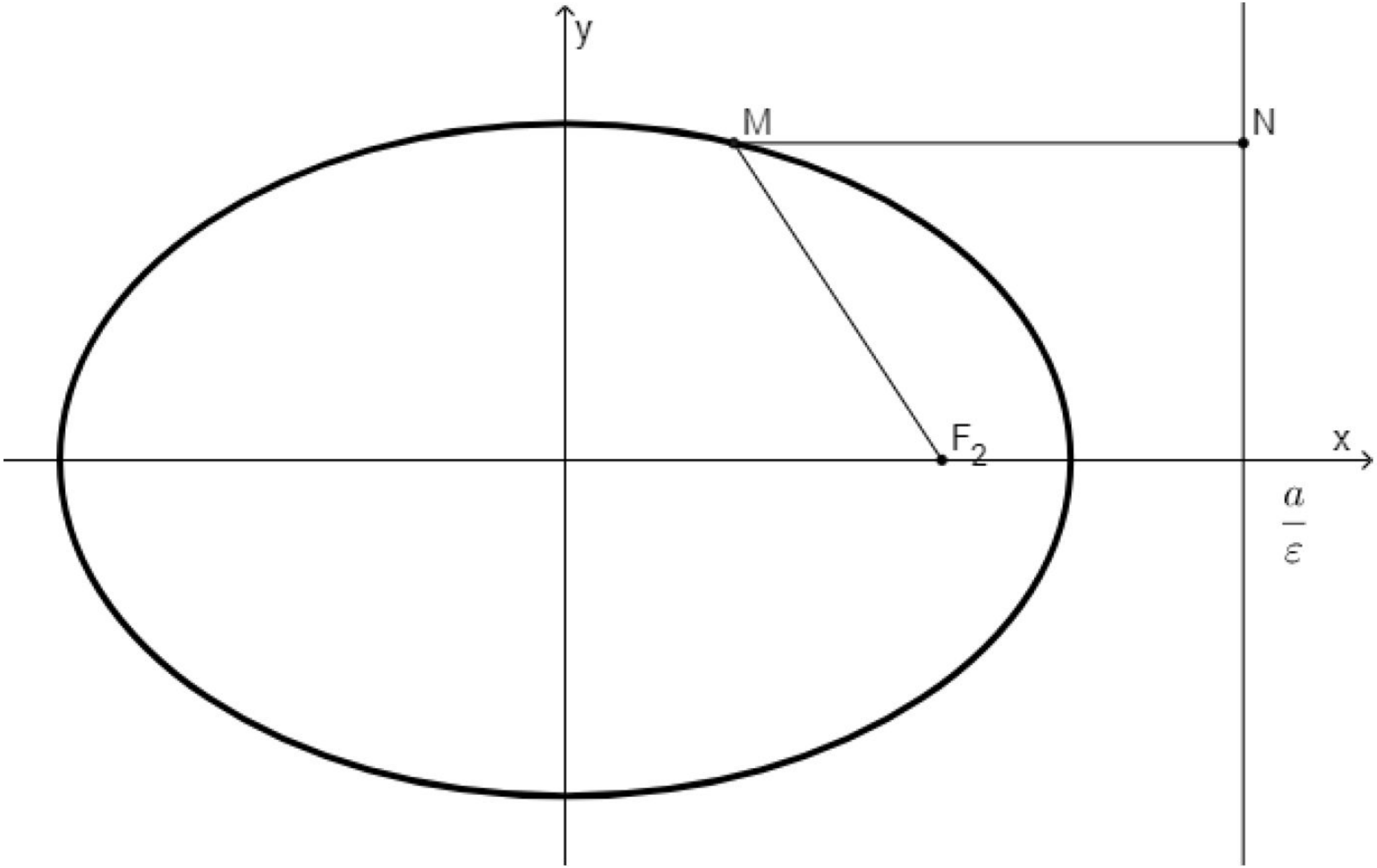
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Кривые 2-го порядка: эллипс, гипербола, парабола

Санкт-Петербург, 2015

Директрисы: прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, где ε - эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\frac{|MF_2|}{|MN|} = \frac{a - \varepsilon x}{\dfrac{a}{\varepsilon} - x} = \frac{\varepsilon(a - \varepsilon x)}{a - \varepsilon x} = \varepsilon$$


y
M
N
F2
x
a/ε

Эллипс *есть Г.М.Т. плоскости, для которых отношение фокального расстояния к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* $\varepsilon\left(0 < \varepsilon < 1\right)$ *- эксцентриситету.*

ЗАМЕЧАНИЕ.

Эллипс может быть задан :

а) параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, t \in [0,2\pi],$$

б) полярным уравнением:

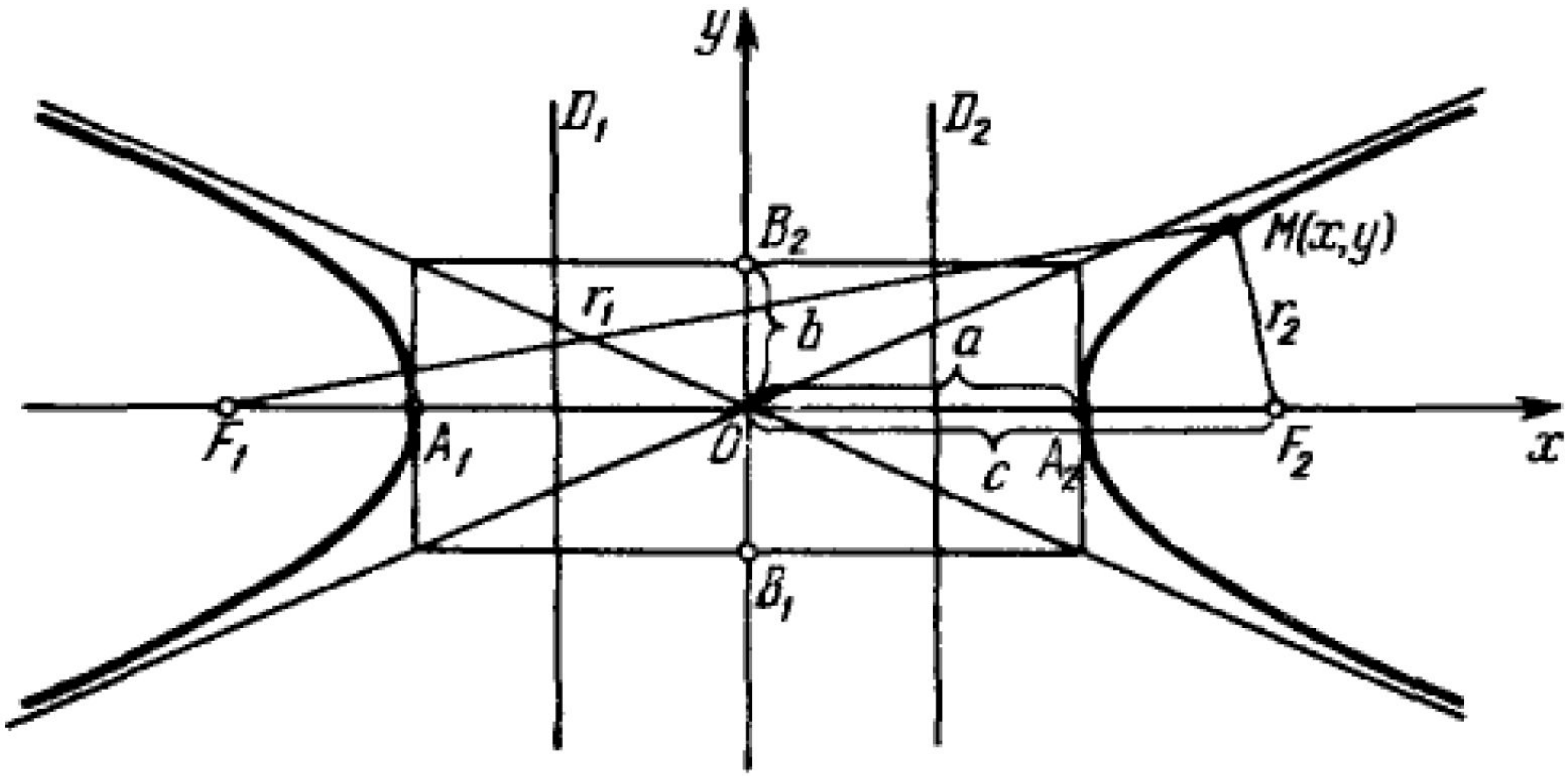
$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}, \theta \in [0,2\pi].$$

https://www.desmos.com/calculator/jz0xvod9ft

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Гипербола-*** *это Г.М.Т плоскости, для которых разность расстояний до 2-х фиксированных точек* F_1 *и* F_2 *(называемых* ***фокусами****) есть заданная постоянная величина.*

$F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$

Кривые 2-го порядка: гипербола



$$\left|\,|MF_1| - |MF_2|\,\right| = 2a \ \ (a < c)$$

Кривые 2-го порядка: гипербола

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4xc-4a^2$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\left|a-\varepsilon x\right|,$$

Фокальные уравнения гиперболы:

$$|MF_2| = |a - \varepsilon x|, \quad |MF_1| = |a + \varepsilon x|.$$

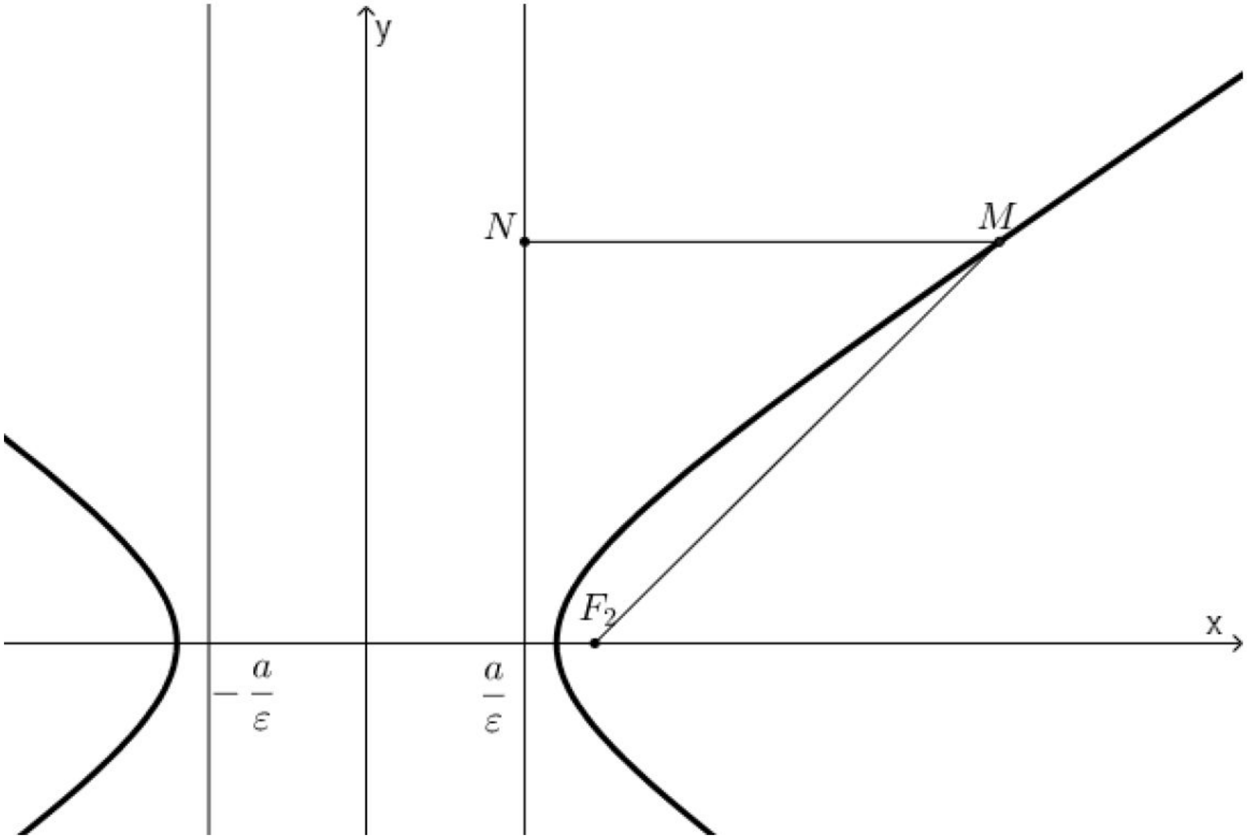
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2};$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- ***каноническое уравнение гиперболы.***

Кривые 2-го порядка: гипербола



$$\frac{|MF_2|}{d} = \frac{|a - \varepsilon x|}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \frac{|a - \varepsilon x|}{\varepsilon x - a} = \varepsilon$$

Гипербола *– это Г.М.Т, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* ***эксцентриситету*** $\varepsilon : \varepsilon > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ.

1. Гипербола может быть задана :

а) параметрически:

$$\begin{cases} x = \pm a \cdot \mathrm{ch} t \\ y = b \cdot \mathrm{sh} t \end{cases}, t \in R,$$

б) полярным уравнением:

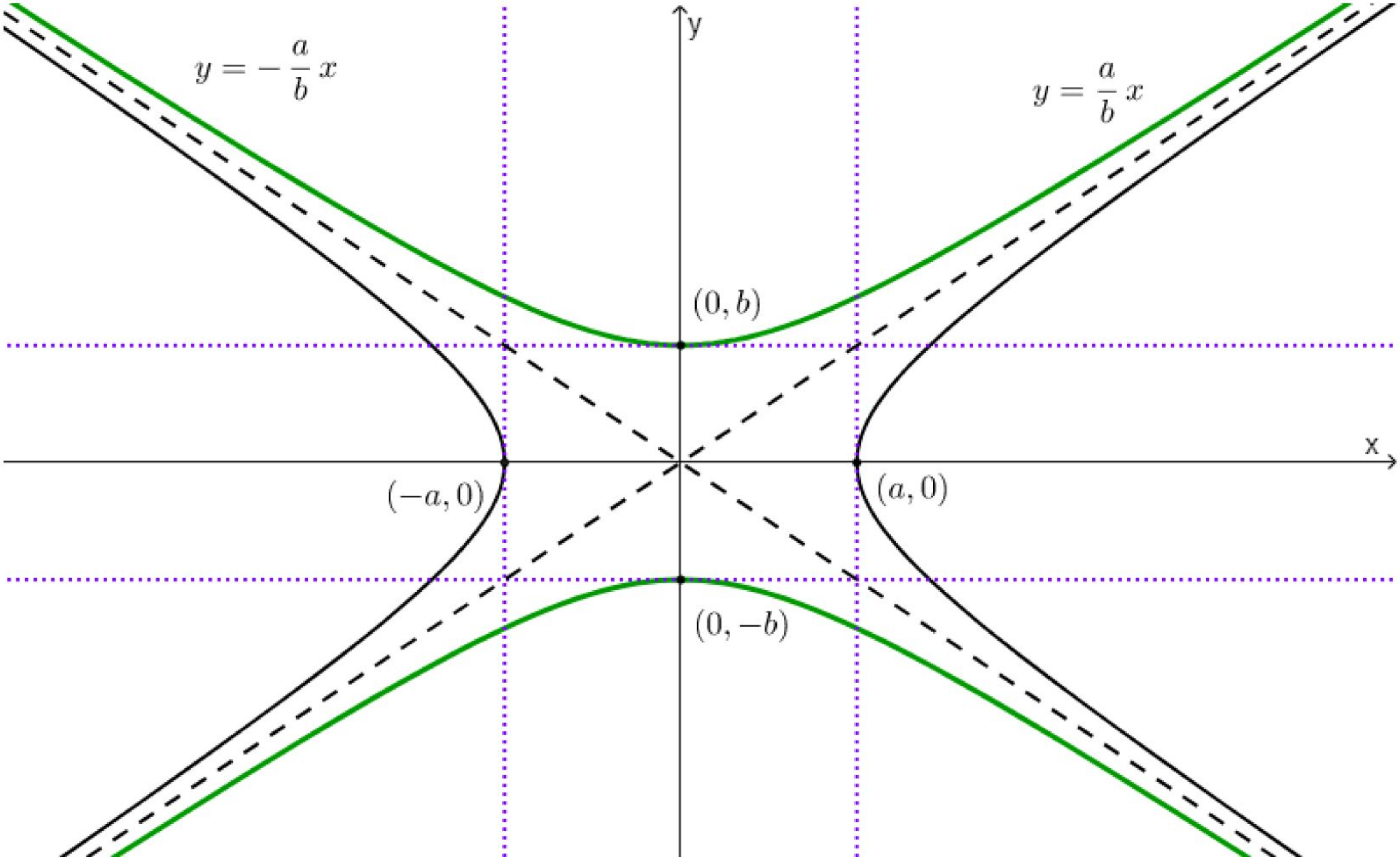
$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \theta}, \theta \in [0, 2\pi].$$

2. Гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет асимптоты: $y = \pm \frac{b}{a} x$

3. Гипербола, заданная уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ называется ***сопряжённой*** к гиперболе, заданной уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

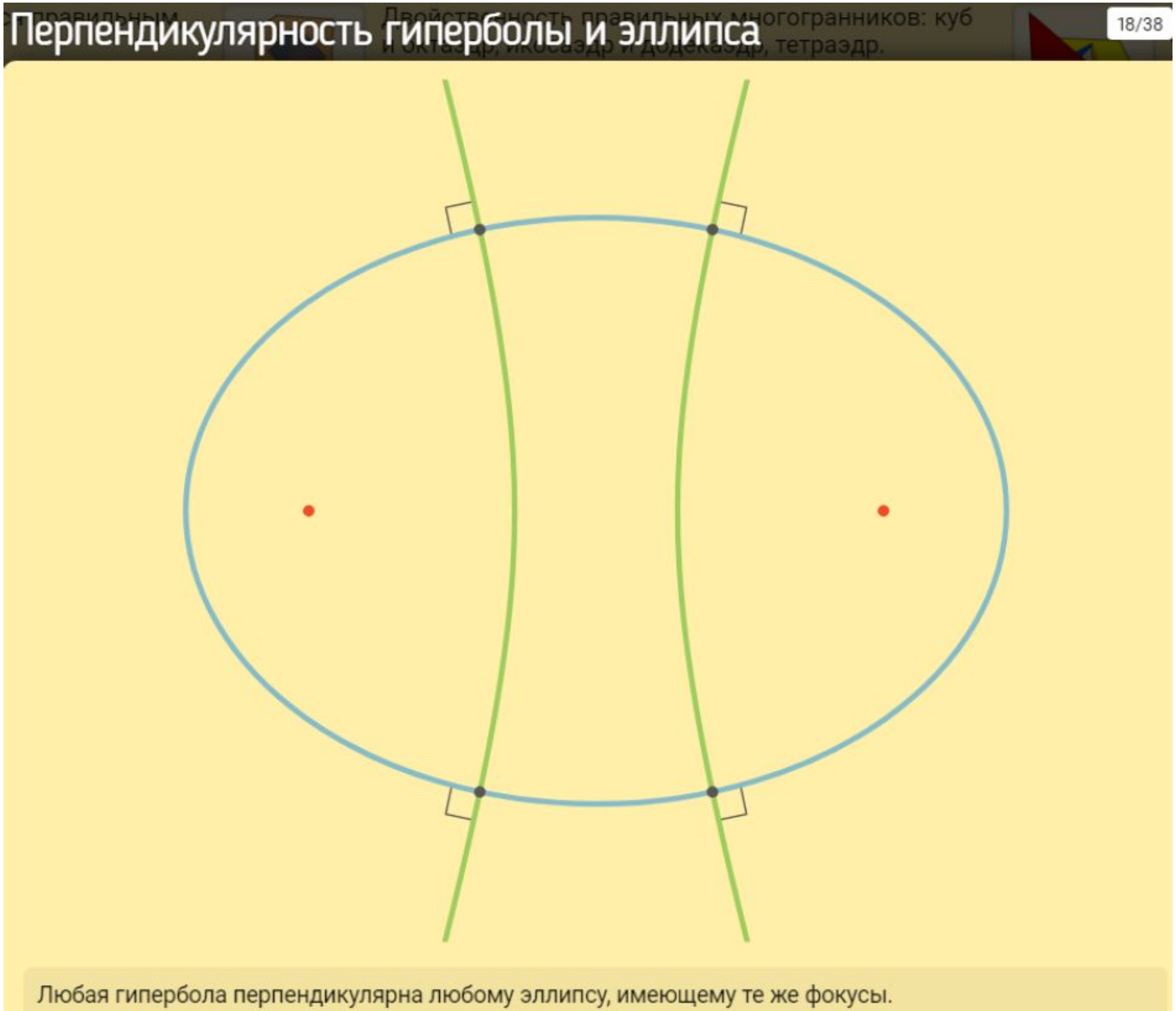
4. https://www.desmos.com/calculator/u3aibc8kin,

Кривые 2-го порядка: гипербола



Кривые 2-го порядка: гипербола

http://www.etudes.ru/ru/sketches/hyperbola-ellipse-perpendicularity/



Кривые 2-го порядка: гипербола

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Парабола*** *– это Г.М.Т. плоскости, равноудалённых от фиксированной точки* F *(называемой фокусом)и фиксированной прямой* D *(называемой директрисой).*

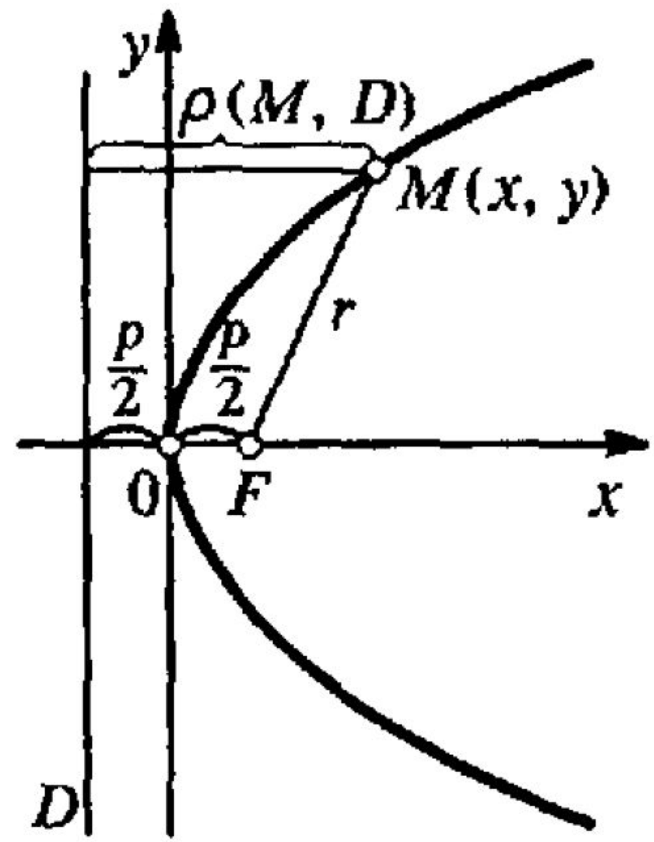
$$|MF| = \rho(M, D),$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

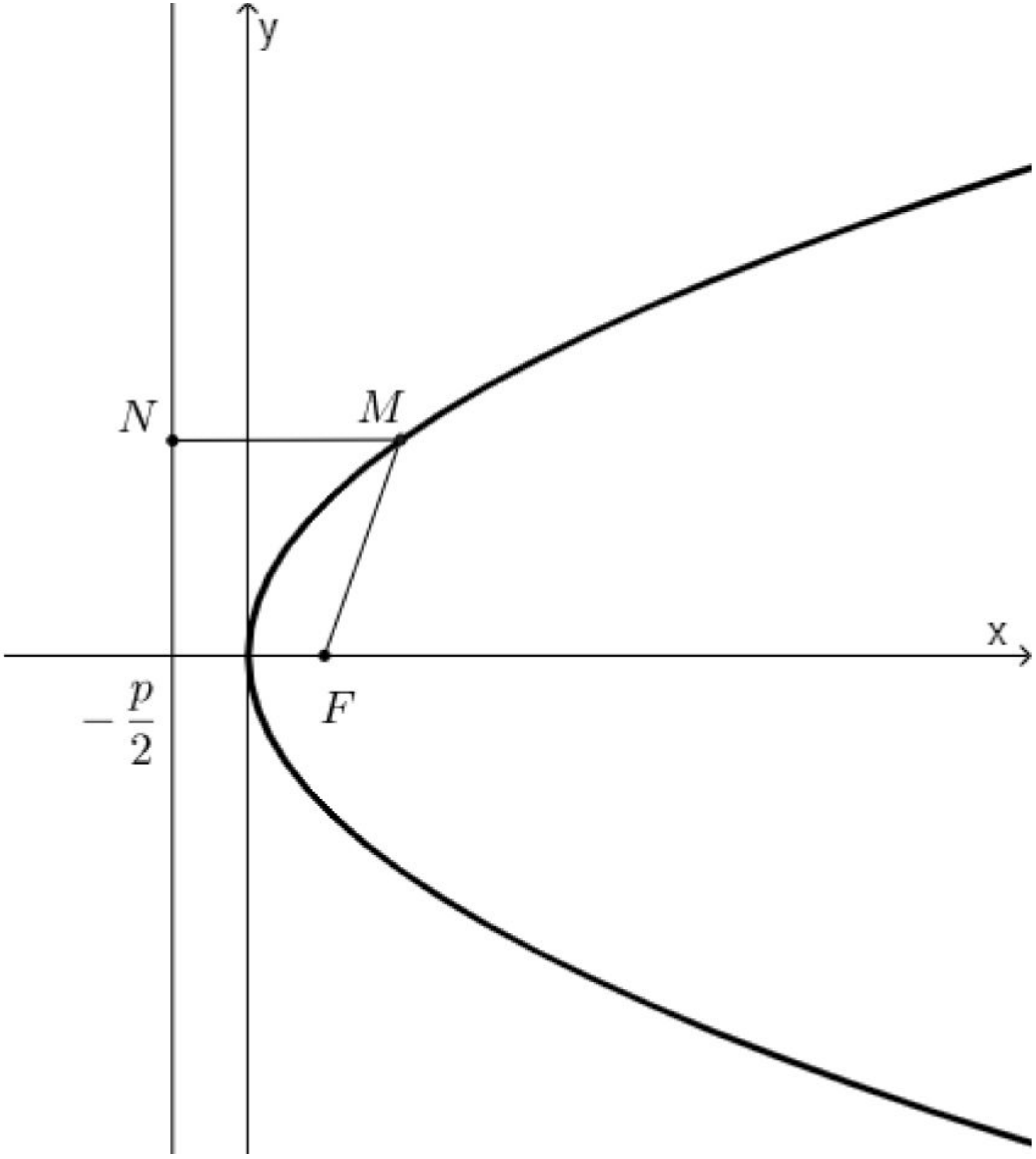
$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4},$$

$$y^2 = 2px$$

- каноническое уравнение параболы



$$\frac{|MF|}{\rho(M,D)}=1$$



Парабола - *это Г.М.Т, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная* ***эксцентриситету*** $\varepsilon = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ.

1. Парабола может быть задана :

а) параметрически:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}, \ t \in R,$$

б) полярным уравнением:

$$r = \frac{p}{1 - \cos\theta}, \theta \in [0, 2\pi].$$

2. https://www.desmos.com/calculator/zjh134uccr

ОБЩЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ для эллипса, гиперболы и параболы:

Г.М.Т плоскости для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная, равная ***эксцентриситету*** ε*, есть* ***эллипс*** *(если* $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$*),* ***гипербола*** *(если* $\varepsilon : \varepsilon > 1$*) или* ***парабола*** *(если* $\varepsilon = 1$*).*

ОБЩЕЕ ПОЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ ЭЛЛИПСА, ГИПЕРБОЛЫ, ПАРАБОЛЫ

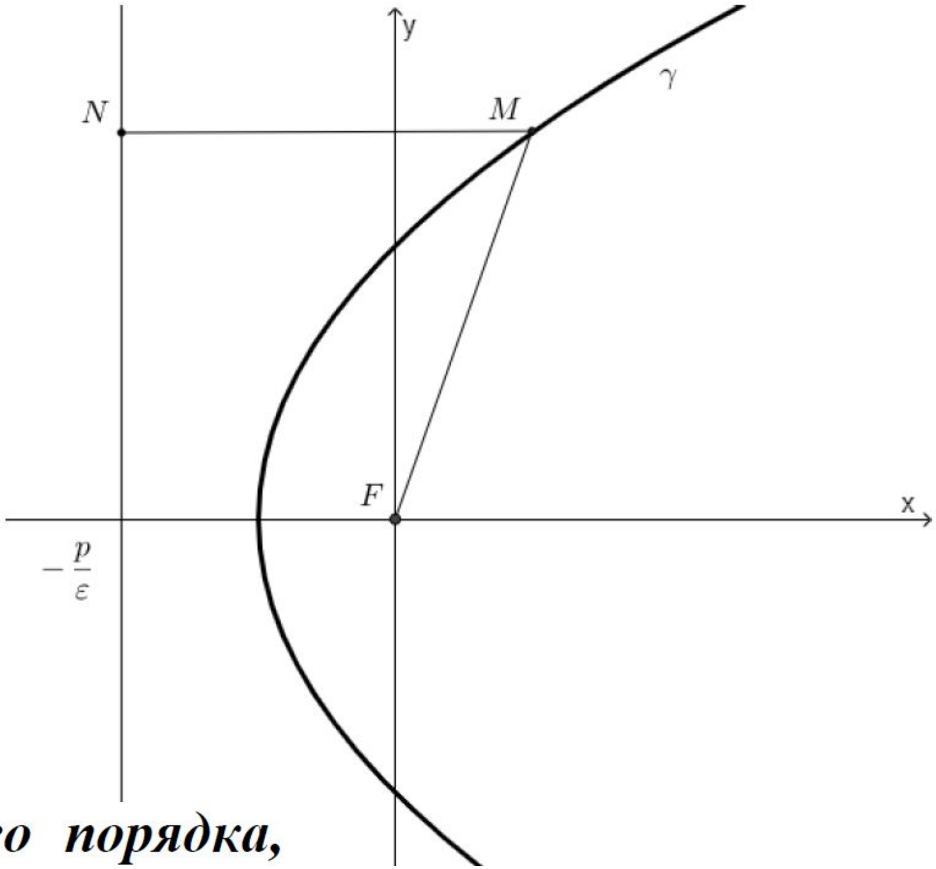
Рассмотрим Oxy и $Or\theta$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}.$$

т. F - фокус некоторой кривой 2-го порядка,(в полюсе-т. O),

l - директриса некоторой кривой 2-го порядка

Кривые 2-го порядка: общее полярное уравнение



$$\frac{|MF|}{|MN|} = \frac{r}{x + \frac{p}{\varepsilon}} = \frac{r}{r\cos\theta + \frac{p}{\varepsilon}} = \varepsilon,$$

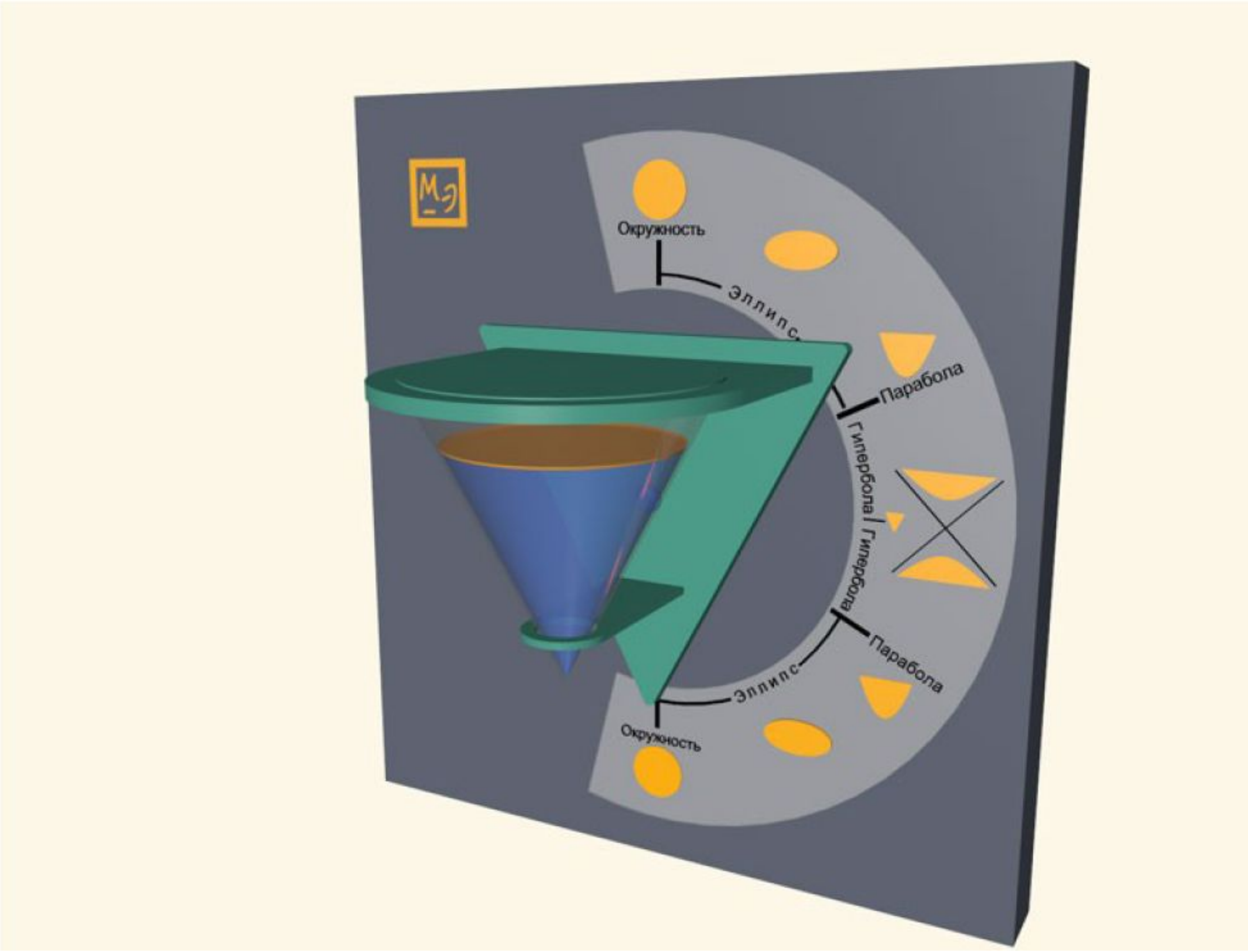
$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

- ***полярное уравнение кривой 2-го порядка, которое при*** $\varepsilon : 0 < \varepsilon < 1$ является ***эллипсом,*** при $\varepsilon : \varepsilon > 1$ - ***гиперболой,*** при $\varepsilon = 1$ - ***параболой.***

Кривые 2-го порядка как конические сечения

http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-water/

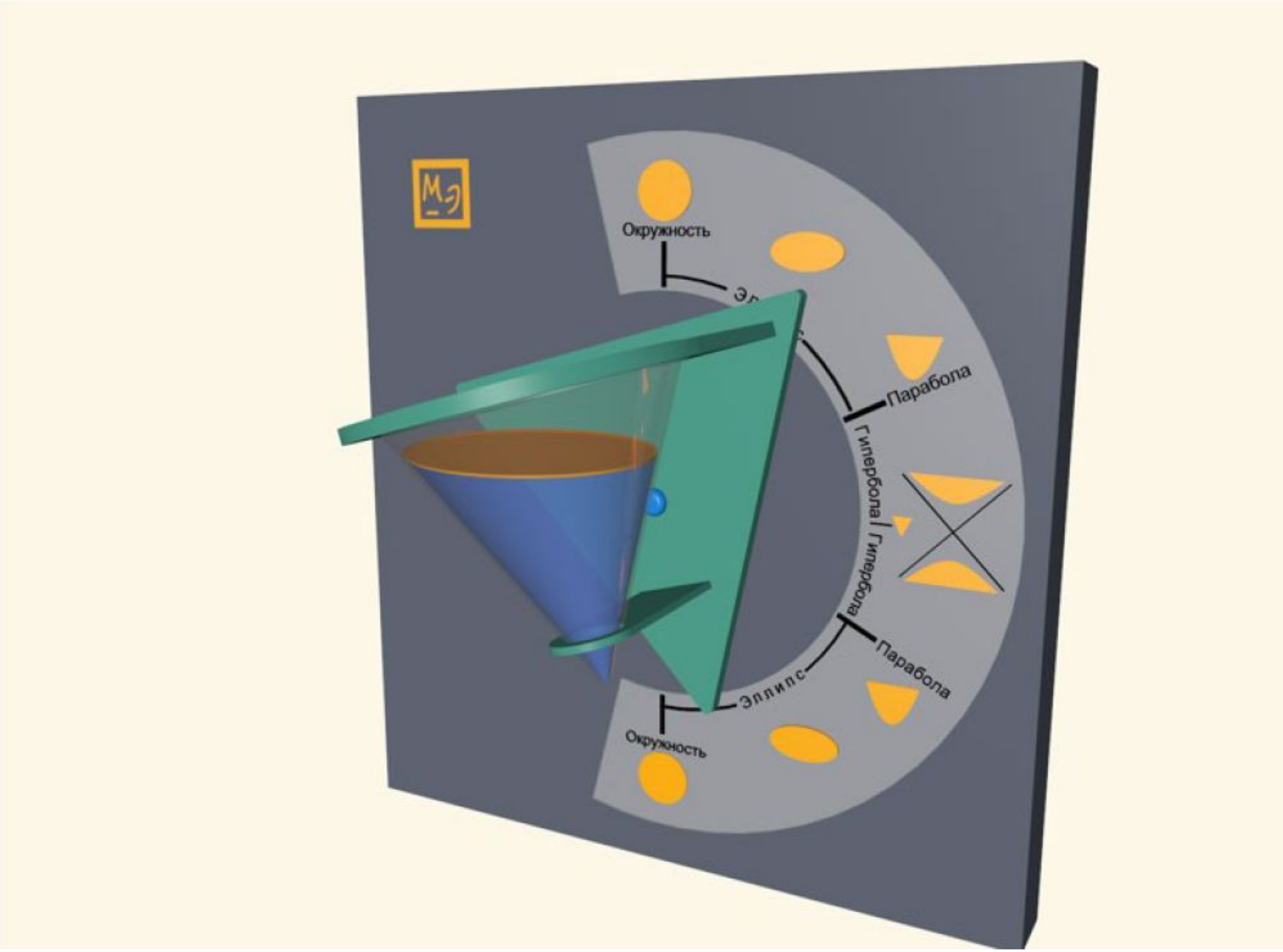
1. Окружность



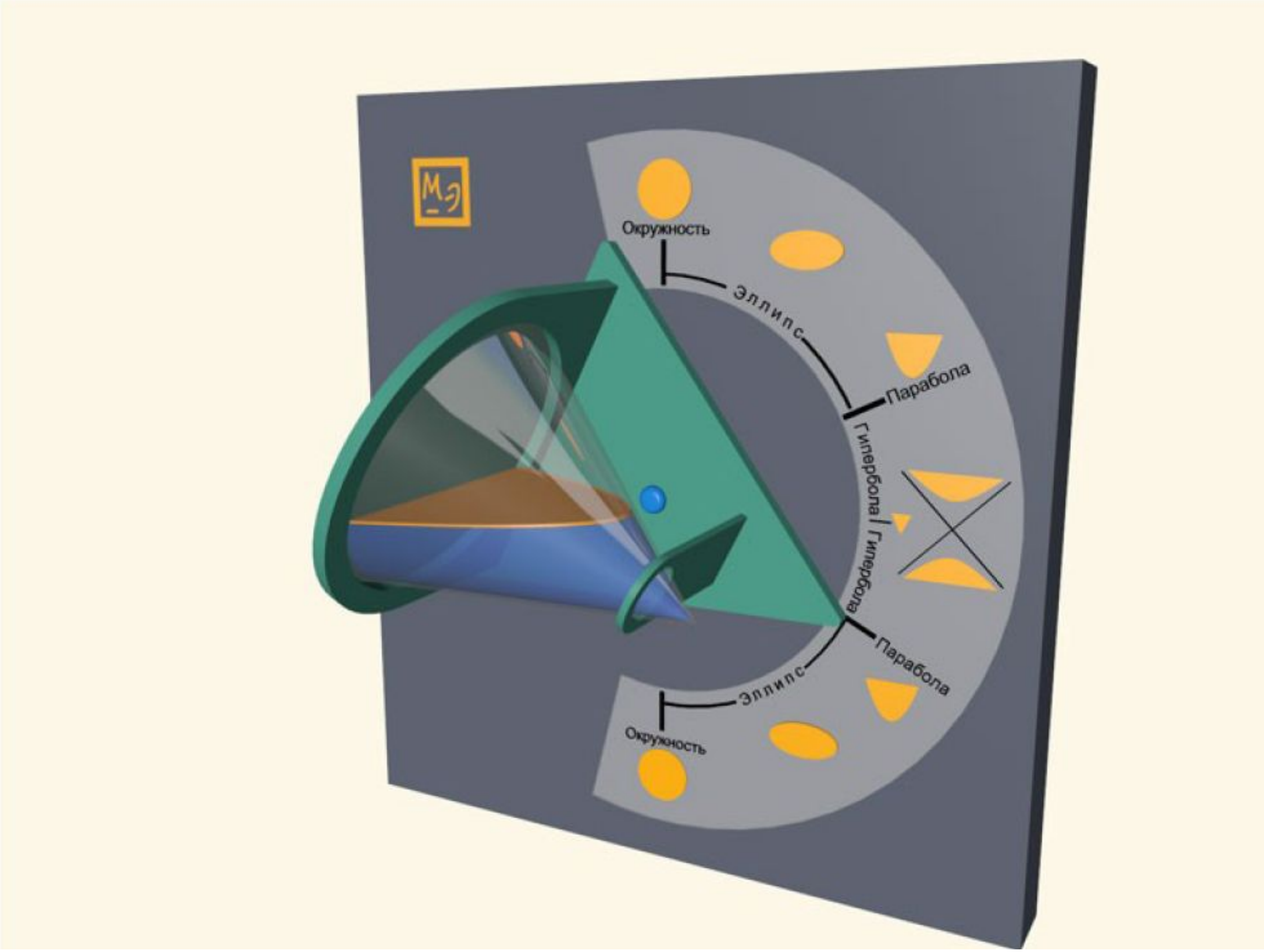
Кривые 2-го порядка как конические сечения

http://www.etudes.ru/ru/models/conic-sections-water/

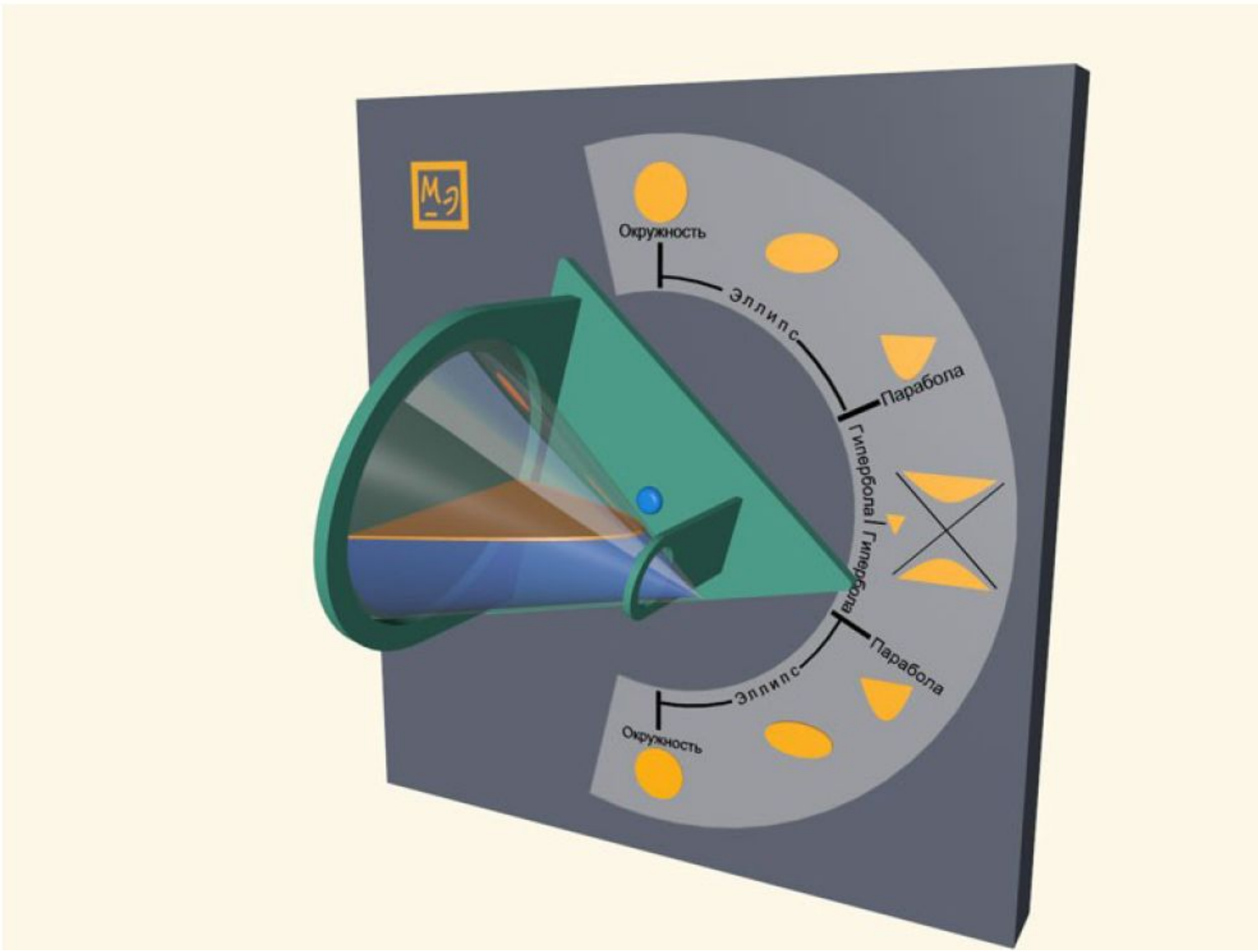
2. Эллипс



3. Парабола

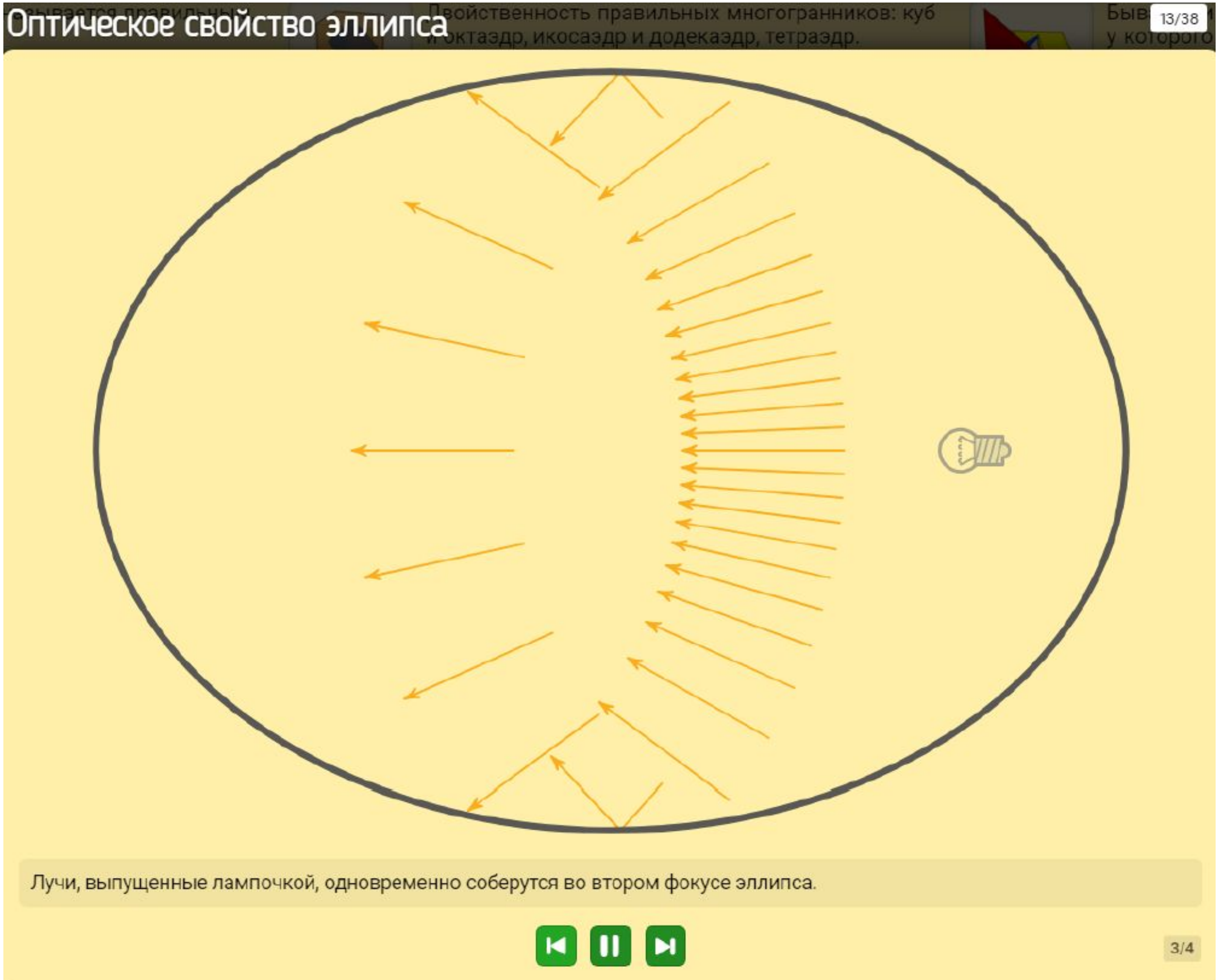

Окружность
Эллипс
Парабола
Гипербола
Гипербола
Парабола
Эллипс
Окружность

4. Гипербола


Окружность
Эллипс
Парабола
Гипербола
Гипербола
Парабола
Эллипс
Окружность

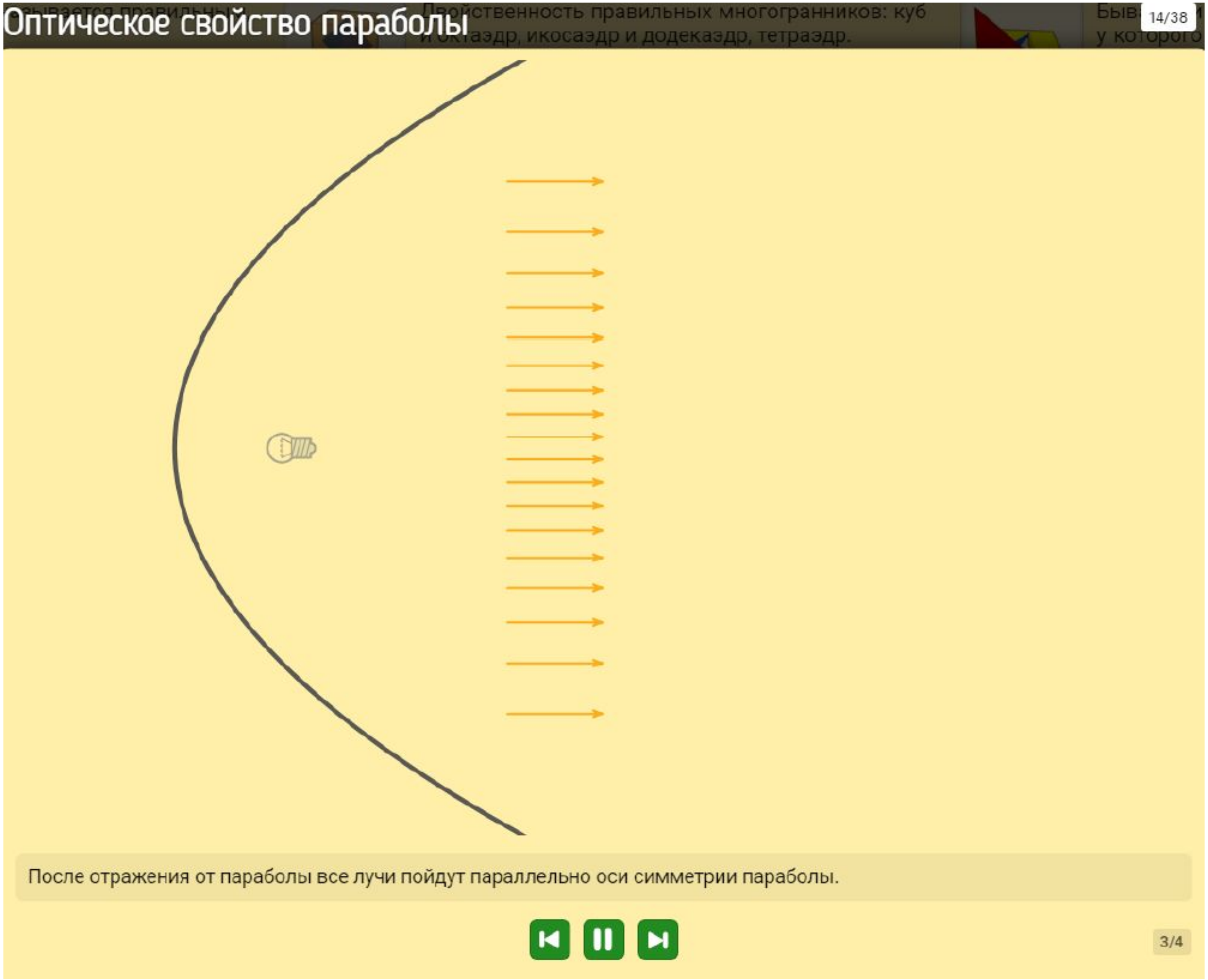
Кривые 2-го порядка : оптические свойства (эллипс)

http://www.etudes.ru/ru/sketches/ellipse-optic-property/



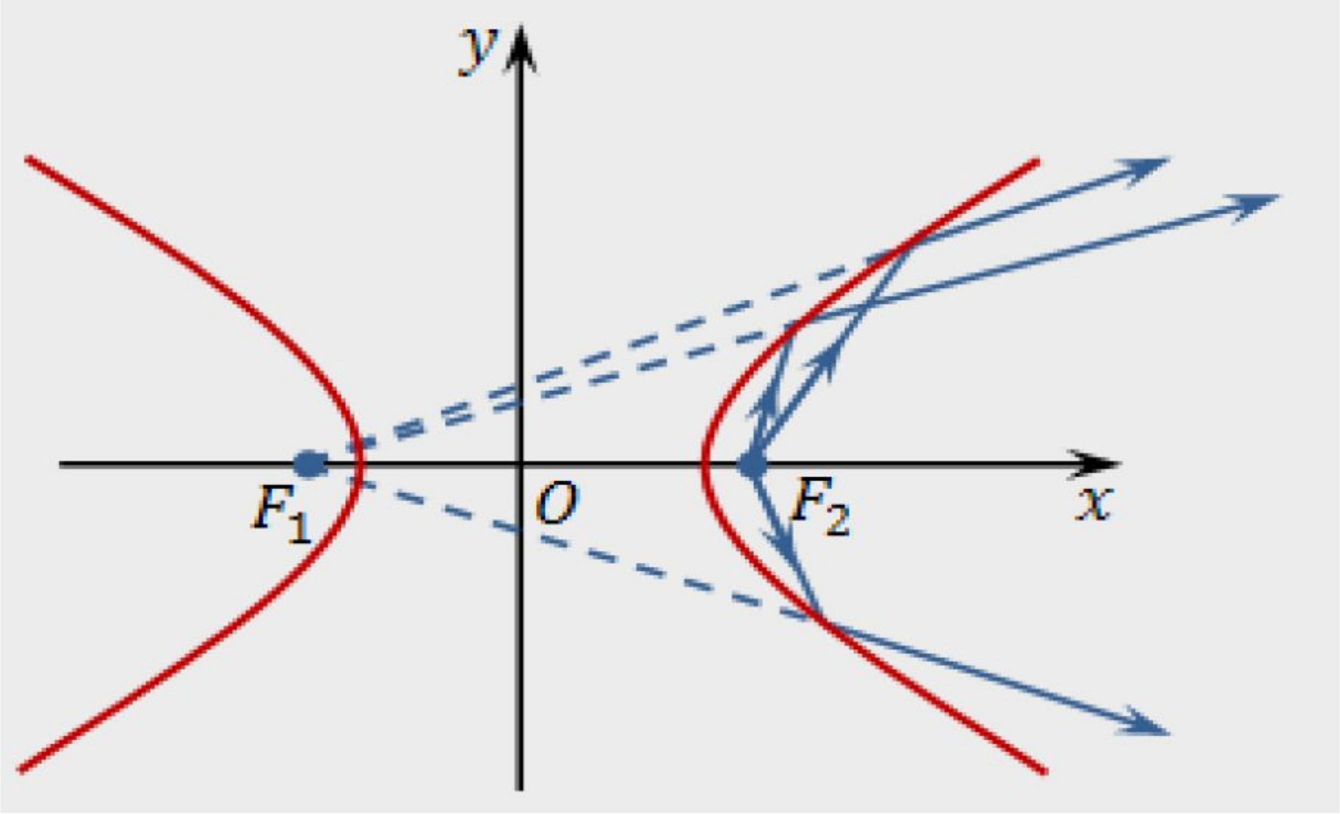
Кривые 2-го порядка : оптические свойства (парабола)

http://www.etudes.ru/ru/sketches/parabola-optic-property/



Кривые 2-го порядка : оптические свойства (гипербола)

Свет от источника, находящегося в одном из фокусов гиперболы, отражается второй ветвью гиперболы таким образом, что продолжения отраженных лучей пересекаются во втором фокусе - т.е. если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи света, отразившись от зеркала, расходятся так, как если бы они исходили из другого фокуса



УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Спасибо за внимание!

Санкт-Петербург, 2017