Аксиоматическое построение системы натуральных чисел

Аксиоматика натурального числа

В качестве основного понятия при аксиоматическом построении арифметики натуральных чисел взято отношение «непосредственно следовать за», заданное на непустом множестве *N*.

Элемент, непосредственно следующий за элементом *a*, обозначают *a'*.

Суть отношения «непосредственно следовать за...» раскрывается в следующих аксиомах.

Аксиома 1. *Во множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Будем называть его единицей.*

Аксиома 2. *Для каждого элемента а из N существует единственный элемент а', непосредственно следующий за а.*

Аксиома 3. *Для каждого элемента а из N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует а.*

Аксиома 4. Всякое подмножество М множества N, обладает свойствами:

1)единица принадлежит множеству М;

2) из того, что а содержится в М, следует, что и а' содержится в М, то М совпадает со множеством N.

Сформулированные аксиомы называют аксиомами Пеано

Определение натурального числа

Множество N, для элементов которого установлено отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, называется множеством натуральных чисел, а его элементы - натуральными числами.

Сложение

Определение. Сложением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающим свойствами:

1) $(\forall a \in N)\ a + 1 = a'$,

2) $(\forall a, b \in N)\ a + b' = (a+b)'$.

Число $a+b$ называется суммой чисел a и b, а сами числа a и b слагаемыми.

Условимся о следующих обозначениях:

$1' = 2$; $2' = 3$; $3' = 4$; $4' = 5$ и т.д.

Свойства сложения

Теорема 3. Сложение натуральных чисел существует и оно единственно

Теорема 4. $(\forall\ a, b, c \in N)(a + b) + c = a + (b + c)$

Теорема 5. $(\forall\ a, b \in N)\ a+b = b+a$

Умножение

Умножением натуральных чисел называется алгебраическая операция, обладающая свойствами:

1)($\forall$ $a \in N$) $a \cdot 1 = a$;

2)($\forall$ $a, b \in N$) $a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Число $a \cdot b$ называется произведением чисел a и b, а сами числа a и b - множителями

Свойства умножения

Теорема 7. Умножение натуральных чисел существует, и оно единственно.

Теорема 8. $(\square\ a, b, c \in N)(a + b) \cdot c = ac + b \cdot c$ - дистрибутивность справа относительно сложения.

Теорема 9. $(\square\ a, b, c \in N)\ a \cdot (b + c) = + a \cdot c$ - дистрибутивность слева относительно сложения.

Теорема 10. $(\square\ a, b, c \in N)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ - ассоциативность умножения.

Теорема 11. $(\square\ a, b \in N)\ a \cdot b = a \cdot b$ - коммутативность умножения

Вопросы для самопроверки

1. Можно ли аксиому 3 сформулировать в таком виде: «Для каждого элемента а из N существует единственный элемент, за которым непосредственно следует а»?

2. Продолжите определение натурального числа: «Натуральным числом называется элемент множества ….»

3. Верно ли, что каждое натуральное число получается из предыдущего прибавлением единицы?

4. Какие свойства умножения могут быть использованы при нахождении значения выражения:

Литература

Стойлова Л. П.

Математика: Учебник для студ. высш. пед. учеб. заведений.

М.: Издательский центр «Академия». 2002. - 424 с.