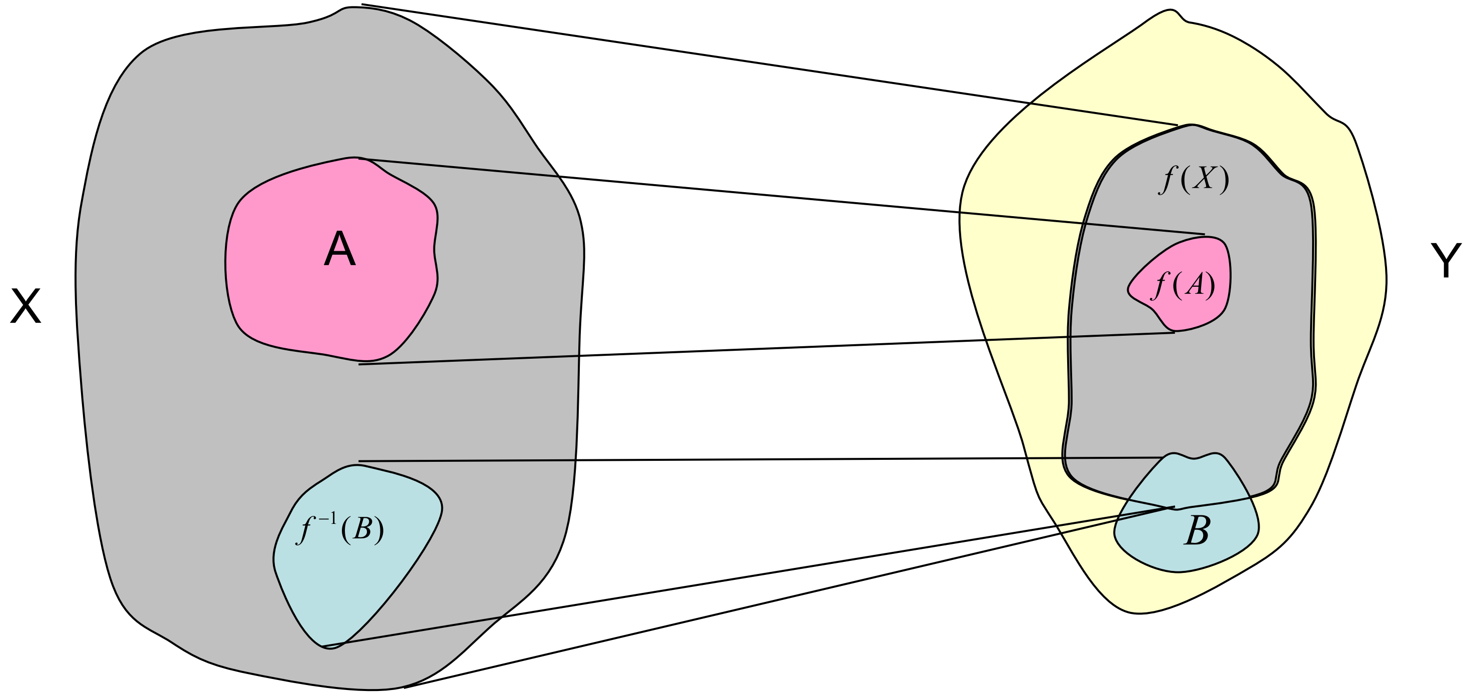
Отображение множеств

Отображение множеств

- **Определение 1**
- Отображением (функцией) $f : X \to Y$ называется закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$.
- x - прообраз элемента y , $x = f^{-1}(y)$.
- y - образ элемента x , $y = f(x)$
- **Замечание**
- Образ всегда единственный, прообразов может быть несколько.

Отображение множеств

- **Определение 2**
- А) Пусть $A \subset X, f : X \to Y$. Образом множества A называют множество $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$
- Б) Пусть $B \subset Y, f : X \to Y$. Прообразом множества *B* называют множество $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$.



Отображение множеств

Определение 3

А) Отображение $f: X \to Y$ называется сюръективным, если $f(X) = Y$.

Б) Отображение $f: X \to Y$ называется инъективным, если для любых $x_1, x_2 \in X$ справедлива импликация

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(т.е. «разные элементы переходят в разные»).

В) Отображение называется биективным, если оно сюръективно и инъективно.

Инъекция

Примеры

1) Отображение множества студентов данной аудитории на множество стульев - инъекция, так как разные студенты сидят на разных стульях.

2) Отображение множества детей в Вашем городе на множество имен не является инъекцией, так как есть дети, имеющие одинаковые имена

3) Является ли инъекцией отображение множества людей, проживающих в Вашем доме на множество номеров квартир? Почему?

Сюръекция

Примеры

1) Соответствие между множеством всех студентов и множеством групп – сюръективное отображение, так как каждой группе соответствует хотя бы один студент

2) Соответствие между множеством студентов 2 курса Вашего института и множеством преподавателей Вашего института не является сюръекцией, так как есть преподаватели, которые не преподают на 2 курсе.

3) Является ли сюръекцией соответствие между множеством предметов в Вашей зачетной книжке и множеством оценок $\{3,4,5\}$

Почему?

Биекция

Примеры

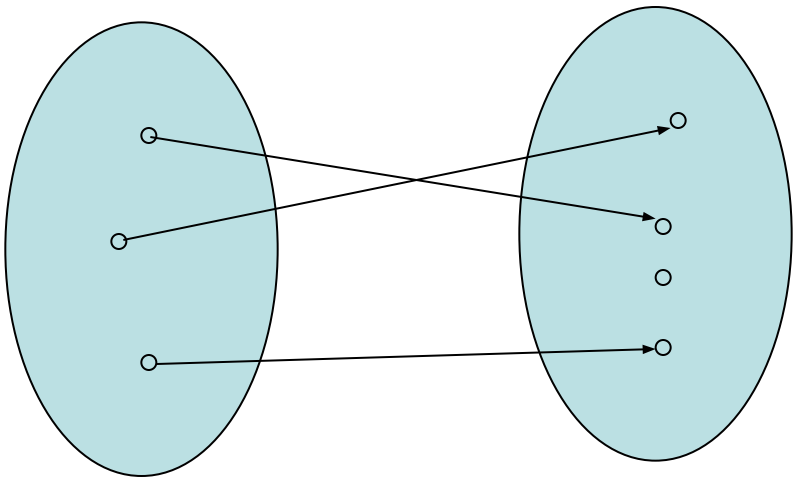
1) Соответствие между множеством государств Европы и множеством европейских столиц - биекция

2) Соответствие между множеством страниц учебника по математике и множеством номеров этих страниц - биекция

3) Будет ли биекцией соответствие между множеством четных и нечетных чисел

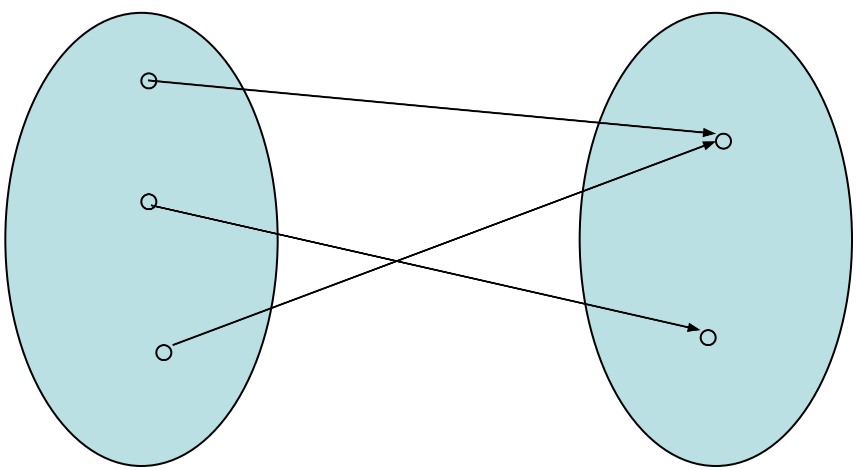
Примеры

1)



Инъективное, не сюръективное отображение

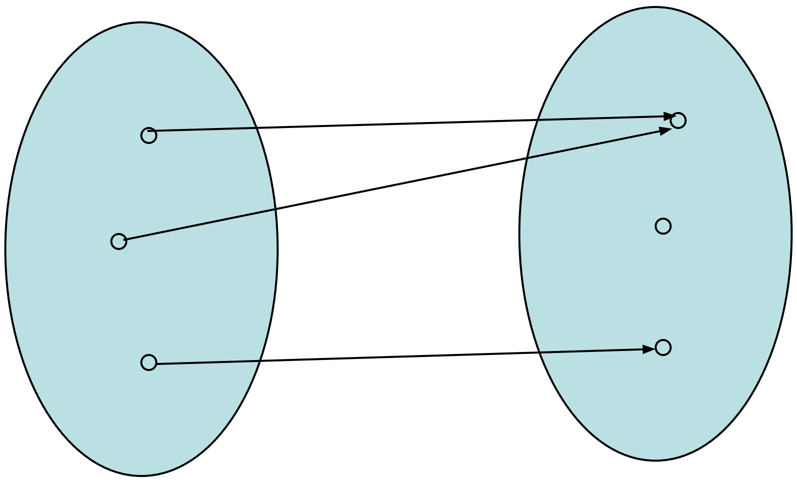
2)



Не инъективное, сюръективное отображение

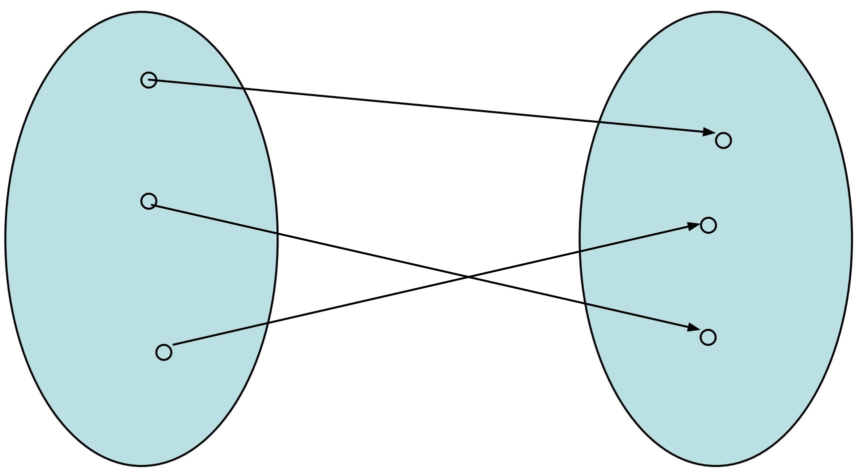
Примеры

5)



Не инъективное, не сюръективное отображение

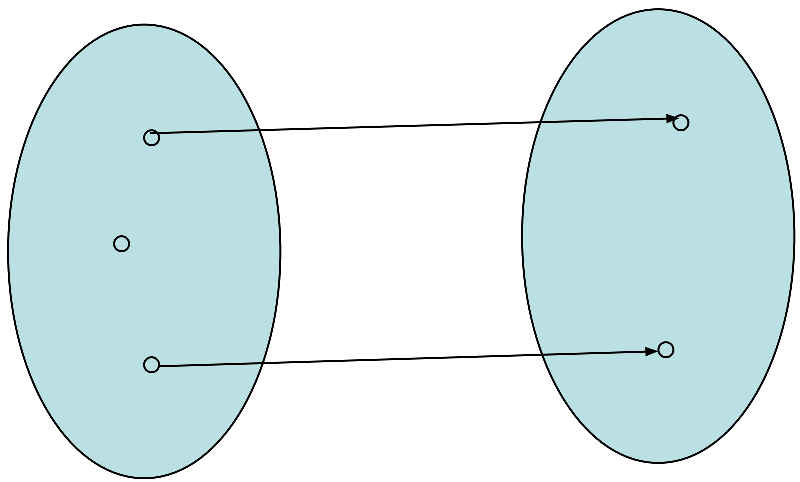
6)



Инъективное, сюръективное отображение – биекция

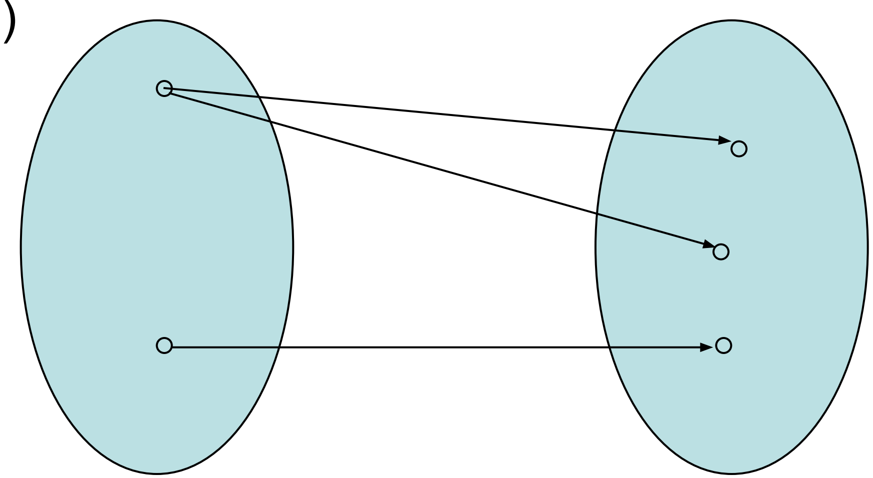
Примеры

3)



Не отображение

4)



Не отображение

Примеры

- 7) Список студентов – биекция между номером и фамилией.
- 8) $f : X \to Y$, где X - множество экзаменов в сессии, Y - множество оценок.

  f - не инъекция, не сюръекция.
- 9) Определить множества, на которых отображение $f(x) = x^2$ является биекцией.

$R \to R$ не сюръекция, не инъекция,

$R \to [0,+\infty)$ сюръекция, не инъекция,

$[0,\infty) \to [0,\infty)$ сюръекция, инъекция – биекция.

Равномощные множества

Определение 4

Множества A и B называются эквивалентными (равномощными), если существует биекция $f: A \to B$

Обозначение $|A| = |B|$

Определение 5

Класс эквивалентных множеств, которому принадлежит множество A называют мощностью множества A, кардиналом или кардинальным числом множества A.

Говорят, что кардинальное число множества A не больше кардинального числа множества B $|A| \leq |B|$, если A равномощно некоторому подмножеству B.

Множество A называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел.

Мощность счетного множества обозначается $\aleph_0$

Примеры

- 1) $2N = \{2;4;6;8;10;12;...;2n;...\}$ - счетное

  $|2N| - ?$

  $f(n) = 2n$ - биекция

- 2) $|Z|$-? счетное

  0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; … -n; n

  $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \downarrow$

  1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; … 2n;2n+1

  $$f(x) = \begin{cases} -2x, если\ x < 0, \\ 2x+1, если\ x \geq 0 \end{cases}$$ биекция

- 3) |Q|-? (5 баллов)

Равномощные множества

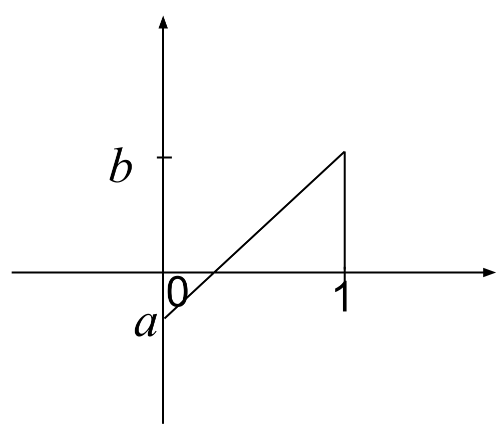
Определение 6

Множество А, равномощное множеству [0;1] называется множеством мощности континуум. Мощность множества континуум обозначается $2^{\aleph_0}$

Примеры

1) Доказать, что |[0;1]|=|[a;b]|.

$y=(b-a)x+a$ биекция



Примеры

2) Доказать, что |[0;1]|=|[0;1)|.

$$1 \to \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \to \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \to \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}} \to \frac{1}{2^n}, \dots$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, \text{если } x = \frac{1}{2^{n-1}}, \\ x, \text{если } x \neq \frac{1}{2^{n-1}}. \end{cases}$$

биекция

Можно доказать, что |[0;1]|=|(0;1)|

3) Доказать, что |(0;1)|=|R|.

$$y = tg\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

биекция

Теорема Кантора

Теорема Кантора

Для любого множества А имеет место неравенство

$$|A| < |B(A)|$$

Следствие

Не существует множества максимальной мощности