграла от степенной функции

$$= x + 4 \frac{x^2}{2} + 4 \frac{x^3}{3} + c = x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + C.$$

Результат проверим дифференцированием:

$$(x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + C)' = 1 + 2 \cdot 2x + \frac{4}{3} \cdot 3x^2 = 1 + 4x + 4x^2 = (1 + 2x)^2.$$

**Пример 3.**  $\int \frac{(1+x)}{x^5} dx$

---

**Решение.** Почленно разделим числитель на знаменатель, и, не переходя к сумме интегралов, найдем первообразную каждого слагаемого по формуле первообразной степенной функции (для показателей  $-5$  и  $-4$ ):

$$\int \frac{(1+x)}{x^5} dx = \int \left( \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^4} \right) dx = \frac{x^{-5+1}}{-4} + \frac{x^{-4+1}}{-3} + C = -\frac{1}{4}x^{-4} - \frac{1}{3}x^{-3} + C.$$

**Пример 4.**  $\int \frac{1-x-x^2 \cdot \sin x}{3x^2} dx$

---

**Решение.** Почленно разделим числитель на знаменатель и перейдем к сумме интегралов, при этом постоянные коэффициенты вынесем за знаки интегралов:

$$\int \frac{1-x-x^2 \cdot \sin x}{3x^2} dx = \frac{1}{3} \left( \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x} - \int \sin x dx \right) =$$

воспользуемся таблицей первообразных для степенной функции, функции  $\frac{1}{x}$  и  $\sin x$ :

$$= \frac{1}{3} \left( -\frac{1}{x} - \ln|x| + \cos x \right) + C = -\frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} + \ln|x| - \cos x \right) + C.$$

**Пример 5.**  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$

---

Р е ш е н и е. Выразим тангенс через отношение синуса к косинусу  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$  :

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

квадрат синуса заменим на  $1 - \cos^2 x$  по основному тригонометрическому тождеству:

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx =$$

почленно разделим числитель на знаменатель и перейдем к сумме интегралов:

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$

применим формулы первообразных для  $\frac{1}{\cos^2 x}$  и 1:

$$= \operatorname{tg} x - x + C.$$



**Пример 6.**  $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

---

**Решение.** По формуле понижения степени  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  перепишем подынтегральную функцию:

$$\int \cos^2 \frac{x}{2} = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx =$$

перейдем к сумме интегралов, при этом коэффициент  $\frac{1}{2}$  вынесем за знаки интегралов:

$$= \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos x dx =$$

воспользуемся таблицей интегралов для 1 и для  $\cos x$ :

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin x}{2} + C.$$

---

Найти интеграл  $\int \frac{5dx}{\sqrt{5-5x^2}}$

- $\arcsin \sqrt{5}x + C$
- $\arcsin x + C$
- $\arcsin 5x + C$
- $\sqrt{5} \arcsin x + C$