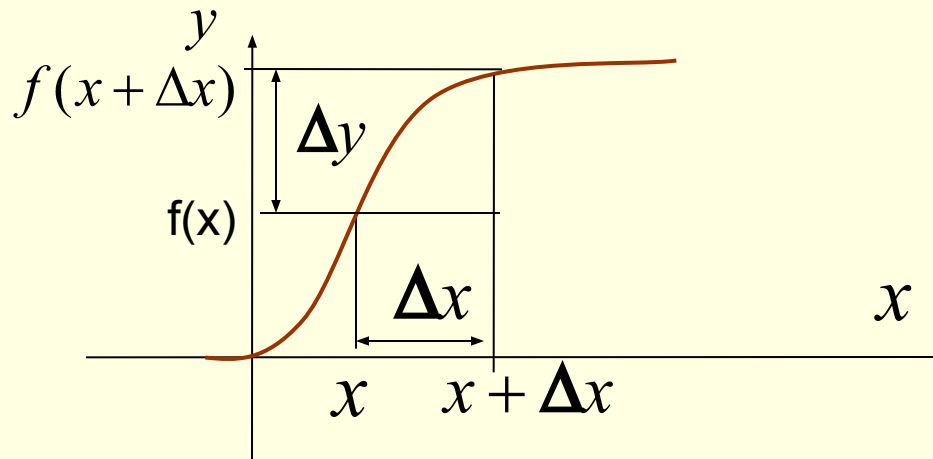


Дифференциальное исчисление функций одной переменной

- Определение производной. Ее геометрический и физический смысл.
- Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции. Необходимое условие существования производной.
- Правило дифференцирования функций.
- Производная сложной и обратной функции.
- Производные основных элементарных функций.
- Дифференцирование неявных и параметрически заданных функций.
- Производные высших порядков.
- Дифференциал функции. Свойства дифференциала.

Приращение функции и аргумента

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X . Рассмотрим точку $x \in X$
- Разность $\Delta x \neq 0$ называется **приращением аргумента** x .
- Разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ называется **приращением функции** $y=f(x)$ в точке x , соответствующее приращению аргумента Δx .



Определение производной функции

Определение

Производной функции $y=f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

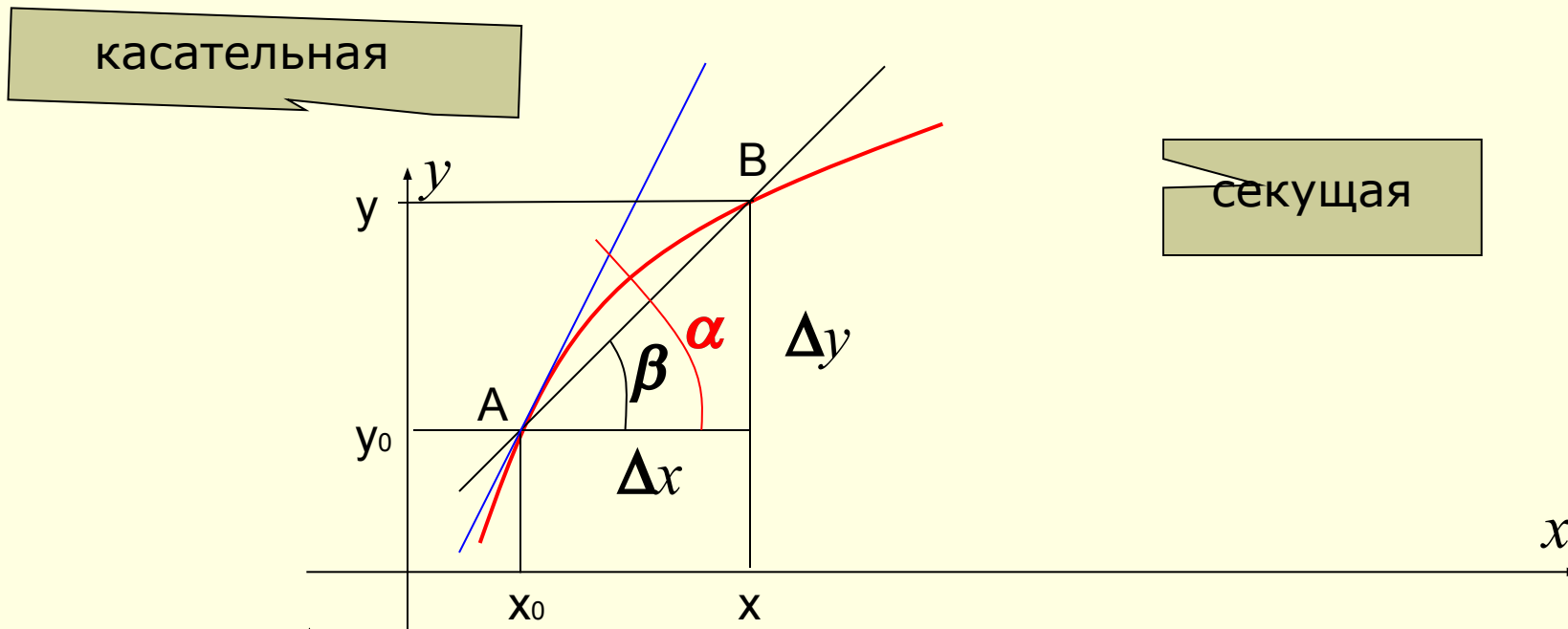
$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Обозначения производной: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, d

Если функция $y=f(x)$ в точке x имеет конечную производную, то функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в этой точке.

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X , называется дифференцируемой на этом промежутке.

Геометрический смысл производной функции



■ Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \beta$ равно тангенсу угла наклона секущей к оси абсцисс, а производная

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha$$

равна тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс.

$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha = k$ - угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ - уравнение касательной}$$

Правила дифференцирования функций

Производная постоянной равна нулю: $c' = 0, c = const$

Если функции $u(x), v(x)$ имеют производные в точке x , то их сумма $u(x) + v(x)$, произведение $u(x) \cdot v(x)$ и частное $\frac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$ также имеют производные в этой точке и справедливы формулы

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Следствие: $(cu)' = cu'$

Производная сложной функции

Теорема (о производной сложной функции)

Если $y=f(u)$ и $u=h(x)$ дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y=f(h(x))$ существует и равна

$$y' = (f(h(x)))' = f'(h(x)) \cdot h'(x) \quad \text{или} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Пример:

1. $y = \cos^2 x$

$$y' = (\cos^2 x)' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$$

2. $y = \frac{1}{\ln(x^2 + 1)}$

$$y' = ((\ln(x^2 + 1))^{-1})' = -1 \cdot (\ln(x^2 + 1))^{-2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 + 1) \cdot \ln^2(x^2 + 1)}$$

Производные основных элементарных функций

$$c' = 0, c \equiv \text{const}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x},$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Производные высших порядков

$y' = f'(x)$ - производная первого порядка функции $y=f(x)$

Если функция $f'(x)$ дифференцируемой точке x , то

$y'' = (f'(x))'$ - производная второго порядка функции $y=f(x)$

Обозначения производной второго порядка:

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

.....

$y^{(n)} = (f^{(n-1)}(x))'$ - производная n -ого порядка функции $y=f(x)$

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Понятие дифференциала функции

Определение

Дифференциалом функции $y=f(x)$ называется главная, линейная относительно Δx , часть приращения функции, равная произведению производной функции на приращение независимой переменной

Обозначение: $dy = f'(x)\Delta x$

dy – дифференциал первого порядка

Рассмотрим функцию $y=x$. Вычислим ее дифференциал:

$$dy = x' \cdot \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x \Rightarrow dy = \Delta x$$

$$dy = f'(x)dx$$

Дифференциалом функции $y=f(x)$ равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной

Найти дифференциал функции

$$f(x) = 3x^2 - \sin(1 + 2x)$$

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

$$dy = (3x^2 - \sin(1 + 2x))' \cdot dx$$

$$dy = (6x - 2 \cos(1 + 2x)) \cdot dx$$

Свойства дифференциала

Дифференциал постоянной равен нулю: $dc = 0, c = const$

$$d(u + v) = du + dv$$

$$d(u \cdot v) = vdu + udv$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

Следствие: $d(c \cdot u) = c \cdot du$