

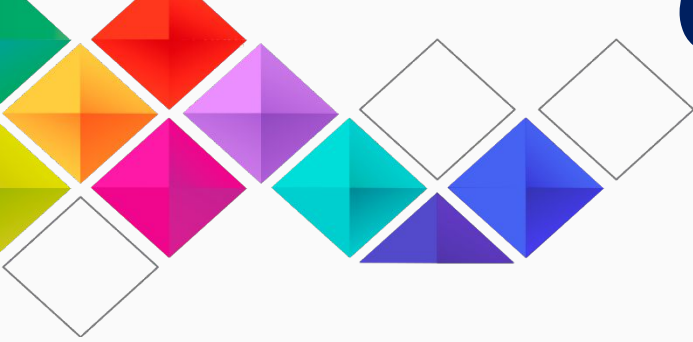
Теория вероятностей и  
математическая статистика  
**“Элементы  
комбинаторики  
”**

Тема 2



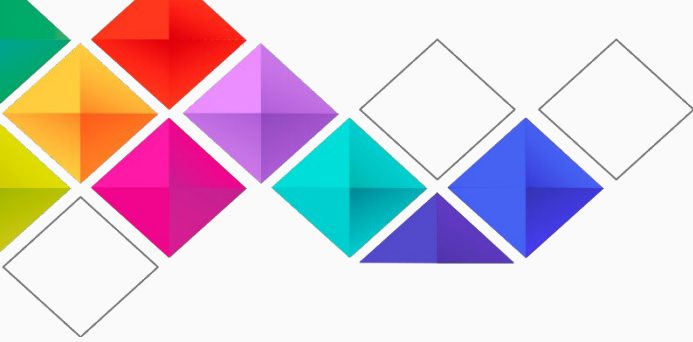
# *План лекции*

1. Факториал
2. Основные формулы комбинаторики
  - 1) размещение
  - 2) перестановки
  - 3) сочетания
3. Бином Ньютона



# Определени е

**Комбинаторика или теория конечных множеств** – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.



# Факториал

**Факториалом натурального числа  $n$**  называется произведение последовательных натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно

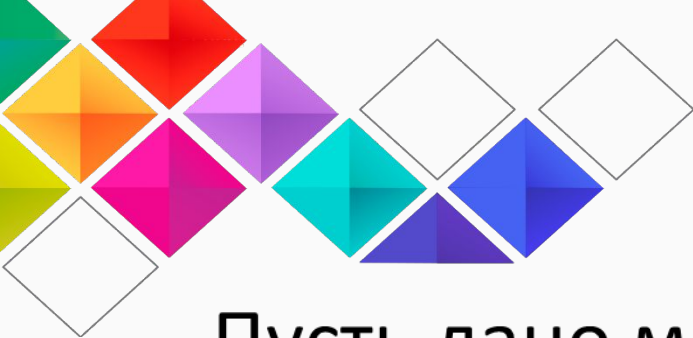
$$n! = 1 * 2 * 3 * \dots * n$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$n! = (n-1)! * n$$

$$n! = (n-2)! * (n-1) * n$$

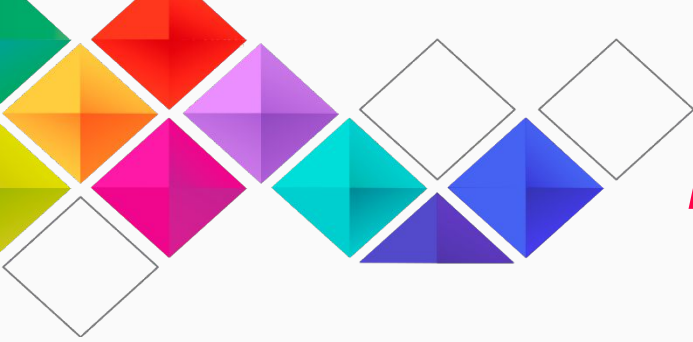


# 1. Размещение

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов:  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ .

**Размещениями из  $n$  элементов по  $m$**  называются такие выборки, которые, имея по  $m$  элементов, выбранных из числа данных  $n$  элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n - m)!}, \quad (n > m)$$



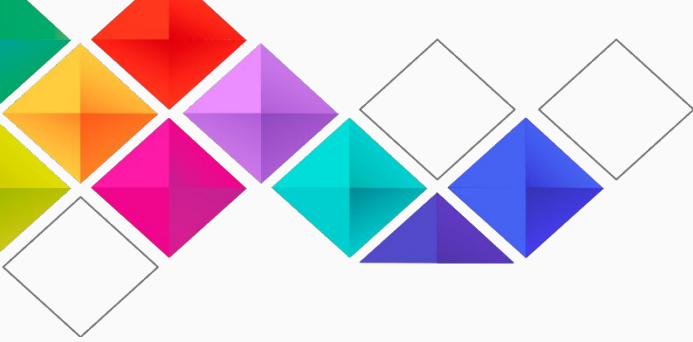
2.

# *Перестановки*

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов.

Всякое его упорядоченное подмножество, состоящее из  $n$  элементов, называется *перестановкой из  $n$  элементов (т.е.  $n=m$ )*.

$$P_n = A_n^m = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$



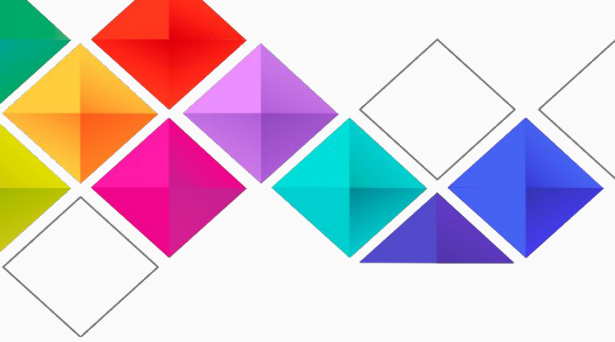
## 3. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из  $n$  элементов.

Всякое его подмножество, состоящее из  $m$  элементов, называется **сочетанием из  $n$  элементов по  $m$** .

Число сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $m$  может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n - m)! * m!}, (n \geq m)$$



## 4. Размещение с повторением

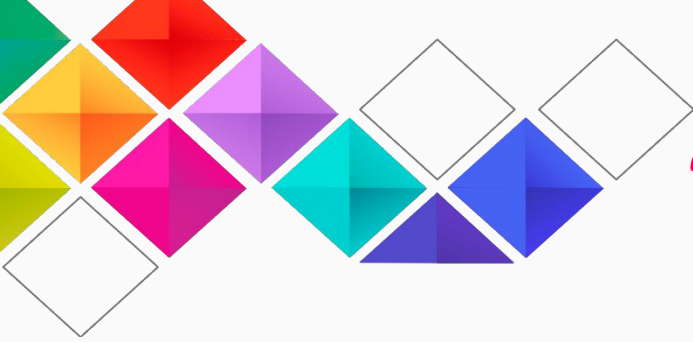
**Размещение с повторением** –

упорядоченные  $m$ -элементные подмножества, которые отличаются и элементами, и порядком их следования, и возможностью повтора.

Число всех размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $m$  можно вычислить по формуле:

$$\hat{A}_n^m = n^m$$





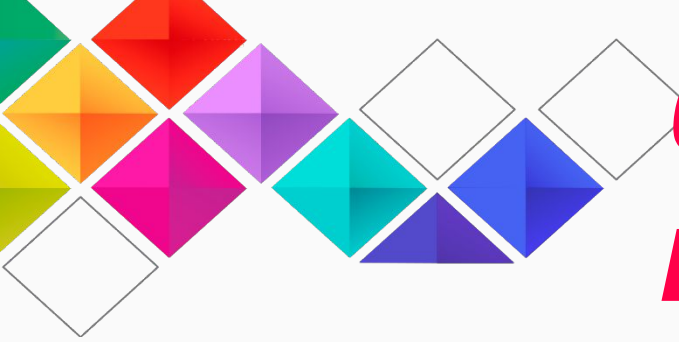
# 5. Перестановки с повторениями

**Перестановки с повторениями** – упорядоченные подмножества, в которых первый элемент повторяется  $n_1$  раз, второй элемент –  $n_2$  раз,  $k$ -й элемент –  $n_k$  раз, причем

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$$

Число перестановок с повторениями можно вычислить по формуле:

$$\hat{P}_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! * n_2! * \dots * n_k!}$$

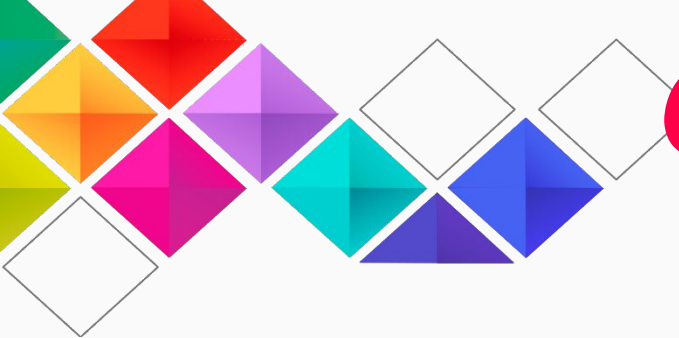


## 6. Сочетания с повторениями

**Сочетания с повторениями** – это  $m$ -элементные подмножества,  $n$ -элементного множества, которые отличаются только элементами и возможностью повтора.

Число всех сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $m$  можно вычислить по формуле:

$$\widehat{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(m+n-1)!}{m! * (n-1)!} \quad (n \geq m)$$



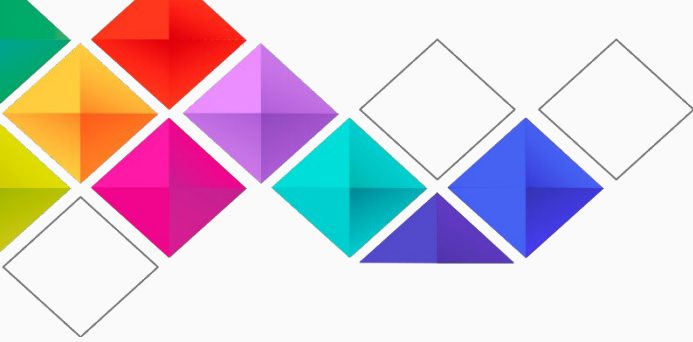
# Основные правила комбинаторики

## 1. Правило сложения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо  $k$  действий, причем первое можно выполнить  $n_1$  способами, второе –  $n_2$  способами и т.д., то все  $k$  действий вместе могут выполнены  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  способами

## 2. Правило умножения

Если требуется осуществить последовательно какие-либо  $k$  действий, причем первое можно выполнить  $n_1$  способами, второе –  $n_2$  способами и т.д., то выполнить хотя бы одно из этих действий можно  $n_1 * n_2 * \dots * n_k$  способами



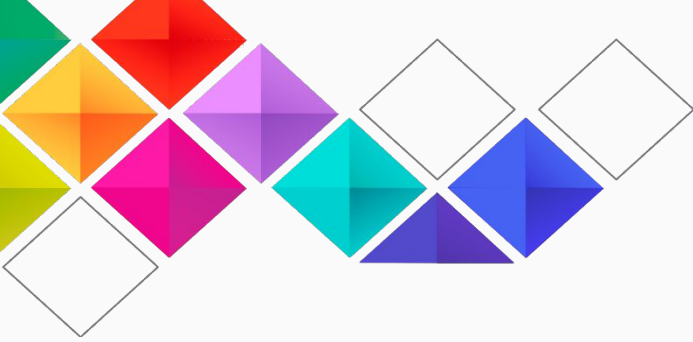
# *Бином Ньютона*

**Бином** – алгебраическая сумма двух любых чисел.

$$(a + b)^n = \sum_0^n C_n^k * a^{n-k} * b^k$$

$C_n^k$  - биномиальные коэффициенты

правая часть формулы – разложение бинома



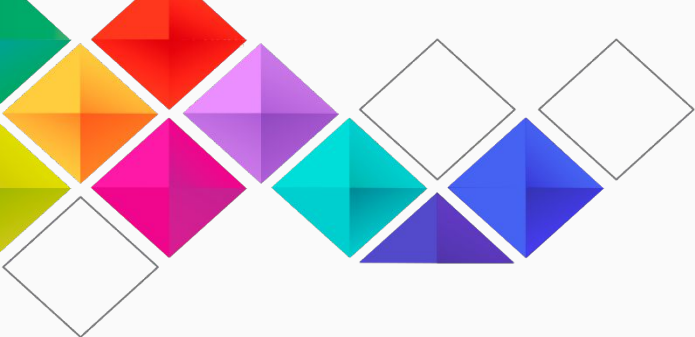
# *Свойства биномиальных коэффициентов*

1.  $C_n^1 = n$

2.  $C_n^0 = C_n^n = 1$

3.  $C_n^m = C_n^{n-m}$  биномиальные коэффициенты, равноотстоящие от концов, равны между собой.

4.  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$



# *треугольника Паскаля*

| $n$ | $C_n^k$ |  |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |    |   |   |  |   |
|-----|---------|--|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|---|---|--|---|
| 0   | 1       |  |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |    |   |   |  |   |
| 1   | 1       |  | 1 |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |    |   |   |  |   |
| 2   | 1       |  |   | 2 |   | 1 |   |   |    |    |    |    |    |    |    |   |    |   |   |  |   |
| 3   | 1       |  |   |   | 3 |   | 3 |   | 1  |    |    |    |    |    |    |   |    |   |   |  |   |
| 4   | 1       |  |   |   |   | 4 |   | 6 |    | 4  |    | 1  |    |    |    |   |    |   |   |  |   |
| 5   | 1       |  |   |   |   |   | 5 |   | 10 |    | 10 |    | 5  |    | 1  |   |    |   |   |  |   |
| 6   | 1       |  |   |   |   |   |   | 6 |    | 15 |    | 20 |    | 15 |    | 6 |    | 1 |   |  |   |
| 7   | 1       |  |   |   |   |   |   |   | 7  |    | 21 |    | 35 |    | 35 |   | 21 |   | 7 |  | 1 |