

Возрастание и убывание функций

Функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, если

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2)).$$

Теорема. Если $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на $(a; b)$. Обратно, если $f(x)$ возрастает на $(a; b)$, то $f'(x) \geq 0$ на $(a; b)$.

Аналогично

Теорема. Если $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$ и $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на $(a; b)$. Обратно, если $f(x)$ убывает на $(a; b)$, то $f'(x) \leq 0$ на $(a; b)$.

Пример 1. Исследовать функцию $y = 2x^3 - 4x^2 + 2x - 8$ на возрастание и убывание.

Решение. Производная функции равна $y' = 6x^2 - 8x + 2$.

Функция $6x^2 - 8x + 2$ определяет параболу, пересекающую ось абсцисс в точках $x = \frac{1}{3}$ и $x = 1$, ветви которой направлены вверх, следовательно,

$$f'(x) > 0 \text{ при } x \in (-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; +\infty) \text{ и } f'(x) < 0 \text{ при } x \in (\frac{1}{3}; 1).$$

Значит, на интервалах $(-\infty; \frac{1}{3})$ и $(1; +\infty)$ функция возрастает, на интервале $(\frac{1}{3}; 1)$ функция убывает.

Выберите среди предложенных интервалы монотонного возрастания функции

$$y = (x^2 - 3)e^{5-x}$$

- таких интервалов, среди предложенных, нет
- $(-3; -2)$
- $(0; 1)$
- $(2; 3)$

Выберите среди предложенных интервалы монотонного возрастания функции

$$y = \ln \frac{x-3}{x+2}$$

- таких интервалов, среди предложенных, нет
- (2; 3)
- (-1; 0)
- (-4; -3)

Выберите, среди предложенных, интервалы монотонного убывания функции

$$y = \frac{e^{2x+1}}{2x-1}$$

- $(-1, 1)$
- $(-4; -3)$
- таких интервалов, среди предложенных, нет
- $(3, 4)$

Выберите, среди предложенных, интервалы монотонного убывания функции

$$y = e^{\sqrt[3]{x^2 - 3x}}$$

- $(-2; -1)$
- $(2; 3)$
- таких интервалов, среди предложенных, нет
- $(0; 1)$

Точки экстремума

Точка x_0 называется *точкой максимума (минимума)* функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0) \text{ (} f(x) > f(x_0) \text{)}.$$

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Теорема (необходимое условие экстремума). *Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то ее производная в этой точке равна нулю: $f'(x_0) = 0$.*

Обратное утверждение неверно, т.е. если $f'(x_0) = 0$, то это не значит, что x_0 – точка экстремума.

Непрерывная функция может иметь экстремум только в точках, где производная функции равна нулю, такие точки называются *стационарными*, или не существует - такие точки называются *подозрительными* на экстремум.

Теорема (достаточное условие экстремума). *Если непрерывная функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 , стационарной или подозрительной на экстремум, и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума функции; если с плюса на минус, то x_0 – точка максимума.*

Теорема (достаточное условие экстремума). *Если непрерывная функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x_0 , и $f''(x_0) > 0$ ($f''(x_0) < 0$), то x_0 – точка минимума (максимума) функции.*

Пример нахождения экстремумов

Пример 2. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{(x+1)^2}$ на наличие точек экстремума.

Решение. Область определения функции $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$.

Производная функции $y' = \left(\frac{x^3}{(x+1)^2} \right)' = \frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{(x+1)^4} = \frac{x^2(3+x)}{(x+1)^3}$.

$y'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = -3$, производная не существует в точке $x = -1$. Отметим точки на числовой прямой и выясним знак производной на интервалах между этими точками.



Точки, в которых функция непрерывна, а производная меняет знак, являются точками экстремума по достаточному условию, таким образом:

$x = -3$ – точка максимума функции,

$x = 0$ не является точкой экстремума,

$x = -1$ не является точкой экстремума, так как функция не является непрерывной в этой точке.

Пример 3. Исследовать функцию $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ на экстремум.

Решение. Область определения функции $D(y) = \mathbf{R}$.

Найдем производную функции и стационарные точки:

$$y' = \frac{((x-1)^2)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x-1)(x^2+1) - 2x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2},$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ или } x = 1.$$

Исследуем знаки производной методом интервалов. Знаменатель производной всегда положителен, в числителе – квадратичная функция, определяющая параболу с ветвями, направленными вверх, пересекающую ось Ox в точках $x = -1$ и $x = 1$.



По достаточному условию экстремума в точке $x = -1$ функция имеет локальный максимум, а в точке $x = 1$ – локальный минимум.

Пример 4. Исследовать функцию $y = x + \ln(\cos x)$ на экстремум.

Решение. Область определения функции

$$D(y) = \{x \in \mathbf{R} \mid \cos x > 0\} = \{x \in \mathbf{R} \mid -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k\}.$$

Находим производную функции и стационарные точки, лежащие в области определения:

$$y' = 1 - \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - \operatorname{tg} x,$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k.$$

Так как стационарных точек много, то исследуем их на экстремум с помощью второй производной

$$y'' = -\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$y''\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)} = -2 < 0 \quad \forall k \in \mathbf{Z},$$

следовательно, точки $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ являются точками максимума функции.

Найти экстремумы функции $y = \frac{(4-x)^3}{9(2-x)}$.

- $x=2$ - точка локального максимума
- $x=-1$ - точка локального минимума
- $x=4$ - точка локального максимума
- $x=1$ - точка локального минимума

Найти экстремумы функции $y = 1 + \sqrt[3]{(x - 1)^2}$

- $x=1$ - точка локального максимума
- $x=0$ - точка локального максимума
- $x=2$ - точка локального максимума
- $x=2$ - точка локального минимума
- $x=0$ - точка локального минимума
- $x=1$ - точка локального минимума

Выпуклость графика функции. Точки перегиба

Будем говорить, что график функции $y = f(x)$ имеет на $(a; b)$ выпуклость, направленную вверх (вниз), если он расположен не выше (не ниже) любой касательной к графику функции на $(a; b)$.

Теорема (достаточное условие направления выпуклости). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале $(a; b)$, тогда, если $f''(x) < 0$ для любого $x \in (a; b)$, то график функции имеет на $(a; b)$ выпуклость вверх, а если $f''(x) > 0$, то – выпуклость вниз.

Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$, если функция непрерывна в точке x_0 и существует такая окрестность этой точки, в пределах которой график функции $y = f(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные направления выпуклости.

Теорема (необходимое условие точки перегиба). Пусть график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$, и пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную. Тогда $f''(x)$ в точке x_0 обращается в нуль, т. е. $f''(x_0) = 0$.

Точки, в которых $f''(x_0) = 0$ и точки, в которых функция непрерывна, а ее вторая производная не существует, называются *подозрительными на перегиб*.

Теорема (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0 . Тогда, если в пределах указанной окрестности $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 , то график $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $M(x_0, f(x_0))$.

Примеры исследования функции на направление выпуклости графика

Пример 4. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = (1 - 2x)e^{2x-1}$.

Решение. Функция определена и непрерывна на всем множестве действительных чисел.

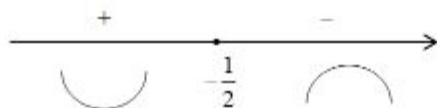
Найдем вторую производную функции и критические точки:

$$y' = ((1 - 2x)e^{2x-1})' = -2e^{2x-1} + 2(1 - 2x)e^{2x-1} = -4xe^{2x-1},$$

$$y'' = (-4xe^{2x-1})' = -4e^{2x-1} - 8xe^{2x-1} = -4(1 + 2x)e^{2x-1},$$

$$y''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Исследуем знаки второй производной на интервалах $(-\infty; -\frac{1}{2})$ и $(-\frac{1}{2}; +\infty)$:



Таким образом, на интервале $(-\infty; -\frac{1}{2})$ график имеет выпуклость вниз, на интервале $(-\frac{1}{2}; +\infty)$ – выпуклость вверх.

Пример 5. Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции $y = \frac{e^x}{x}$.

Решение. Область определения функции $D(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

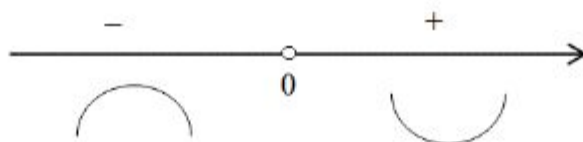
Найдем вторую производную функции и критические точки:

$$y' = \left(\frac{e^x}{x}\right)' = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right),$$

$$y'' = \left(e^x \left(\frac{x-1}{x^2}\right)\right)' = e^x \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}\right),$$

так как $x^2 - 2x + 2 \neq 0 \forall x \in \mathbf{R}$, то $y''(x) \neq 0$.

Вторая производная не определена в точке $x = 0$, исследуем знаки второй производной на действительной оси.



На интервале $(-\infty; 0)$ график функции выпуклый вверх, а на интервале $(0; +\infty)$ – выпуклый вниз, точка с абсциссой $x = 0$ не является точкой перегиба, так как функция не определена в точке $x = 0$.

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вверх кривой.

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

- $(-5; -3)$
- таких интервалов среди предложенных нет
- $(-1; 1)$
- $(3; 5)$

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вверх кривой

$$y = 3x^5 + 5x^4 - 10x^3 - 30x^2.$$

- $(-4; -2)$
- $(-1; 1)$
- таких интервалов среди предложенных нет
- $(2; 4)$

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вниз кривой

$$y = \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

- $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{6}\right)$
- $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$
- $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$
- таких интервалов среди предложенных нет

Выберите (среди предложенных) интервалы, на которых график функции $y = f(x)$ является выпуклой вниз кривой

$$y = x \cdot \sqrt[3]{x} - \frac{2}{9}x^2.$$

- (1; 2)
- (3; 4)
- таких интервалов среди предложенных нет
- (-1; 0)

Выберите (среди предложенных) абсциссы точек перегиба графика заданной функции

$$y = x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

- -3
- таких точек, среди предложенных, нет
- 0
- $\sqrt{3}$

Выберите (среди предложенных) абсциссы точек перегиба графика заданной функции

$$y = x^3 \ln x^2.$$

$-e^{-\frac{5}{6}}$

$e^{-\frac{5}{6}}$

таких точек, среди предложенных, нет

0