

ПРЕДИКАТИ ТА ЇХ РІЗНОВИДИ

Предикат на множині D – це часткова неоднозначна, взагалі кажучи, функція
 $P : D \rightarrow \{T, F\}$

Часткові неоднозначні предикати трактуємо як відношення між D та $\{T, F\}$, назвемо їх предикатами реляційного типу. $P(d)$ – множина значень, які предикат P може прийняти на $d \in D$. $P(d) \subseteq \{T, F\} \Rightarrow P(d)$ – одне із $\{\emptyset\}$, $\{T\}$, $\{F\}$, $\{T, F\}$.

Предикат $P : D \rightarrow \{T, F\}$ задається областю істинності та областю хибності
 $T(P) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d)\}$
 $F(P) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d)\}$.

Предикат P однозначний, якщо $T(P) \cap F(P) = \emptyset$

Предикат P тотальний, якщо $T(P) \cup F(P) = D$

Предикат $P : D \rightarrow \{T, F\}$ назвемо:

- неспростовним, або частково істинним, якщо $F(P) = \emptyset$
- виконуваним, якщо $T(P) \neq \emptyset$
- всюди невизначеним, якщо $T(P) = F(P) = \emptyset$
- тотально істинним, якщо $T(P) = D$
- тотально хибним, якщо $F(P) = D$
- тотожно істинним, якщо $T(P) = D$ і $F(P) = \emptyset$
- тотожно хибним, якщо $T(P) = \emptyset$ і $F(P) = D$
- тотально насиченим, якщо $T(P) = F(P) = D$

Для *однозначних* предикатів області істинності й хибності:

$$T(P) = \{d \in D \mid P(d) \downarrow = T\} \quad F(P) = \{d \in D \mid P(d) \downarrow = F\}$$

Нехай на D можна ввести відношення порядку за включенням даних

Предикат P *монотонний*: $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \subseteq P(d')$.

Предикат P *антитонний*: $d \subseteq d' \Rightarrow P(d) \supseteq P(d')$.

Для однозначних предикатів монотонність стає еквітонністю.

Однозначний предикат P *еквітонний*: $d' \supseteq d$ та $P(d) \downarrow \Rightarrow P(d') \downarrow = P(d)$.

Для *однозначного часткового* P монотонність означає: його інформативність не зменшується при збільшенні інформативності вхідних даних.

Для *монотонних тотальних* предикатів при розширенні вхідних даних інформативність може тільки зменшуватися, для них поняття монотонності малозмістовне, а змістовним є дуальне поняття антитонності.

Якщо P антитонний, то $P(\emptyset)$ складається з усіх значень, які P може приймати на D , тобто $P(\emptyset) = E_P$. Тому для *тотальних* предикатів антитонність означає: “інформативність” предиката не зменшується при збільшенні “інформативності” вхідних даних.

Водночас для *однозначних* предикатів поняття антитонності малозмістовне, адже для них антитонними можуть бути лише майже константні предикати:

$$P(d) \cong T \text{ для всіх } d \in D \text{ або } P(d) \cong F \text{ для всіх } d \in D$$

Іменні множини

V - A -ІМ – це довільна часткова однозначна функція $d : V \rightarrow A$

V - A -ІМ подаємо як $[v_1 \sqsubseteq a_1, \dots, v_n \sqsubseteq a_n, \dots]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$.

Введемо функцію $asn : {}^V A \rightarrow 2^V$: $asn(d) = \{v \in V \mid v \sqsubseteq a \in d \text{ для деякого } a \in A\}$.

Множину всіх V - A -ІМ будемо позначати ${}^V A$.

V - A -ІМ δ *повна* (максимальна), якщо $asn(\delta) = V$

повна V - A -ІМ – це тотальна однозначна функція $V \rightarrow A$.

Множину всіх повних V - A -ІМ будемо позначати A^V .

Для V - A -ІМ вводимо теоретико-множинні операції $\cap$ та $\setminus$.

Параметрична операція $\parallel X$ звуження V - A -ІМ за множиною $X \subseteq V$:

$$d \parallel X = \{v \sqsubseteq a \in d \mid v \in X\}.$$

Операція $\parallel_{-X}$ видалення компонент з іменами із $X \subseteq V$: $d \parallel_{-X} = d \parallel (V \setminus X)$

Замість $d \parallel_{-\{x\}}$ пишемо $d \parallel_{-x}$

Введемо відношення $=_{-x}$ рівності з точністю до компоненти з іменем x :

$$d_1 =_{-x} d_2, \text{ якщо } d_1 \parallel_{-x} = d_2 \parallel_{-x}$$

Операція ∇ *накладки* ІМ δ_2 на ІМ δ_1 : $\delta_1 \nabla \delta_2 = \delta_2 \cup (\delta_1 \parallel (V \setminus asn(\delta_2)))$

Операцію *реномінації* $r_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n} : {}^V A \rightarrow {}^V A$ задамо так:

Скорочено пишемо $\bar{y}$ замість $y_1, \dots, y_n$

Операцію реномінації ІМ продовжимо на множини ІМ

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(L) = \{r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \mid d \in L\}, \quad L \subseteq {}^V A$$

Монотонність операції реномінації: якщо $d_1 \subseteq d_2$, то $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d_1) \subseteq r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d_2)$

Елімінація тотожних перейменувань: $r_{\bar{z}, \bar{x}}^{\bar{z}, \bar{v}}(d) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)$

Маємо $r_{y, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(d) (=)_{-z} r_{u, \bar{x}}^{z, \bar{v}}(d) \quad \left(\begin{smallmatrix} z, \bar{v} \\ y, \bar{x} \end{smallmatrix} d =_{-z} \begin{smallmatrix} \bar{v} \\ \bar{x} \end{smallmatrix} d \right)$

Тотожна реномінація r діє як тотожне відображення: $r(d) = d$.

Послідовне застосування двох операцій реномінації $r_{\bar{u}}^{\bar{u}}$ (внутрішня) та $r_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ (зовнішня) можна подати у вигляді однієї операції реномінації, яку назовемо *згорткою* цих операцій і позначимо $r_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{u}}$

$$r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(r_{\bar{y}}^{\bar{u}}(d)) = r_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{u}}(d)$$

Нехай маємо послідовне застосування двох операцій реномінації

$$\mathbf{r}_{s_1, \dots, s_n, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k} \quad , \quad \mathbf{r}_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m}$$

де $\{w_1, \dots, w_m\} \cap \{u_1, \dots, u_k\} = \emptyset$. Тоді для всіх $d \in {}^V A$

$$\mathbf{r}_{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m} (\mathbf{r}_{s_1, \dots, s_n, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k} (d)) \stackrel{m}{=} \mathbf{r}_{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m, z_1, \dots, z_k}^{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m, u_1, \dots, u_k} (d)$$

де кожні a_i та b_j задаються так:

$$a_i = \begin{cases} x_i & \text{якщо } x_i \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k\}, \\ s_l & \text{якщо } x_i = v_l \text{ для деякого } v_l \\ z_l & \text{якщо } x_i = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} y_j & \text{якщо } y_j \notin \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_k\}, \\ s_l & \text{якщо } y_j = v_l \text{ для деякого } v_l \\ z_l & \text{якщо } y_j = u_l \text{ для деякого } u_l \end{cases}$$

Згортка операцій реномінації асоціативна та некомутативна

Квазіарні функції та предикати

Функції (зокрема, предикати), задані на ІМ, називають квазіарними

V -квазіарна функція – функція вигляду $f: {}^V A \rightarrow R$

V - A -квазіарна функція – функція вигляду $f: {}^V A \rightarrow A$

V - A -квазіарний предикат – функція вигляду $P: {}^V A \rightarrow \{T, F\}$

Ім'я $z \in V$ *строго неістотне* для V - A -квазіарної функції (предиката) g , якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^V A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) = g(d_2)$.

Ім'я z *неістотне* для однозначної V - A -квазіарної функції (предиката) g , якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^V A$ таких, що $d_1 =_{-z} d_2$, маємо $g(d_1) \cong g(d_2)$.

Для однозначних еквітонних функцій маємо еквівалентне визначення.

Ім'я x *неістотне* для однозначної еквітонної функції (предиката) g , якщо для кожних $d \in {}^V A$ та $a, b \in A$ маємо $g(d \nabla x \sqcap a) \cong g(d \nabla x \sqcap b)$.

Для однозначних функцій (зокрема, предикатів) маємо:

- 1) $x \in V$ *неістотне* для еквітонної $g \Leftrightarrow g(d) \cong g(d \nabla x \sqcap a) \quad \forall d \in {}^V A, a \in A$
- 2) $x \in V$ *неістотне* для еквітонної повнототальної $g \Leftrightarrow g(d) = g(d \nabla x \sqcap a) \quad \forall d \in A^V, a \in A$

V - A -квазіарний предикат P :

- неспростовний (частково істинний), якщо $F(P) = \emptyset$
- виконуваний, якщо $T(P) \neq \emptyset$
- тотально істинний, якщо $T(P) = {}^V A$
- тотально хибний, якщо $F(P) = {}^V A$
- тотожно істинний, якщо $T(P) = {}^V A$ та $F(P) = \emptyset$ (позначаємо T)
- тотожно хибний, якщо $T(P) = \emptyset$ та $F(P) = {}^V A$ (позначаємо F)
- всюди невизначений, якщо $T(P) = \emptyset$ та $F(P) = \emptyset$ (позначаємо $\perp$)
- тотально насичений, якщо $T(P) = {}^V A$ та $F(P) = {}^V A$ (позначаємо $\square$).

Часткові неоднозначні квазіарні предикати назвемо R -предикатами

часткові однозначні – P -предикатами

тотальні – T -предикатами

тотальні однозначні – TS -предикатами.

Класи R -предикатів, P -предикатів, T -предикатів, TS -предикатів відповідно позначаємо

$$PrR_A^V, PrP_A^V, PrT_A^V, PrTS_A^V$$

Монотонні R -предикати назвемо RM -предикатами

антитонні R -предикати назвемо RA -предикатами

антитонні T -предикати назвемо TA -предикатами

еквітонні P -предикати назвемо PE -предикатами

Класи RM -предикатів, RA -предикатів, TA -предикатів, PE -предикатів позначаємо .

$$PrRM_A^V, PrRA_A^V, PrPE_A^V, PrTA_A^V$$

Константні предикати $\perp$, T , F , $\square$ є монотонними й антитонними.

В класі TS -предикатів монотонними й антитонними є лише константні предикати T та F .

Приклад 1. Розглянемо наступні предикати.

$$P_1(d) = \begin{cases} \text{якщо} & x \in d, \text{ то } n \leq d \\ \text{якщо} & x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_2(d) = \begin{cases} \text{якщо} & x \in d, \text{ то } n \leq d \\ \text{якщо} & x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_3(d) = \begin{cases} \text{якщо} & x \in d, \text{ то } n \leq d \\ \emptyset & \text{якщо } x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_4(d) = \begin{cases} \text{якщо}, & (x) \in a, \text{ то } n \leq d \\ \text{якщо} & x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_5(d) = \begin{cases} \text{якщо} & x \in d, \text{ то } n \leq d \\ \emptyset & \text{якщо } x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_6(d) = \begin{cases} \text{якщо}, & (x) \in a, \text{ то } n \leq d \\ \text{якщо} & x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_7(d) = \begin{cases} F & \text{якщо } x \notin a, \text{ то } n \leq d \\ \emptyset & \text{якщо } x \in a, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_8(d) = \begin{cases} \text{якщо}, & (x) \in a, \text{ то } n \leq d \\ \text{якщо} & x \notin d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_9(d) = \begin{cases} \text{якщо} & x \notin d, \text{ то } n \leq d \\ \emptyset & \text{якщо } x \in d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

$$P_{10}(d) = \begin{cases} \text{якщо}, & (x) \in a, \text{ то } n \leq d \\ \text{якщо} & x \in d, \text{ то } n > d \end{cases}$$

P_1 та P_2 тотальні однозначні немонотонні (нееквітонні) й неантитонні,
 P_3 та P_5 монотонні (еквітонні) однозначні,
 P_4 та P_6 монотонні тотальні неоднозначні,
 P_7 та P_9 антитонні часткові однозначні,
 P_8 та P_{10} антитонні тотальні неоднозначні.

Приклад 2. Спеціальні 0-арні композиції – параметризовані за предметними іменами *предикати-індикатори* εz , які визначають наявність в $d \in {}^V A$ компоненти з відповідним $z \in V$. Предикати εz визначаємо так:

$$\varepsilon z(d) = \begin{cases} T \text{ якщо } d \uparrow \\ F \text{ якщо } d \downarrow \end{cases}$$

Через області істинності й хибності предикати εz визначаємо так:

$$T(\varepsilon z) = \{d \mid d(z) \uparrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \notin \text{asn}(d)\};$$

$$F(\varepsilon z) = \{d \mid d(z) \downarrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \in \text{asn}(d)\}.$$

Предикати εz не є монотонними та не є антитонними.

Кожне $x \in V$ таке, що $x \neq z$, неістотне для εz

Використовують також дуальні до εz *предикати-індикатори* Ez .

Предикати Ez визначаються так:

$$T(Ez) = \{d \mid d(z) \downarrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \in \text{asn}(d)\};$$

$$F(Ez) = \{d \mid d(z) \uparrow\} = \{d \in {}^V A \mid z \notin \text{asn}(d)\}.$$

Предикати-індикатори Ez та εz пов'язані так: $Ez = \neg \varepsilon z$.

Предикат $\tilde{P}$ *дуальний* до предиката P , якщо $T(\tilde{P}) = \overline{F(P)}$ ($F\tilde{P} = \overline{T P}$)
 Доповнення до V - A -квазіарного предиката P як реляції $P \subseteq {}^V A \times Bool$ – це

$$\bar{P} \text{ та } T(\bar{P}) = \overline{F(P)} \quad F\bar{P} = \overline{T P}$$

Маємо $T(\tilde{P}) = F(\bar{P})$, $F(\tilde{P}) = T(\bar{P})$

Приклад пари взаємно дуальних та взаємно доповнених предикатів: $\perp$ та $\square$

Твердження 1. Q монотонний $\Rightarrow \bar{Q}$ та $\tilde{Q}$ антитонні;

Q антитонний $\Rightarrow \bar{Q}$ та $\tilde{Q}$ монотонні.

Твердження 2. $Q \in PrP_A^V \Leftrightarrow \tilde{Q} \in PrT_A^V \Leftrightarrow \bar{Q} \in PrT_A^V$;

$Q \in PrT_A^V \Leftrightarrow \tilde{Q} \in PrP_A^V \Leftrightarrow \bar{Q} \in PrP_A^V$;

$Q \in PrTS_A^V \Leftrightarrow \bar{Q} \in PrTS_A^V$;

$Q \in PrTS_A^V \Rightarrow \tilde{Q} = Q$

ПРЕДИКАТНІ КОМПОЗИЦІЙНІ СИСТЕМИ

Семантична основа КНЛ – *композиційні предикатні системи*.

Це трійки вигляду (D, PF, C) , де

D – множина даних

PF – множина предикатів (та функцій) на D

C – множина композицій над PF .

Композиційна система (D, PF, C) задає дві алгебри:

алгебру (алгебраїчну систему) *даних* (D, PF)

композиційну алгебру предикатів (та функцій) (PF, C) .

Побудова композиційної алгебри визначає мову логіки відповідного рівня. Терми такої алгебри будуть формулами мови.

Для логік квазіарних предикатів D – це множина ${}^V A$ всіх V - A -ІМ над певною множиною базових даних A (вважаємо $A \neq \emptyset$).

Для логік реномінативного і кванторних рівнів PF конкретизуємо як Pr^A
 C конкретизується як множина композицій на Pr^A .

Тоді КС набувають вигляду $({}^V A, Pr^A, C)$.

Це композиційні системи V - A -квазіарних предикатів.

(Pr^A, C) – це композиційні алгебри V - A -квазіарних предикатів.

Для логік функціональних рівнів PF конкретизується як $Fn^A \cup Pr^A$,

C – як множина композицій на $Fn^A \cup Pr^A$.

Тоді КС набувають вигляду $({}^V A, Fn^A \cup Pr^A, C)$

Це композиційні системи V - A -квазіарних функцій та предикатів.

Алгебри $(Fn^A \cup Pr^A, C)$ – композиційні алгебри V - A -квазіарних функцій та предикатів

Композиції пропозиційного рівня

На пропозиційному рівні композиції називають *логічними зв'язками*, вони працюють лише з виробленими предикатами істиннісними значеннями

Визначення логічних зв'язок $\neg$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. через області істинності та хибності відповідних предикатів $\neg P$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \& Q$, $P \leftrightarrow Q$:

$$T(\neg P) = F(P)$$

$$F(\neg P) = T(P);$$

$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q);$$

$$F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q);$$

$$T(P \& Q) = T(P) \cap T(Q);$$

$$F(P \& Q) = F(P) \cup F(Q);$$

$$T(P \rightarrow Q) = F(P) \cup T(Q);$$

$$F(P \rightarrow Q) = T(P) \cap F(Q);$$

$$T(P \leftrightarrow Q) = (F(P) \cup T(Q)) \cap (F(Q) \cup T(P))$$

$$F(P \leftrightarrow Q) = (T(P) \cap F(Q)) \cup (F(P) \cap T(Q))$$

Основні властивості пропозиційних композицій:

$$P \vee Q = Q \vee P$$

$$P \& Q = Q \& P$$

$$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$$

$$(P \vee Q) \& R = (P \& R) \vee (Q \& R)$$

$$(P \& Q) \vee R = (P \vee R) \& (Q \vee R)$$

$$\neg \neg P = P$$

$$P = P \vee P \text{ та } P = P \& P$$

$$\neg(P \vee Q) = (\neg P) \& (\neg Q)$$

$$\neg(P \& Q) = (\neg P) \vee (\neg Q)$$

Композиції $\neg$ та $\vee$ – базові пропозиційні композиції.

Композиції $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$ є похідними, вони виражаються через $\neg$ та $\vee$:

$$P \rightarrow Q = \neg P \vee Q;$$

$$P \& Q = \neg(\neg P \vee \neg Q);$$

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \& (Q \rightarrow P).$$

Безкванторні композиційно-номінативні логіки

Безкванторні логіки квазіарних предикатів займають проміжне становище між пропозиційною логікою і першопорядковими КНЛ.

В безкванторних логіках не використовуємо композиції квантифікації, характерні для першопорядкових логік.

Безкванторний рівень розпадається на низку підрівнів (в дужках назва):

- реномінативний (РНЛ);
- реномінативний з рівністю (РНЛР);
- реномінативний з строгою рівністю (РНЛРС);
- безкванторно-функціональний (БКНЛ);
- безкванторно-функціональний з рівністю (БКНЛР);
- безкванторно-функціональний з строгою рівністю (БКНЛРС).

На **реномінативному рівні** до логічних зв'язок додамо параметризовану за множиною пар імен композицію *реномінації* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} : Pr^A \rightarrow Pr^A$

Композиція реномінації задається так. Для кожного $d \in {}^V A$ маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Композицію реномінації можна визначити через області істинності та хибності відповідного предиката:

$$T(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in T(P)\} = (r_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(T(P))$$

$$F(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)) = \{d \in {}^V A \mid r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d) \in F(P)\} = (r_{\bar{x}}^{\bar{v}})^{-1}(F(P))$$

Композиція R без параметрів діє як тотожне відображення: $R(P) = P$

Результатом послідовного виконання двох композицій реномінації є їх *згортка*, яка визначається так. Для кожного $d \in {}^V A$ маємо

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \boxtimes_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)(d) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P))(d) = P(r_{\bar{y}}^{\bar{w}} \boxtimes_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$$

Згортка композицій реномінації асоціативна та некомутативна

Основні властивості композицій реномінації:

$$R(P) = P$$

$$R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \& Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \& R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \rightarrow Q) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \rightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$$

$$R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \quad \text{за умови: } z \in V \text{ строго неістотне для } P.$$

$$R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) \cong R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \quad \text{за умови: } z \in V \text{ неістотне для } P.$$

Композиція реномінації зберігає монотонність (еквітонність) і антитонність квазіарних функцій та предикатів.

На **реномінативному рівні з рівністю** додатково можна ототожнювати й розрізняти значення предметних імен за допомогою спеціальних 0-арних композицій – параметризованих за іменами предикатів рівності.

Розглядаємо два різновиди таких предикатів:

- слабкої (з точністю до визначеності) рівності $=_{xy}$ (рівень РНЛР)
- строгої (точної) рівності $\equiv_{xy}$ (рівень РНЛРС)

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ задамо через області істинності й хибності:

$$T(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow = d(y) \downarrow\};$$

$$F(=_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow \neq d(y) \downarrow\};$$

$$T(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow = d(y) \downarrow\} \cup \{d \in {}^V A \mid d(x) \uparrow \text{ та } d(y) \uparrow\};$$

$$F(\equiv_{xy}) = \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow \neq d(y) \downarrow\} \cup \{d \in {}^V A \mid d(x) \downarrow, d(y) \uparrow \text{ або } d(x) \uparrow, d(y) \downarrow\}.$$

Множиною строго неістотних для $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ предметних імен $\in V \setminus \{x, y\}$.

Предикати $=_{xy}$ часткові однозначні, вони монотонні й еквітонні.

Водночас предикати $\equiv_{xy}$ тотальні однозначні, немонотонні й нееквітонні.

Приклад. $\equiv_{xy} ([z \sqsubseteq a] = T, \equiv_{xy} ([z \sqsubseteq a, x \sqsubseteq a]) = F, \equiv_{xy} ([z \sqsubseteq a, x \sqsubseteq a, y \sqsubseteq a]) = T$.

Тому на рівні РНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна.

Предикати $\equiv_{xy}$ подаються через $=_{xy}$ і спеціальні предикати-індикатори εz :

Теорема. Маємо $\equiv_{xy} = (=_{xy} \& \neg \varepsilon x \& \neg \varepsilon y) \vee (\varepsilon x \& \varepsilon y)$.

Маємо співвідношення:

$$T(=_{xy}) \subset F(\varepsilon x) \cap F(\varepsilon y);$$

$$F(=_{xy}) \subset F(\varepsilon x) \cap F(\varepsilon y).$$

Предикати рівності $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ також позначаємо $x=y$ та $x\equiv y$.

Властивості предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$.

- кожний предикат $=_{xx}$ є неспростовним
- кожний предикат $\equiv_{xx}$ є тотожно істинним
- для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо рефлексивність та симетричність:
 $=_{xy}(d) = =_{xy}(d)$ та $\equiv_{xy}(d) = \equiv_{xy}(d)$ кожного $d \in {}^V A$
- для предикатів $=_{xy}$ та $\equiv_{xy}$ маємо транзитивність: для кожного $d \in {}^V A$
 $\equiv_{xy}(d) = T$ та $\equiv_{yz}(d) = T \Rightarrow \equiv_{xz}(d) = T$.

Водночас для предикатів $=_{xy}$ транзитивності по окремих даних немає.

Приклад 1. Для $d = [x \sqsubseteq a, z \sqsubseteq b]$, де $a \neq b$, маємо $=_{xy}(d) \uparrow, =_{yz}(d) \uparrow, =_{xz}(d) = F$.
 Це означає: $=_{xy}$ та $=_{yz}$ на такому d неспростовні, $=_{xz}$ на такому d хибний.

Для предикатів $=_{xy}$ маємо властивість заміни рівних:

$$\text{для кожних } P \in Pr^A \text{ та } d \in {}^V A \quad \equiv_{xy}(d) = T \Rightarrow R_{\bar{z},x}^{\bar{u},v}(P)(d) = R_{\bar{z},y}^{\bar{u},v}(P)(d)$$

Для предикатів $=_{xy}$ заміни рівних по окремих даних вже немає.

Приклад 2. Для $d = [x \sqsubseteq a, z \sqsubseteq b]$ маємо $=_{xy}(d) \uparrow$ – $=_{xy}$ на d неспростовний.

Задамо $P([z \sqsubseteq b, v \sqsubseteq a,]) = T, P([z \sqsubseteq b]) = F$, тоді $R_x^v(P)(d) = T, R_y^v(P)(d) = F$

На **безкванторно-функціональному рівні** можна формувати нові аргументи для функцій і предикатів. Це дозволяє ввести параметризовану за іменами композицію суперпозиції.

$(n+1)$ -арна композиція **суперпозиції** $S^{v_1, \dots, v_n}$ V -квазіарним функціям $f, g_1, \dots, g_n$ зіставляє V -квазіарну функцію $S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)$, значення якої $\forall d \in {}^V A$ обчислюється так:

$$S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)(d) = f([v_1 \sqcap g_1(d), \dots, v_n \sqcap g_n(d)] \cup (d \parallel (\bigvee \{v_1, \dots, v_n\}))).$$

Зрозуміло, що в інших позначеннях

$$S^{v_1, \dots, v_n}(f, g_1, \dots, g_n)(d) = f(d \nabla [v_1 \sqcap g_1(d), \dots, v_n \sqcap g_n(d)]).$$

Виділення квазіарних функцій на A та квазіарних предикатів на A індукує виділення суперпозицій двох типів:

- $(Fn^A)^{n+1} \rightarrow Fn^A$ функцій у функції (результатом є функція);
- $Pr^A \times (Fn^A)^n \rightarrow Pr^A$ функцій у предикати (результатом є предикат).

Суперпозицію без параметрів S трактуємо як тотожне відображення

Виділимо множину **функцій деномінації** $Nf^A = \{ 'v \mid v \in V \} : 'v(d) = d(v)$

Тоді реномінації можна промодельовувати за допомогою суперпозицій:

$$R_{x_1, \dots, x_n}^{v_1, \dots, v_n}(f) = S^{v_1, \dots, v_n}(f, 'x_1, \dots, 'x_n)$$

На безкванторно-функціональних рівнях з рівністю додатково можна ототожнювати й розрізняти предметні значення, що дає змогу ввести спеціальну композицію рівності вигляду $Fn^A \times Fn^A \rightarrow Pr^A$.

Розглядаємо дві її різновидності:

- слабкої (з точністю до визначеності) рівності =
- строгої (точної) рівності $\equiv$.

Композиції = та $\equiv$ задаються так:

$$(f, g)(d) = \begin{cases} \text{Тякщо } (f \downarrow \text{та } g \downarrow \text{та } f \downarrow = g \downarrow) \\ \text{Та } () f \downarrow () g \downarrow \downarrow \quad f \downarrow \neq g \downarrow \\ \text{невизначене, якщо } f(d) \uparrow \text{ або } g(d) \uparrow. \end{cases}$$

$$\equiv (f, g)(d) = \begin{cases} \text{Тякщо } (f \downarrow \downarrow g \downarrow \text{та } f \downarrow = g \downarrow) \text{ або } (f \downarrow \uparrow \text{та } g \downarrow \uparrow) \\ \text{Тякщо } (f \downarrow \downarrow g \downarrow \downarrow f \downarrow \neq g \downarrow) \text{ або } (f \downarrow \downarrow g \downarrow \uparrow) \text{ або } (f(d) \uparrow, g(d) \downarrow) \end{cases}$$

Композиції суперпозиції та = *зберігають еквітонність* квазіарних функцій та предикатів.

Композиція $\equiv$ *еквітонність не зберігає*. Тому на рівні БКНЛРС логіки еквітонних предикатів розглядати не можна

Властивості композицій суперпозиції

S¬) Дистрибутивність суперпозиції щодо ¬:

$$S^{\bar{v}}(\neg P, \bar{f}) = \neg S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

S∨) Дистрибутивність суперпозиції щодо ∨:

$$S^{\bar{v}}(P \vee Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \vee S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

Аналогічно – властивості дистрибутивності суперпозиції щодо $\rightarrow$, $\&$, $\leftrightarrow$:

$$S\&) S^{\bar{v}}(P \& Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \& S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

$$S\rightarrow) S^{\bar{v}}(P \rightarrow Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \rightarrow S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

$$S\leftrightarrow) S^{\bar{v}}(P \leftrightarrow Q, \bar{f}) = S^{\bar{v}}(P, \bar{f}) \leftrightarrow S^{\bar{v}}(Q, \bar{f})$$

SI) Елімінація суперпозиції без параметрів (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$): $S(\phi) = \phi$

SS) Згортка суперпозицій (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$, позначення $\bar{u}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{r}, \bar{w}, \bar{v}, \bar{s}$ відповідно для $u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n; x_1, \dots, x_k; r_1, \dots, r_k; w_1, \dots, w_k; v_1, \dots, v_m; s_1, \dots, s_m$):

$$\begin{aligned} S^{\bar{u}, \bar{x}}(S^{\bar{x}, \bar{v}}(\phi, \bar{r}, \bar{s}), \bar{t}, \bar{w}) = \\ = S^{\bar{u}, \bar{x}, \bar{v}}(\phi, \bar{t}, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(r_k, \bar{t}, \bar{w}), S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_1, \bar{t}, \bar{w}), \dots, S^{\bar{u}, \bar{x}}(s_m, \bar{t}, \bar{w})) \end{aligned}$$

CN) Згортка імен (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$):

$$S^{x_1, \dots, x_m, v_1, \dots, v_n}(\phi, 'x_1, \dots, 'x_m, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n)$$

Зокрема, маємо $S^{x_1, \dots, x_m}(\phi, 'x_1, \dots, 'x_m) = \phi$

SD) Згортка неістотних імен для функцій розіменування:

$$S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n) = 'x \quad x \notin \bar{v}$$

DF) Спрощення для функцій розіменування:

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}('x, f, g_1, \dots, g_n) = f$$

Зокрема, маємо $S^x('x, f) = f$

CU) Згортка за неістотним іменем (тут $\phi \in Fn^A \cup Pr^A$)

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\phi, f, g_1, \dots, g_n) = S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n) \quad \text{якщо } x \text{ строго неістотне для } \phi$$

Зокрема, маємо $S^x(\phi, f) = \phi$

$$S^{x, v_1, \dots, v_n}(\phi, f, g_1, \dots, g_n) \neq S^{v_1, \dots, v_n}(\phi, g_1, \dots, g_n) \quad \text{якщо } x \text{ неістотне для } \phi.$$

Зокрема, маємо $S^x(\phi, f) \neq \phi$

Властивості слабкої рівності

Тут $P \in Pr^A$ та $h, f, f_1, \dots, f_n, g, g_1, \dots, g_n \in Fn^A$.

Rf) рефлексивність:

кожний предикат вигляду $f = f$ неспростовний

Sm) симетричність: $T(f = g) = T(g = f)$ та $F(f = g) = F(g = f)$

це означає: предикати $f = g$ та $g = f$ збігаються

Tr) транзитивність: $T(f = g) \cap T(g = h) \subseteq T(f = h)$

EF) неспростовним є кожний предикат вигляду

$$=(f, g) \rightarrow =(S^{z, \bar{v}}(h, f, \bar{r}), S^{z, \bar{v}}(h, g, \bar{r}))$$

EP) неспростовним є кожний предикат вигляду

$$=(f, g) \rightarrow (S^{z, \bar{v}}(P, f, \bar{r}) \leftrightarrow S^{z, \bar{v}}(P, g, \bar{r}))$$

SE) дистрибутивність суперпозиції щодо рівності:

$$S^{v_1, \dots, v_n}(=(f, h), f_1, \dots, f_n) \stackrel{=}{=} (S^{v_1, \dots, v_n}(f, f_1, \dots, f_n), S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n))$$

Із Tr: кожний предикат вигляду $=(f, g) \ \& \ =(g, h) \rightarrow =(f, h)$ неспростовний

Композиція еквіваленції $\leftrightarrow$ для предикатів – аналог відношення слабкої рівності для функцій.

Введемо композицію $\leftrightarrow_s$ *строгої еквіваленції*, яка є аналогом відношення звичайної (строгої) рівності для функцій. Для кожного $d \in D$ задамо:

$$(P \leftrightarrow_s Q)(d) = T \Leftrightarrow P(d) = Q(d),$$

$$(P \leftrightarrow_s Q)(d) = F \Leftrightarrow P(d) \neq Q(d).$$

Тут $P(d) = Q(d)$ означає строгу рівність: значення $P(d)$ та $Q(d)$ збігаються

Для логік часткових чи неоднозначних предикатів $\leftrightarrow_s$ незалежна від $\neg$ і $\vee$.

Властивості строгої рівності

Rfs) кожний предикат вигляду $f \equiv f$ тотожно істинний;

Sms) предикати $f \equiv g$ та $g \equiv f$ збігаються;

Trs) $f \equiv g$ та $g \equiv h$ тотожно істинні $\Rightarrow f \equiv h$ тотожно істинний;

EsF) $f_1 \equiv g_1, \dots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$$S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n) \equiv S^{v_1, \dots, v_n}(h, g_1, \dots, g_n) \quad \text{тотожно істинний};$$

EsP) $f_1 \equiv g_1, \dots, f_n \equiv g_n$ тотожно істинні $\Rightarrow$

$$S^{v_1, \dots, v_n}(P, f_1, \dots, f_n) \leftrightarrow_s S^{v_1, \dots, v_n}(P, g_1, \dots, g_n)$$

SsE) $S^{v_1, \dots, v_n}(\equiv(g, h), f_1, \dots, f_n) = \equiv(S^{v_1, \dots, v_n}(g, f_1, \dots, f_n), S^{v_1, \dots, v_n}(h, f_1, \dots, f_n))$

Із Trs: кожний предикат $\equiv(f, g) \ \& \ \equiv(g, h) \rightarrow \equiv(f, h)$ тотожно істинний

Твердження. $\equiv(f, g)$ та $\equiv(g, h)$ тотож. істинні $\Rightarrow \equiv(f, h)$ тотож. істинний

Першопорядкові композиційно-номінативні логіки

Композиції **квантифікації** є *визначальними* для першопорядкових логік

Дамо визначення 1-арних композицій $\exists x$ та $\forall x$ для однозначних предикатів. Предикати $\exists x(P)$ та $\forall x(P)$ позначаємо $\exists xP$ та $\forall xP$.

Для кожного $d \in {}^V A$ задамо:

$$\begin{aligned} \exists xP(\text{якщо}) & \begin{cases} T, & \text{якщо існує } b \in {}^V A \text{ } (P \text{ } d \nabla x \square)b = T \\ F, & P \text{ } d \nabla x \square \text{ для всіх } b \in {}^V A \text{ } (P \text{ } d \nabla x \square)b = F \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \\ \forall xP(\text{якщо}) & \begin{cases} F, & \text{якщо існує } b \in {}^V A \text{ } (P \text{ } d \nabla x \square)b = F \\ T, & P \text{ } d \nabla x \square \text{ для всіх } b \in {}^V A \text{ } (P \text{ } d \nabla x \square)b = T \\ & \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases} \end{aligned}$$

Визначення предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$ через їх області істинності й хибності

$$T(\exists xP) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d \nabla x \square a) \text{ для деякого } a \in A\}$$

$$F(\exists xP) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d \nabla x \square a) \text{ для всіх } a \in A\}$$

$$T(\forall xP) = \{d \in {}^V A \mid T \in P(d \nabla x \square a) \text{ для всіх } a \in A\}$$

$$F(\forall xP) = \{d \in {}^V A \mid F \in P(d \nabla x \square a) \text{ для деякого } a \in A\}.$$

Композиція $\forall x$ є похідною, вона подається так: $\forall xP \text{ } 28 \neg \exists x \neg P$.

Властивості композицій квантифікації

1) Комутативність однотипних кванторів:

$$\exists x \exists y P = \exists y \exists x P;$$

$$\forall x \forall y P = \forall y \forall x P.$$

2) Закони де Моргана для кванторів:

$$\neg \exists x P = \forall x \neg P;$$

$$\neg \forall x P = \exists x \neg P.$$

3) Неістотність квантифікованих імен:

$$\exists x \exists x P = \exists x P;$$

$$\exists x \forall x P = \forall x P;$$

$$\forall x \exists x P = \exists x P;$$

$$\forall x \forall x P = \forall x P.$$

4) Закони дистрибутивності кванторів щодо $\vee$ та $\&$:

$$\exists x P \vee \exists x Q = \exists x (P \vee Q);$$

$$\forall x P \& \forall x Q = \forall x (P \& Q).$$

Властивості кванторів, пов'язані з неістотністю імен

- ім'я $x \in V$ строго неістотне для предикатів $\exists xP$ та $\forall xP$;
- ім'я $x \in V$ строго неістотне для $P \Leftrightarrow P = \forall xP \Leftrightarrow P = \exists xP$;
- ім'я $x \in V$ неістотне для $P \Leftrightarrow P \cong \forall xP \Leftrightarrow P \cong \exists xP$.

Залучаючи до розгляду *реномінації та суперпозиції*, маємо:

Rep) $\exists y R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(P)$ неістотне для

P

Rep) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y P) \not\equiv \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P),$ $y \notin \bar{v} \bar{x}$

Rep) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y P) \not\equiv \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ для z P та $z \notin \bar{v} \bar{x}$

R $\exists$ R) $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x P) = R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)$

зокрема, $R_y^x(\exists x P) = \exists x P$

Ці властивості можна переформулювати для $\forall x$.

За умови неістотності імені z в Rep та R $\exists \exists$ маємо *слабку* рівність

Неістотність верхніх імен в реномінаціях:

$\exists y R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) = R_{z,\bar{x}}^{y,\bar{v}}(P) \quad (\forall \text{ при } P \notin, \frac{y,\bar{v}}{z,\bar{x}} P \quad y \notin \bar{v} \bar{x})$

$S \exists b$) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$:

$$S^{\bar{v}}(\exists x P, \bar{f}) \cong \exists x S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

$S \forall b$) Обмежена дистрибутивність суперпозиції щодо $\forall x$:

$$S^{\bar{v}}(\forall x P, \bar{f}) \cong \forall x S^{\bar{v}}(P, \bar{f})$$

Для $S \exists b$ та $S \forall b$ умови: $x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$ та x неістотне для $f_1, \dots, f_n$.

$S \exists$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\exists x$ ($x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$):

$$S^{v_1, \dots, v_n}(\exists x P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n)) = \exists x S^{v_1, \dots, v_n}(P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n))$$

$S \forall$) Спеціальна дистрибутивність суперпозиції щодо $\forall x$ ($x \notin \{v_1, \dots, v_n\}$):

$$S^{v_1, \dots, v_n}(\forall x P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n)) = \forall x S^{v_1, \dots, v_n}(P, S^x(f_1, v_1), \dots, S^x(f_n, v_n))$$

Rm1. Обмежувальні умови дистрибутивності та спеціальної дистрибутивності суперпозиції щодо кванторів є істотними.

Rm2. Рівність з точністю до визначеності $\cong$ для $S \exists b$ та $S \forall b$.

Задамо еквітонні f та P : $P(d) \uparrow$ при $v \notin asn(d)$ та $P([x \square 0, y \square 0, v \square 0]) = T$;
 $f(d) \uparrow$ при $x \notin asn(d)$ та $f(d) = 0$ при $x \in asn(d)$.

Тоді x неістотне для f , $\exists x S^v(P, f)([y \square 0]) = T$ та $S^v(\exists x P, f)([y \square 0]) \uparrow$.

Rm3. Для аналогічних властивостей $R \exists s$ та $R \forall s$ рівність строга!

Теорема 1. Композиції $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ зберігають:

- монотонність та антитонність квазіарних предикатів
- еквітонність однозначних квазіарних предикатів
- повнототальність і фінарність квазіарних предикатів

Наслідок 1. Класи монотонних та антитонних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних предикатів замкнені відносно композицій $\neg, \vee, \rightarrow, \&, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x, \forall x$.

Теорема 2. 1. Композиції $S^{\bar{v}}, =$ зберігають:

- еквітонність однозначних квазіарних функцій та предикатів
- повнототальність і фінарність квазіарних функцій та предикатів

2. Композиції $\equiv$ зберігають повнототальність і фінарність квазіарних функцій та предикатів

Наслідок 2. Класи еквітонних і повнототальних однозначних квазіарних функцій та предикатів замкнені відносно композицій $S^{\bar{v}}, =$

ЧИСТІ ПЕРШОПОРЯДКОВІ КОМПОЗИЦІЙНІ АЛГЕБРИ

Композиції $\neg, \vee, R_{\bar{x}}, \exists x$ зберігають:

- 1) однозначність та тотальність квазіарних предикатів;
- 2) монотонність та антитонність квазіарних предикатів

Твердження 1. $\bar{P} = \neg P$ та $\sim P = \neg \bar{P}$

Твердження 2. 1) $\neg \perp = \perp, \perp \vee \perp = \perp; \neg \square = \square, \square \vee \square = \square;$

2) $\neg T = F, \neg F = T, T \vee T = T, T \vee F = F \vee T = T, F \vee F = F;$

3) $T \vee \perp = \perp \vee T = T, F \vee \perp = \perp \vee F = \perp;$

$T \vee \square = \square \vee T = \square, F \vee \square = \square \vee F = \square; \perp \vee \square = \square \vee \perp = T.$

Твердження 3. 1) $R_{\bar{x}}(\perp) = \perp, \exists x(\perp) = \perp, R_{\bar{x}}(\cdot) = \cdot, \exists x(\cdot) = \cdot;$

2) $R_{\bar{x}}(T) = T, \exists x(T) = T; R_{\bar{x}}(F) = F, \exists x(F) = F$

Теорема. Наступні класи предикатів замкнені щодо композицій

$\neg, \vee, \&, \rightarrow, \leftrightarrow, R_{\bar{x}}, \exists x, \forall x$

1) класи P -предикатів, T -предикатів, TS -предикатів

2) класи монотонних, антитонних, еквітонних предикатів

3) множини $\{\perp\}, \{\square\}, \{T, F\}, \{\perp, T, F\}, \{\square, T, F\}, \{\perp, \square, T, F\}$

Композиційну алгебру $QR_A^V = (PrR_A^V, CQ)$, $\mathbb{R}Q = \{ \frac{\bar{v}}{\bar{x}} \mid \exists x$
назвемо *чистою першопорядковою алгеброю квазіарних предикатів*.

Таким чином, можна виділити підалгебри алгебри QR_A^V

$QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$ – алгебра P -предикатів;

$QT_A^V = (PrT_A^V, CQ)$ – алгебра T -предикатів;

$QTS_A^V = (PrTS_A^V, CQ)$ – алгебра TS -предикатів;

маємо $QTS_A^V \boxtimes QP_A^V$ та $QTS_A^V \boxtimes QT_A^V$

$QRM_A^V = (PrRM_A^V, CQ)$ – алгебра монотонних R -предикатів;

$QRA_A^V = (PrRA_A^V, CQ)$ – алгебра антитонних R -предикатів;

$QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$ – алгебра еквітонних P -предикатів;

маємо $QPE_A^V \boxtimes QP_A^V$ та $QPE_A^V \boxtimes QRM_A^V$

– алгебра антитонних T -предикатів;

$QTA_A^V = (PrTA_A^V, CQ)$

маємо

$QTA_A^V \boxtimes QT_A^V$ та $QTA_A^V \boxtimes QRA_A^V$

Сингулярні алгебри $\perp_{V-A} = (\{\perp_A^V\}, CQ)$ та $\cdot_{V-A} = (\{\cdot_A^V\}, CQ)$

для них маємо $\perp_{V-A} \boxtimes QPE_A^V$ та $\cdot_{V-A} \boxtimes QTA_A^V$

алгебра $B_{V-A} = (\{T_A^V, F_A^V\}, CQ)$

маємо $B_{V-A} \boxtimes QTS_A^V, B_{V-A} \boxtimes QPE_A^V, B_{V-A} \boxtimes QTA_A^V$

алгебри $BL_{V-A} \boxtimes (\{\perp_A^V, \cdot_A^V, T_A^V, F_A^V\}, CQ)$

$BP_{V-A} \boxtimes (\{\perp_A^V, T_A^V, F_A^V\}, CQ)$ та $BT_{V-A} \boxtimes (\{\perp_A^V, F_A^V\}, CQ)$

маємо $\perp_{V-A}, B_{V-A} \sqsubseteq BP_{V-A} \sqsubseteq BL_{V-A}; \cdot_{V-A}, B_{V-A} \sqsubseteq BT_{V-A} \sqsubseteq BL_{V-A};$

$BP_{V-A} \boxtimes QPE_A^V, BT_{V-A} \boxtimes QTA_A^V, BL_{V-A} \boxtimes QRM_A^V, BL_{V-A} \boxtimes QRA_A^V$

Тут $\boxtimes \sqsubseteq$ позначає: $\boxtimes$ є підалгеброю алгебри $\boxtimes$

Задамо відображення *дуалізації* δ так $\delta(PrR_A^V(\otimes)PrR_A^V) = \delta P = \tilde{P}$

Відображення дуалізації інволютивне: $\delta(\delta(P)) = P$

Твердження 4. $\delta(T) = T$, $\delta(F) = F$, $\delta(\perp) = \square$, $\delta(\square) = \perp$;

$$\delta(PrP_A^V) = PrT_A^V, \quad \delta(PrT_A^V) = PrP_A^V, \quad \delta(PrTS_A^V) = PrTS_A^V;$$

$$\delta(PrPE_A^V) = PrTA_A^V, \quad \delta(PrTA_A^V) = PrPE_A^V,$$

$$\delta(PrRA_A^V) = PrRM_A^V, \quad \delta(PrRM_A^V) = PrRA_A^V$$

Алгебри Pr_1 та Pr_2 дуальні, якщо $\delta(Pr_1) = Pr_2$ та $\delta(Pr_2) = Pr_1$.

Маємо *пари дуальних алгебр*

$$QP_A^V \text{ та } QT_A^V, \quad QPE_A^V \text{ та } QTA_A^V, \quad QRM_A^V \text{ та } QRA_A^V, \\ \perp_{V-A} \text{ та } \square_{V-A}, \quad BP_{V-A} \text{ та } BT_{V-A}$$

Алгебри $QR_A^V, QTS_A^V, B_{V-A}, BL_{V-A}$ *автодуальні*

ОСОБЛИВОСТІ КВАЗІАРНИХ ПРЕДИКАТІВ

Неспростовними чи невиконуваними можуть бути лише однозначні предикати. При цьому властивості неспростовності й виконуваності природно пов'язані:

Твердження. Предикат P неспростовний $\Leftrightarrow \neg P$ невиконуваний.

P неспростовний $\Leftrightarrow F(P) = \emptyset \Leftrightarrow T(\neg P) = \emptyset \Leftrightarrow \neg P$ невиконуваний.

Для часткових предикатів невірні деякі важливі закони класичної логіки.

Приклад 1. modus ponens невірне для загального випадку квазіарних предикатів.

Задамо P як $\perp$, Q – як тотожно хибний предикат. Тоді $P \rightarrow Q$ теж $\perp$.

Отже, P та $P \rightarrow Q$ частково істинні, водночас Q – тотожно хибний.

Приклад 2. Задамо предикат P як тотожно істинний, Q – як $\perp$, S – як тотожно хибний. Тоді $P \leftrightarrow Q$ та $Q \leftrightarrow S$ частково істинні, водночас $P \leftrightarrow S$ тотожно хибний.

Приклад 3. Нехай для предикатів p, q, s маємо $p(d) = T$, $q(d) \uparrow$, $s(d) = F$;

тоді $p(d) \cong q(d)$ та $q(d) \cong s(d)$, але невірно, що $p(d) \cong s(d)$.

Приклади 2, 3 заперечують транзитивність еквіваленції та слабкої рівності. Саме ця нетранзитивність є причиною невиконання деяких законів класичної логіки для класів часткових предикатів, які використовують слабо рівні клінієві зв'язки.

Необхідною й достатньою умовою коректності *modus ponens* у таких класах часткових предикатів є *еквітранзитивність* – транзитивність відношення $\sqsubseteq$ слабкої рівності предикатів, тобто транзитивність еквіваленції

Отже, відмінність логіки часткових предикатів і логіки класичної виявляється вже на пропозиційному рівні. Більш того, предикати прикладів 3 та 2 еквітонні.

Для класу еквітонних предикатів умова еквітранзитивності не виконується. Водночас вона справджується для класу повнототальних еквітонних предикатів.

Приклад 4. Для загального випадку квазіарних предикатів

традиційні закони $T(P) \subseteq T(\exists xP)$ та $T(\forall xP) \subseteq T(P)$ невірні

Задамо предикат P так:

$$P(d) = T \text{ при } x \notin \text{asn}(d) \text{ та } P(d) = F \text{ при } x \in \text{asn}(d).$$

Тоді для таких d , що $x \notin \text{asn}(d)$, маємо $P(d) = T$ та $\exists xP(d) = F$.

Задамо тепер предикат P так:

$$P(d) = F \text{ при } x \notin \text{asn}(d) \text{ та } P(d) = T \text{ при } x \in \text{asn}(d).$$

Тоді для таких d , що $x \notin \text{asn}(d)$, маємо $\forall xP(d) = T$ та $P(d) = F$.

Для еквітонних предикатів закони $T(P) \subseteq T(\exists xP)$ та $T(\forall xP) \subseteq T(P)$ вірні

Приклад 5. Існують квазіарні предикати: $P \sqsubseteq \forall xP$ і невірно $P \sqsubseteq \exists xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$$P(d) = F \text{ при } x \notin \text{asn}(d), P(d \nabla x \sqsubseteq a) = T \text{ та } P(d \nabla x \sqsubseteq b) \uparrow.$$

Тоді для всіх $d \in {}^V A$ маємо $\forall xP(d) \uparrow$, тому $P \sqsubseteq \forall xP$.

Водночас $P(d) = F$ при $x \notin \text{asn}(d)$, але $\exists xP(d) = T$ для всіх $d \in {}^V A$,
тому невірно $P \sqsubseteq \exists xP$.

Приклад 6. Існують квазіарні предикати: $P \sqsubseteq \exists xP$ і невірно $P \sqsubseteq \forall xP$.

Нехай $A = \{a, b\}$. Задамо предикат P так:

$$P(d) = T \text{ при } x \notin \text{asn}(d), P(d \nabla x \sqsubseteq a) = F \text{ та } P(d \nabla x \sqsubseteq b) \uparrow.$$

Тоді для всіх $d \in {}^V A$ маємо $\exists xP(d) \uparrow$, тому $P \sqsubseteq \exists xP$.

Водночас $P(d) = T$ при $x \notin \text{asn}(d)$, але $\forall xP(d) = F$ для всіх $d \in {}^V A$,
тому невірно $P \sqsubseteq \forall xP$.

Наведені співвідношення, пов'язані з *елімінацією кванторів*, видаються цілком очевидними, хоча це не так.

$$T(R_y^x(P)) \stackrel{(TR \exists)}{=} T(\exists x(P))$$

$$F(\exists x(P)) \stackrel{(FR \exists)}{=} F(R_y^x(P))$$

$$T(\forall x(P)) \stackrel{(TR \forall)}{=} T(R_y^x(P))$$

$$F(R_y^x(P)) \stackrel{(FR \forall)}{=} F(\forall x(P))$$

Теорема 1. 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень $TR \exists$, $FR \exists$, $TR \forall$, $FR \forall$;

2) для монотонних предикатів:

- вірні $TR \exists$ та $FR \forall$,
- невірні $FR \exists$ та $TR \forall$;

3) для антитонних предикатів:

- вірні $FR \exists$ та $TR \forall$,
- невірні $TR \exists$ та $FR \forall$.

Окремий випадок співвідношень $TR \exists$, $FR \exists$, $TR \forall$, $FR \forall$:

$$T(P) \subseteq T(\exists x(P)) \quad (T \exists)$$

$$F(\exists x(P)) \subseteq F(P) \quad (F \exists)$$

$$T(\forall x(P)) \subseteq T(P) \quad (T \forall)$$

$$F(P) \subseteq F(\forall x(P)) \quad (F \forall)$$

Наслідок. 1) Для загального випадку квазіарних предикатів невірне кожне із співвідношень $T \exists$, $F \exists$, $T \forall$, $F \forall$ невірні;

2) для монотонних предикатів:

– вірні $T \exists$ та $F \forall$,

– невірні $F \exists$ та $T \forall$;

3) для антитонних предикатів:

– вірні $F \exists$ та $T \forall$,

– невірні $T \exists$ та $F \forall$.

Для адекватного опису властивостей елімінації кванторів використаємо спеціальні предикати-індикатори εz .

Теорема 2. Справджуються наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} T(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap (F(\bar{y})) &\subseteq T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}} \exists x P) \\ F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) \cap (F(\bar{y})) &\subseteq F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x} P) \\ T(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) &\subseteq T(\varepsilon y) \cup T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) \\ F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) &\subseteq T(\varepsilon y) \cup F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \end{aligned}$$

Використовуючи предикати-індикатори Ez , це можна переписати так:

$$\begin{aligned} T(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \cap T(Ey) &\subseteq T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) \\ F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) \cap T(Ey) &\subseteq F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \\ T(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) &\subseteq F(Ey) \cup T(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) \\ F(R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x P)) &\subseteq F(Ey) \cup F(R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(P)) \end{aligned}$$

Як окремі випадки, а також використовуючи $\forall x$, отримуємо:

$$\begin{aligned} T(R_y^x(P)) \cap F(\bar{y}) &\subseteq T(\exists x P) & T(R_y^x(P)) \cap F(\bar{y}) &\subseteq T(R_y^x P) \\ F(\exists x P) \cap (F(\bar{y})) &\subseteq F(R_y^x P) & F(R_y^x(P)) \cap (F(\bar{y})) &\subseteq F(\forall x P) \end{aligned}$$