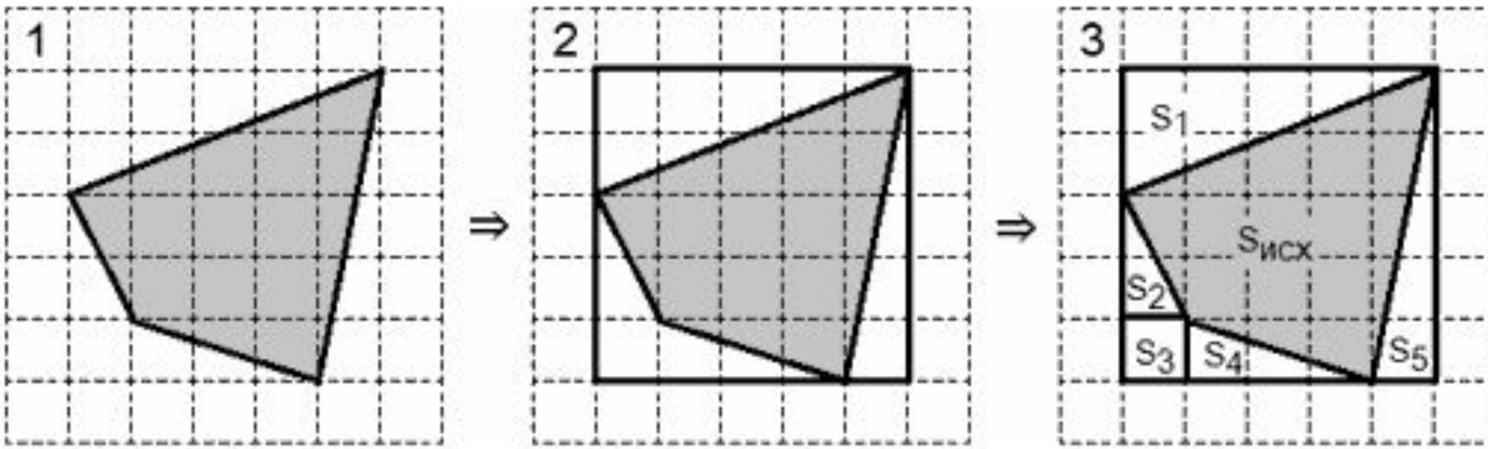
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ НА КВАДРАТНОЙ РЕШЕТКЕ

Для решения всех задач этого типа достаточно выполнить четыре простых шага:

1. Описать вокруг многоугольника прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат (линиям сетки). При этом желательно, чтобы на каждой стороне прямоугольника присутствовала хотя бы одна вершина исходной фигуры;
2. Разбить внутреннее пространство прямоугольника, не занятое исходной фигурой, на квадраты и треугольники. Лучше, если все линии разбиения будут параллельны осям координат;
3. Найти площадь каждого элемента разбиения. Сложив эти площади, получим площадь всего разбиения;
4. Наконец, из площади прямоугольника вычесть площадь разбиения — это и будет площадью исходной фигуры.

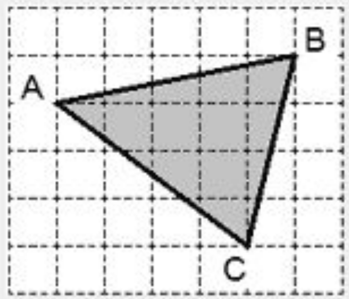
Проиллюстрируем каждый шаг решения:



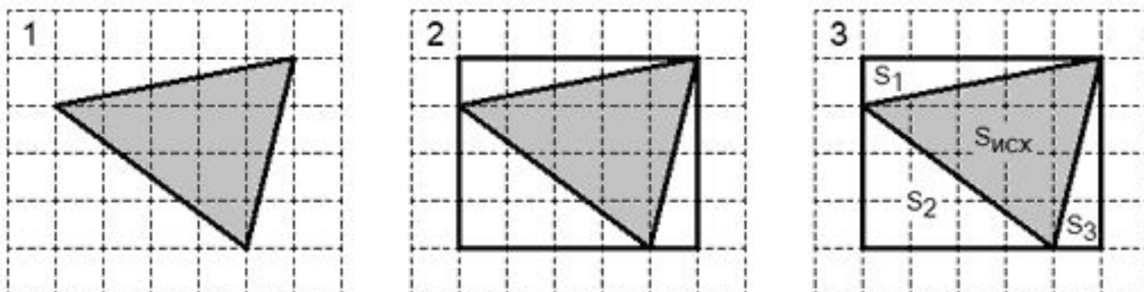
Последним шагом найдем площадь исходной фигуры:

$S_{исх} = S - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5)$, где S — площадь описанного прямоугольника. Осталось вычислить площадь большого прямоугольника и элементов разбиения. Эти несложные расчеты предлагается выполнить читателю в качестве упражнения.

Задача. Найти площадь треугольника ABC, изображенного на рисунке:



Обозначение треугольника можно опустить, поскольку оно нам не потребуется. Приведем первые три шага:

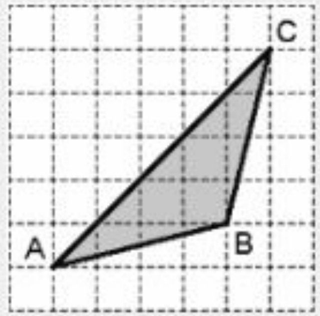


Итак, $S_{исх} = S - (S_1 + S_2 + S_3)$, где S — площадь описанного прямоугольника. Найдем площадь элементов разбиения:

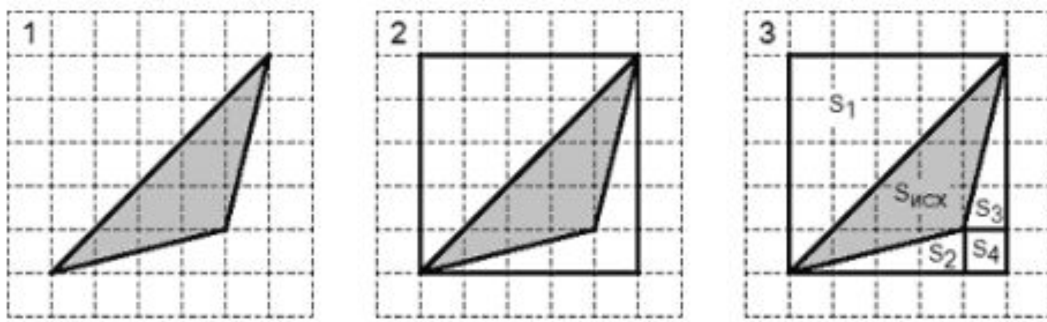
$S_1 = ½ \cdot 1 \cdot 5 = 2{,}5$; $S_2 = ½ \cdot 3 \cdot 4 = 6$; $S_3 = ½ \cdot 1 \cdot 4 = 2$; $S = 5 \cdot 4 = 20$.

Наконец, найдем площадь треугольника: $S_{исх} = 20 - (2{,}5 + 6 + 2) = 9{,}5$.

Задача. Найти площадь треугольника ABC, изображенного на рисунке:



Снова выполняем первые три шага. Заметим, что угол ABC — тупой, поэтому в разбиении присутствует квадрат. Имеем:



Очевидно, $S_{\text{исх}} = S - (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$, где S — площадь описанного прямоугольника. Найдем площадь элементов разбиения:

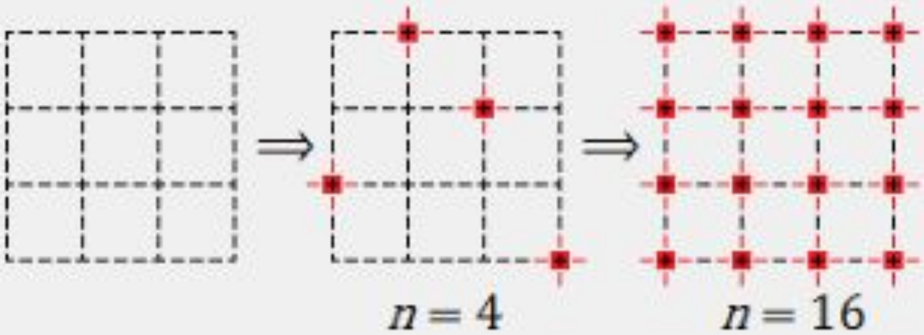
$S_1 = ½ \cdot 5 \cdot 5 = 12{,}5$; $S_2 = ½ \cdot 4 \cdot 1 = 2$; $S_3 = ½ \cdot 1 \cdot 4 = 2$; $S_4 = 1 \cdot 1 = 1$;
$S = 5 \cdot 5 = 25$.

Площадь треугольника: $S_{\text{исх}} = 25 - (12{,}5 + 2 + 2 + 1) = 7{,}5$.

Метод узлов

Узел координатной стеки — это любая точка, лежащая на пересечении вертикальных и горизонтальных линий этой сетки.

Обозначение:



На первой картинке узлы вообще не обозначены. На второй обозначены 4 узла. Наконец, на третьей картинке обозначены все 16 узлов.

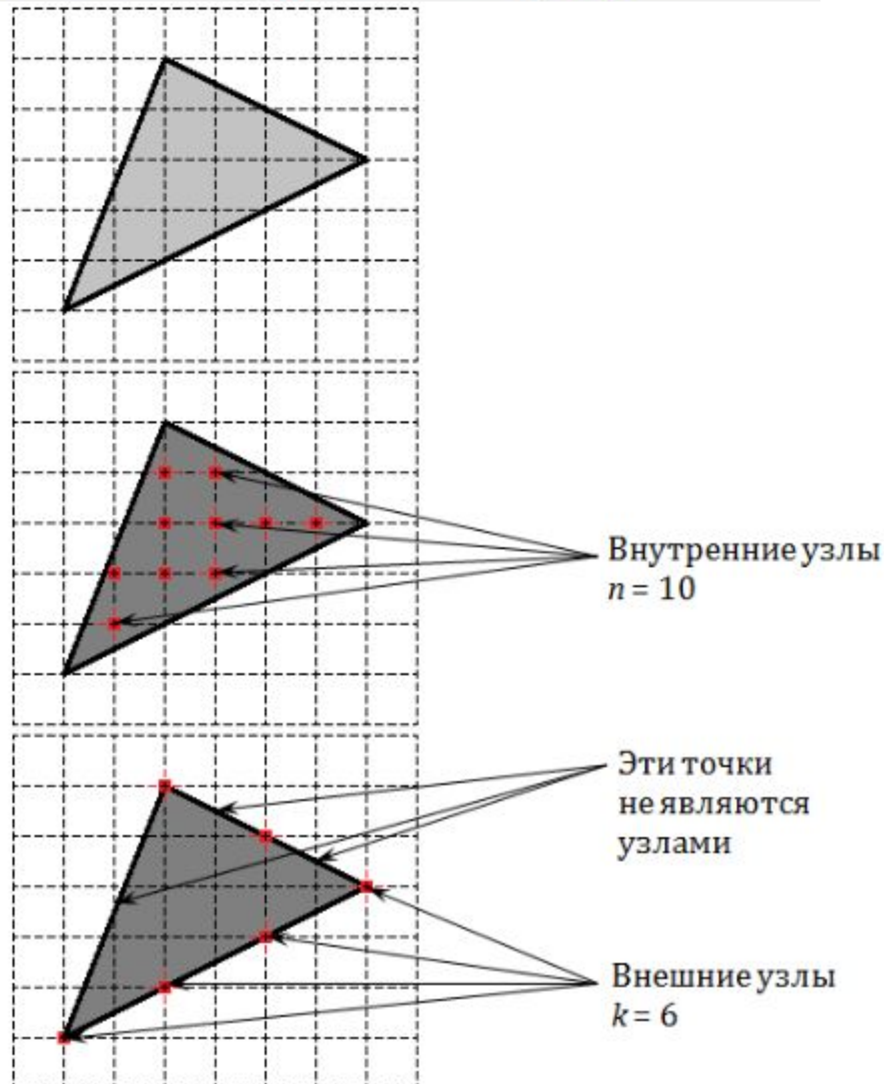
Теорема. Рассмотрим многоугольник на координатной сетке, вершины которого лежат в узлах этой сетк

равна:

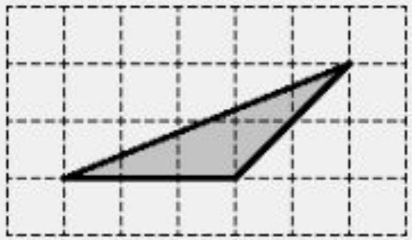
$$S = n + \frac{k}{2} - 1$$

где n — число узлов внутри данн

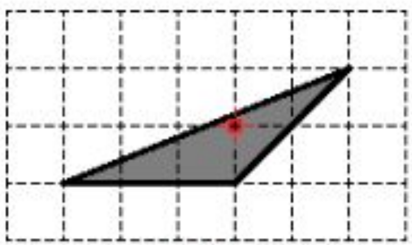
которые лежат на его границе (гр



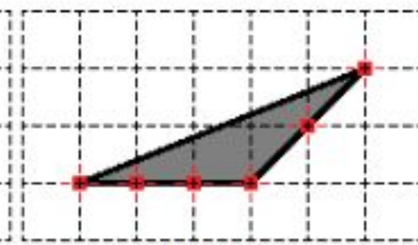
Задача. Найдите площадь треугольника, если размер клетки равен 1 x 1 см:



Для начала отметим узлы, которые лежат внутри треугольника, а также на его границе:



$n = 1$



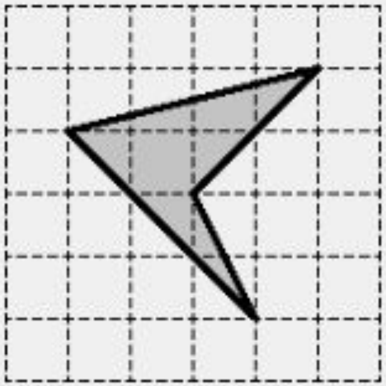
$k = 6$

Получается, что внутренний узел всего один: $n = 1$. Граничных узлов — целых шесть: три совпадают *с вершинами треугольника*, а еще три лежат на сторонах. Итого $k = 6$.

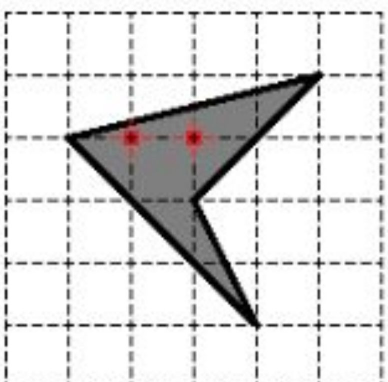
Теперь считаем площадь по формуле:

$$S = n + \frac{k}{2} - 1 = 1 + \frac{6}{2} - 1 = 3$$

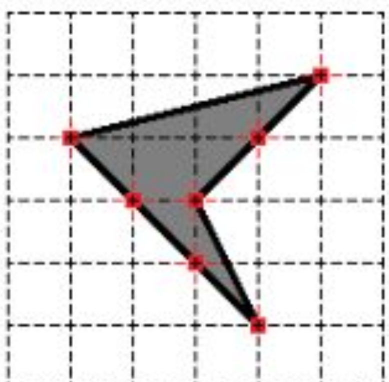
Задача. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см на 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Снова отмечаем внутренние и граничные узлы. Внутренних узлов всего n = 2. Граничных узлов: k = 7, из которых 4 являются *вершинами четырехугольника*, а еще 3 лежат на сторонах.



$n = 2$



$k = 7$

Остается подставить числа n и k в формулу площади:

$$S = n + \frac{k}{2} - 1 = 2 + \frac{7}{2} - 1 = 4{,}5 \quad S = \frac{2n + k - 2}{2}$$

Числа n и k — это количество узлов, они всегда целые. Значит, весь числитель тоже целый. Мы делим его на 2, из чего следует важный факт:

> Площадь всегда выражается *целым числом или дробью*. Причем в конце дроби всегда стоит «пять десятых»: 10,5; 17,5 и т.д.

Таким образом, площадь в задаче B5 всегда выражается целым числом или дробью вида ***,5. Если ответ получается другим, значит, где-то допущена ошибка. Помните об этом, когда будете сдавать настоящий ЕГЭ по математике!