# Теория вероятностей и математическая статистика

# “Элементы комбинаторики”

Тема 2

# План лекции

1. Факториал
2. Основные формулы комбинаторики
   1) размещение
   2) перестановки
   3) сочетания
3. Бином Ньютона

# Определени
# е

***Комбинаторика или теория конечных множеств*** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

# ***Факториал***

***Факториалом натурального числа n*** называется произведение последовательных натуральных чисел от 1 до n включительно

$$n! = 1 * 2 * 3 * \ldots * n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$n! = (n-1)!*n$

$n! = (n-2)!*(n-1)*n$

# 1. Размещение

Пусть дано множество, состоящее из n элементов: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

***Размещениями из n элементов по m*** называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \qquad (n > m)$$

# 2. Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его упорядоченное подмножество, состоящее из n элементов, называется ***перестановкой из n элементов (т.е. n=m).***

$$P_n = A_n^m = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

# 3. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов.

Всякое его подмножество, состоящее из m элементов, называется ***сочетанием из n элементов по m.***

Число сочетаний без повторений из n элементов по m может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)! * m!}, (n \geq m)$$

# 4. Размещение с повторением

**Размещение с повторением** – упорядоченные m-элементные подмножества, которые отличаются и элементами, и порядком их следования, и возможностью повтора.

Число всех размещений с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\widehat{A}_n^m = n^m$$

# 5. Перестановки с повторениями

**Перестановки с повторениями** – упорядоченные подмножества, в которых первый элемент повторяется $n_1$ раз, второй элемент – $n_2$ раз, k-й элемент – $n_k$ раз, причем

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$$

Число перестановок с повторениями можно вычислить по формуле:

$$\widehat{P}_n(n_1, n_2, \ldots n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! *. . .* n_k!}$$

# 6. Сочетания с повторениями

**Сочетания с повторениями** – это m-элементные подмножества, n-элементного множества, которые отличаются только элементами и возможностью повтора.

Число всех сочетаний с повторениями из n элементов по m можно вычислить по формуле:

$$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m, = \frac{(m+n-1)!}{m! * (n-1)!} \quad (n \geq m)$$

# Основные правила комбинаторики

## 1.Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить $n_1$ способами, второе – $n_2$ способами и т.д., то все k действий вместе могут выполнены $\boldsymbol{n_1+n_2+\ldots+n_k}$ способами

## 2.Правило умножения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо *k* действий, причем первое можно выполнить $n_1$ способами, второе – $n_2$ способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно $\boldsymbol{n_1*n_2*\ldots*n_k}$ способами

# Бином Ньютона

**Бином** – алгебраическая сумма двух любых чисел.

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n} C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

$C_n^k$ - биномиальные коэффициенты

правая часть формулы – разложение бинома

# Свойства биномиальных коэффициентов

1. $C_n^1 = n$
2. $C_n^0 = C_n^n = 1$
3. $C_n^m = C_n^{n-m}$ биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой.
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

## треугольника Паскаля

| n | $C_n^k$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 1 |
| 2 | 1 2 1 |
| 3 | 1 3 3 1 |
| 4 | 1 4 6 4 1 |
| 5 | 1 5 10 10 5 1 |
| 6 | 1 6 15 20 15 6 1 |
| 7 | 1 7 21 35 35 21 7 1 |