

Следствие 1 (Об остаточном члене в форме Лагранжа). Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow R$ имеет на сегменте $[a; b]$ непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Пусть $x_0, x = (x_0 + \Delta x) \in [a; b]$.

Тогда существует $\xi \in (x_0, x)$, или $\xi \in (x, x_0)$, или $\xi = x = x_0$, такое что

$$r_n(x_0, \Delta x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $x \neq x_0$. По теореме 2 (об интегральной форме остаточного члена)

$$r_n(x_0, \Delta x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt.$$

Применим первую теорему о среднем для сегмента (теорема 2 § 6) для функций

$$f(t) := f^{(n+1)}(t) \quad , \quad g(t) := (x - t)^{n+1} .$$

Получим, что для некоторого $\xi \in (x_0, x)$, или $\xi \in (x, x_0)$ верно равенство

$$r_n(x_0, \Delta x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1} .$$

(Подробнее выведем на лекции). \square

Следствие 2 (Об остаточном члене в форме Коши).

Пусть функция $f : [a; b] \rightarrow R$ имеет на сегменте $[a; b]$ непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно. Пусть $x_0, x = (x_0 + \Delta x) \in [a; b]$.

Тогда существует $\xi \in (x_0, x)$, или $\xi \in (x, x_0)$, или $\xi = x = x_0$, такое что

$$r_n(x_0, \Delta x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - \xi)^n (x - x_0).$$

Доказательство. Это равенство вытекает из равенства (2) /утверждения теоремы об интегральной форме/ и первой теоремы о среднем для сегмента (теорема 2 § 6) для функций

$$f(t) := f^{(n+1)}(t) \cdot (x - t)^n, \quad g(t) := 1.$$

Замечание. Из формулы (2) можно получить и другие выражения для остаточного члена в формуле Тейлора.

§9. Интегральный признак сходимости числового ряда.

Теорема 1 (интегральный признак сходимости ряда).

Пусть функция $f : [1; +\infty) \rightarrow R$ неотрицательна и убывает. Пусть $a_n = f(n), \forall n \in N$.

Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в том и только том случае, когда функция f суммируема на $[1; +\infty)$, то есть когда

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty.$$

Замечание. Интеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b f(t) dt$ называют **несобственным** интегралом.

Доказательство. Монотонная функция f , очевидно, измерима.

Значит, $\int_1^{+\infty} f(t)dt \in [1; +\infty]$ существует.

Рассмотрим функции $g = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \chi_{[n;n+1)}$

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \cdot \chi_{[n;n+1)} .$$

Очевидно, что $h \leq f \leq g$ на $[1; +\infty)$. Поэтому

$$\int_1^{+\infty} h dt \leq \int_1^{+\infty} f dt \leq \int_1^{+\infty} g dt .$$

Первый и третий интегралы легко подсчитать по теореме о счетной аддитивности интеграла

$$\int_1^{+\infty} h dt = \int_1^2 h dt + \int_2^3 h dt + \dots = a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} a_n ,$$

$$\int_1^{+\infty} g dt = \int_1^2 g dt + \int_2^3 g dt + \dots = a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Таким образом

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{+\infty} f dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Отсюда ясно, что условия

$$\int_1^{+\infty} f(t) dt < +\infty \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \text{ равносильны. } \square$$

Пример применения интегрального признака сходимости ряда приведем на лекции.

Глава 5. Функциональные последовательности и ряды

§1. Введение. Понятие равномерной сходимости функциональной последовательности, равномерной сходимости функционального ряда

Определение 1. Пусть задана последовательность функций $f_k : A \rightarrow R, k \in N$. Пусть еще для любого $x \in C \subset A$ существует $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$, т.е. $f : C \rightarrow R$.

Тогда говорят, что функциональная последовательность $\{f_k\}_{k \in N}$ сходится к функции f **поточечно на множестве C** , пишут $f_k \xrightarrow{C} f, k \rightarrow \infty$.

Замечание. Расшифруем определение предела последовательности:

$$(f_k) \xrightarrow{C} f \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in C, \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N$$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Определение 2. Пусть $\forall k \in \mathbb{N} f_k : A \rightarrow R$. Говорят, что $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к функции f **равномерно на множестве C** , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N, \forall x \in C |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Пишут $(f_k) \xrightarrow{\rightarrow} f$ на C .

Замечание. В определении 1 номер N зависит от ε и x . В определении 2 номер $N = N(\varepsilon)$ зависит только от ε , то есть находится для всех точек $x \in C$ сразу. Поэтому определение 2 можно переформулировать так:

Говорят, что $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к функции f **равномерно на множестве C** , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall k > N, \sup_{x \in C} |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности)

$$\begin{aligned} (f_k) \begin{matrix} \xrightarrow{\quad} \\ \rightarrow \end{matrix} f \text{ на } C &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n > N \\ &|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Доказательство. (Необходимость) Пусть последовательность $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к функции f равномерно на множестве C , то есть $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}: \forall k > N, \forall x \in C |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon. (*)$

Докажем, что $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall x \in C, \exists N \in \mathbb{N}: \forall m, n > N$
 $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$

Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем номер N так как в (*). Для него имеем: