Отображения (функции) как отношения

Преподаватель: Митянина А.В.

ИИТ, ЧелГУ

Вспомним про отношения…

Отношение R из множества A в множество B – это подмножество прямого произведения множества A на множество B:

$R \subseteq A \times B, \; R : A \rightarrow B$

<u>Обозн.</u> $(a, b) \in R$ обычно записывают как aRb.

Если A = B, то говорят, что $R \subseteq A \times A$ - отношение *на* A.

Если отношение установлено между двумя множествами, то его называют *бинарным*.

Отображение

Отображение (функция) из множества A в множество B представляет собой специальное отношение $A \times B$, обладающее следующими свойствами:

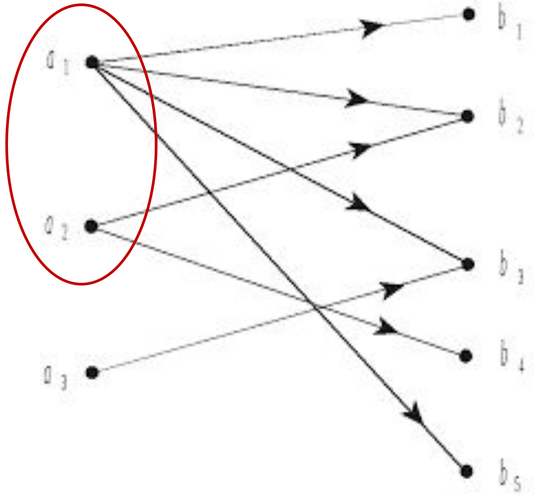
1. Для каждого элемента *a* из A существует элемент *b* из B такой, что *a* и *b* связаны данным отношением.
2. Если *a* относится к *b* и *a* относится к *b`*, то *b = b`* . В терминах упорядоченных пар это утверждение означает, что если *(a, b)* и *(a, b`)* принадлежат отношению, то *b = b`*.

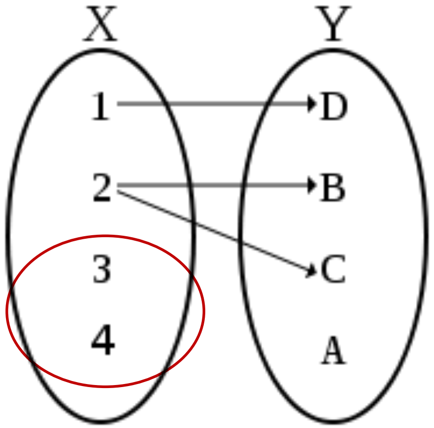
Кратко: для каждого *a* из A существует ровно 1 элемент *b* из B такой, что *a* и *b* связаны данным отношением.

Отображение

Отношение

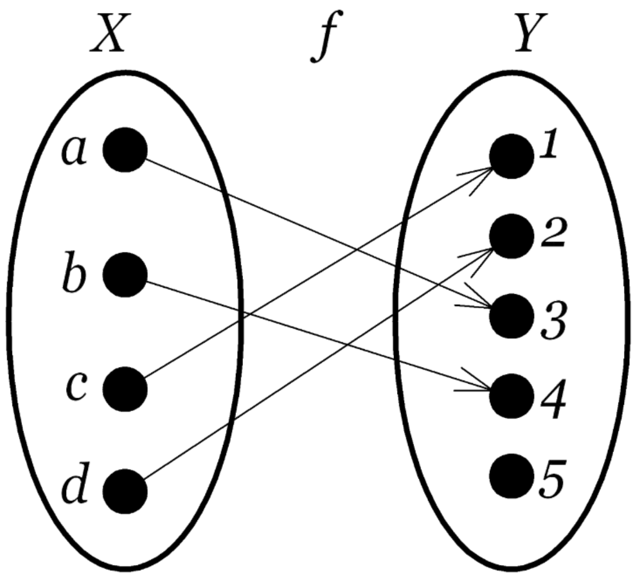
Не отображение





Отношение

Отображение



Отображение. Обозначения и терминология

Функция из A в B обозначается $f : A \to B$.

Если $f : A \to B$ - функция, и $(a, b) \in f$, то $b = f(a)$.

Функция $f : A \to B$ называется отображением, при этом f отображает A в B. Если $f : A \to B$, так что $b = f(a)$, то элемент a отображается в элемент b.

Отображение. Терминология

Множество A называется ***областью определения*** функции f, а множество B называется ***областью потенциальных значений***.

Если $E \subseteq A$, то множество $f(E) = \{b: f(a) = b$ для некоторого a из $E\}$ называется образом множества E. Образ всего множества A называется **областью значений функции** f.

Если $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{B}$, то множество $f^{-1}(F) = \{a: f(a) \in F\}$ называется прообразом множества F.

Прим. Прообраз может быть пустым.

Функция. Пример.

Пусть A = {-2, -1, 0, 1, 2}, а B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}.

Отношение $f \subseteq A \times B$ определяется как f = {(-2, 5), (-1, 2), (0, 1), (1, 2), (2, 5)}. Отношение f – функция A из B, так как $f \subseteq A \times B$ и каждый из элементов A присутствует в качестве первой компоненты упорядоченный пары из f ровно один раз.

Область определения?

Область потенциальных значений?

Область значений?

Образ множества {1,2}?

Прообраз множества {5}, {0, 2, 3, 4, 5}?

Функция. Пример.

Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Функция $f : A \to B$ определена соотношением $f(x) = x^2 + 1$.

Если $E = \{1, 2\}$, то $f(E) = \{b : (a, b) \in f$ для некоторого a из $E\}$ =

= $\{b : b = f(a)$ для некоторого a из $E\} = \{2, 5\}$

является образом E при отображении f.

Если $F = \{0, 2, 3, 4, 5\}$, то $f^{-1}(F) = \{b$: существует $a \in A$ такое, что $f(a) = b\} = \{-1, 1, -2, 2\}$ -

является прообразом F, где $-1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-1) = 2$,

$1 \in f^{-1}(F)$, так как $f(1) = 2$,

$-2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(-2) = 5$

и $2 \in f^{-1}(F)$, так как $f(2) = 5$.

Элементы 0, 3 и 4 не вносят никаких элементов в $f^{-1}(F)$, поскольку они не принадлежат области значений функции f.

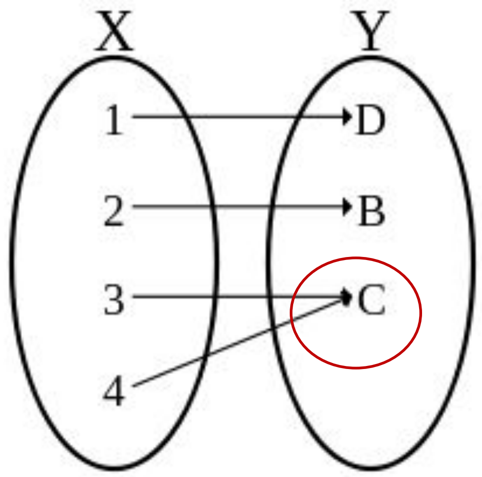
Свойства функций.

Функция $f : A \to B$ называется ***инъективной***, или ***инъекцией***, если из $f(a) = f(a')$ следует $a=a'$.

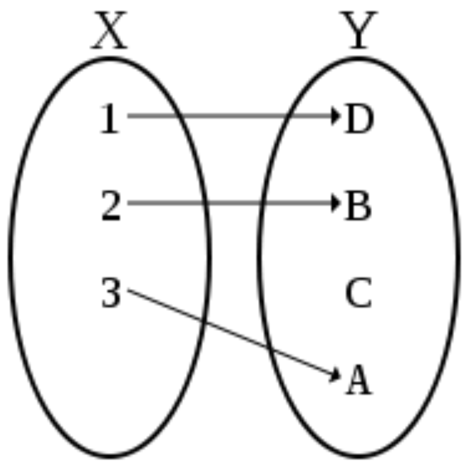
<u>Иначе</u>: для любого элемента из области значений существует только 1 прообраз.

Пример.

<u>Не инъективна</u>



<u>Инъективная</u>



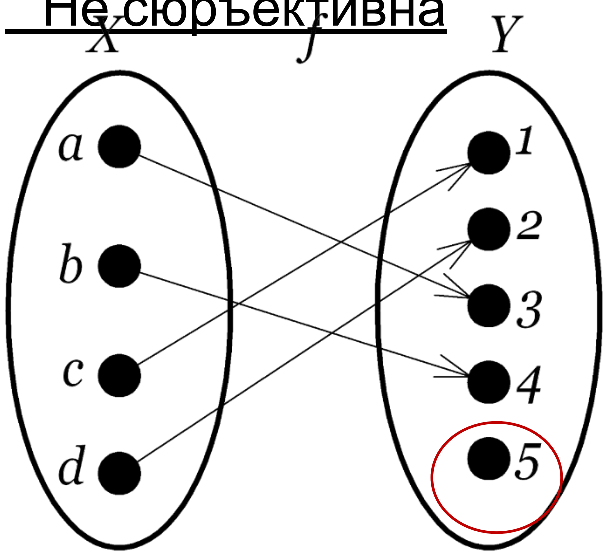
Свойства функций.

Функция *f* называется ***отображением "на"*** или ***сюръективной функцией***, или ***сюръекцией***, если для каждого $b \in B$ существует некоторое $a \in A$ такое, что $f(a) = b$.

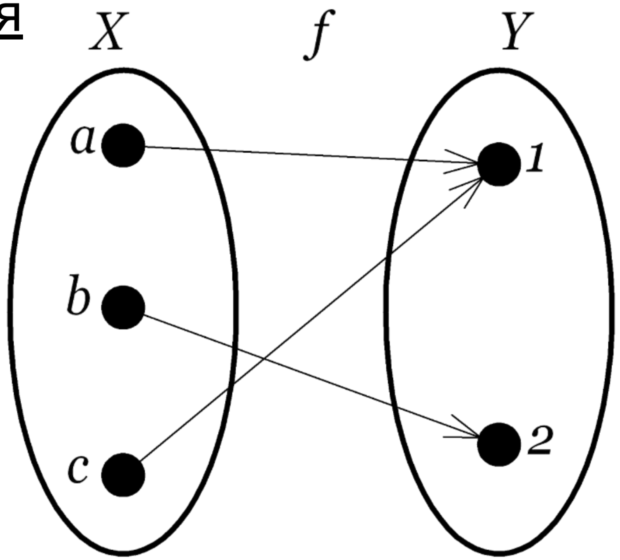
<u>Иначе</u>: всё множество B является областью значений.

Пример.

<u>Не сюръективна</u>



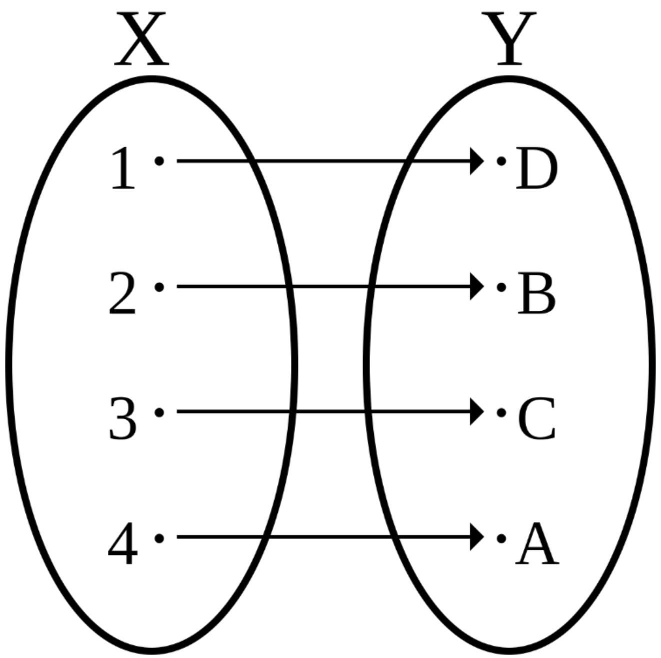
<u>Сюръективная</u>



Свойства функций.

Функция, которая является одновременно и инъективной, и сюръективной, называется ***взаимно однозначным соответствием***, или ***биекцией***.

Если $A = B$ и $f : A \to B$ является взаимно однозначным соответствием, то f называется ***перестановкой*** множества A.



Свойства функций. Пример.

Пусть A и B - множества действительных чисел и $f : A \to B$ определена таким образом:

$f(x) = 3x + 5$.

Функция f инъективна, так как если $f(a) = f(a')$, тогда $3a + 5 = 3a' + 5 \Rightarrow a = a'$.

Функция f является также сюръективной:

Для любого действительного числа b требуется найти такое a, что $f(a) = b = 3a + 5$. $\Rightarrow a = (1/3)(b - 5)$, тогда $f(a) = b$.

Поэтому f представляет собой взаимно однозначное соответствие, а в силу $A = B$,

f является также перестановкой.

Свойства функций. Пример.

Пусть A и B – множество действительных чисел, и функция $f : A \to B$ определена как $f(x) = x^2$. Функция f не является инъективной,

так как $f(2) = f(-2)$, но $2 \neq -2$.

Функция f не является также и сюръективной, так как не существует такого действительного числа a, для которого $f(a) = -1$.

Если A и B - множество неотрицательных действительных чисел, тогда f является как инъективной, так и сюрьективной.

Обратная функция.

Пусть f – функция из множества A во множество B, то есть $f : A \to B$.

$f \subseteq A \times B$, так как f является отношением на $A \times B$.

Обратное отношение $f^{-1} \subseteq B \times A$ определяется как

$$f^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in f\}.$$

При этом отношение f^{-1} может не быть функцией из B в A, даже если f является функцией из A в B.

Если f^{-1} действительно является функцией, то ее называют обращением функции f, или ее ***обратной функцией***.

<u>Пример</u>. Функции $f(x) = 3x + 6$ и $f(x) = x^2$ имеют обратные функции?

Обратная функция. Пример.

Требуется найти обратную функцию для $y = 3x + 6$.

Обращая функцию, получается

$$\{(y, x): y = 3x + 6\}.$$

Это тоже самое, что

$$\{(x, y): x = 3y + 6\}.$$

Решение этого уравнения относительно у:

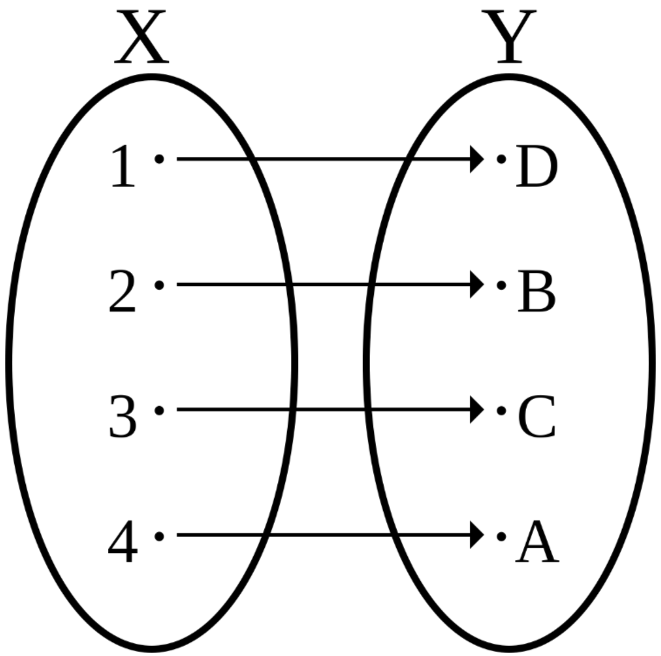
$$\boldsymbol{\{(x, y): y = (x - 6) / 3\}.}$$

Обратная функция. Теорема 1.

1) Если $f : A \to B$ является биекцией. То обратное отношение f^{-1} является функцией из B в A, причем биекцией.

2) Обратно, для $f : A \to B$, если f^{-1} – функция из B в A, то f является биекцией.

Обратная функция. Теорема 2.



Если $f : A \to B$ является биекцией, то

а) $f(f^{-1}(b)) = b$ для любого b из B;

б) $f^{-1}(f(a)) = a$ для любого a из A.

Доказательство:

Пусть $b \in B$ и $a = f^{-1}(b)$. Тогда $f(a) = b$.

Поскольку $a = f^{-1}(b)$), то $f(f^{-1}(b)) = f(a) = b$.

Аналогично доказывается

$$f^{-1}(f(a)) = a \text{ для любого } a \text{ из } A.$$

Обратная функция. Теорема 3.

Если $f : A \to A$ и I - тождественная функция на A,

то $I \circ f = f \circ I = f$.

Если для f существует обратная функция,

то $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$.

Прим. Тождественная функция – это функция, переводящая жлемент сам в себя. Например, f(x) = x.

Композиция функций.

Если R – отношение на $A \times B$, а S - отношение на $B \times C$, то можно определить отношение $S \circ R$ на $A \times C$, называемое **композицией** $\boldsymbol{S}$ **и** $\boldsymbol{R}$.

Если R и S – функции, то $S \circ R$ - тоже функция, называемая **композицией** $\boldsymbol{S}$ **и** $\boldsymbol{R}$.

Теорема:

Пусть $g : A \to B$ и $f: B \to C$.

Тогда

а) композиция $f \circ g$ есть отображение из A в C. Обозначение $f \circ g : A \to C$;

б) если $a \in A$, то $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Композиция функций. Примеры.

- Пусть $f : A \to B$, $g : B \to C$ и $h : C \to D$.

Тогда $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, то есть *композиция двух функций ассоциативна*.

Пример. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x + 3$ - функции, заданные на множестве действительных чисел.

Функция $f\big(g(x)\big) = f(x+3) = \sqrt{x+3}$

Функция $g\big(f(x)\big) = g\left(\sqrt{x}\right) = \sqrt{x} + 3$

Композиция функций. Теорема.

Пусть $g : A \to B \quad f : B \to C$. Тогда

а) если g и f - сюръекции A на B и B на C соответственно, то $f \circ g$ есть сюръекция A на C. Иначе: композиция двух сюръекций – сюръекция.

б) если g и f - инъекции, то $f \circ g$ - также инъекция.

Иначе: Композиция двух инъекций – инъекция.

в) если g и f - биекции, то $f \circ g$ - также биекция.

Иначе: Композиция двух биекций – биекция.

г) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Специальные функции.

Если f – перестановка на множестве $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

Может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ f(1) & f(2) & \ldots & f(n) \end{pmatrix}$$

Тождественная специальная функция – тождественная функция I, определенная соотношением $I(a) = a$ для всех $a \in A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$$

Специальные функции. Пример.

Если $A = \{1, 2, 3\}$ и функция $f : A \to B$ определена соотношениями

$$f(1) = 3,\quad f(2) = 2,\ f(3) = 1$$

Тогда f может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Композиция перестановок.

Если $g : A \to A$ определена соотношением

$$g(1) = 2,\ g(2) = 3,\ g(3) = 1$$

Тогда g можно представить в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Композиции этих функций: $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Обратная перестановка.

Чтобы построить обратную перестановку, необходимо найти число, стоящее над 1 и поместить его под 1.

Затем найти число, стоящее над 2 и поместить его под 2.

Затем найти число, стоящее над 3 и поместить его под 3. И т.д.

Какая перестановка будет обратно к $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$?

Специальные функции.

Функция $f : A \to B$, где А – множество действительных чисел, B – множество целы чисел, называется ***нижним округлением*** и обозначается

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

если каждому числу $a \in A$ ставит в соответствие наибольшее целое число, меньшее или равное a.

Функция $f : A \to B$ называется ***верхним округлением*** и обозначается

$$f(x) = \lceil x \rceil$$

если каждому числу $a \in A$ ставит в соответствие наименьшее целое число, большее или равное a.

Пример.

$$\lfloor 2.99 \rfloor = 2, \quad \lfloor 4 \rfloor = 4, \quad \lfloor -4 \rfloor = -4, \quad \lfloor -4.1 \rfloor = -5$$

$$\lceil 2.99 \rceil = 3, \quad \lceil 4 \rceil = 4, \quad \lceil -4 \rceil = -4, \quad \lceil -4.1 \rceil = -4$$

Специальные функции.

1. Бинарной операцией на множестве A называется функция b: $A \times A \to A$.

Образ пары (r, s) при отображении b записывается

$b((r, s))$ или rbs.

2. Последовательность является частным видом функции.

Последовательностью называют функцию из {1, 2, 3, 4, …} в некоторое множество S.

Пример. Пусть A(n) = $n^2 - 3$.