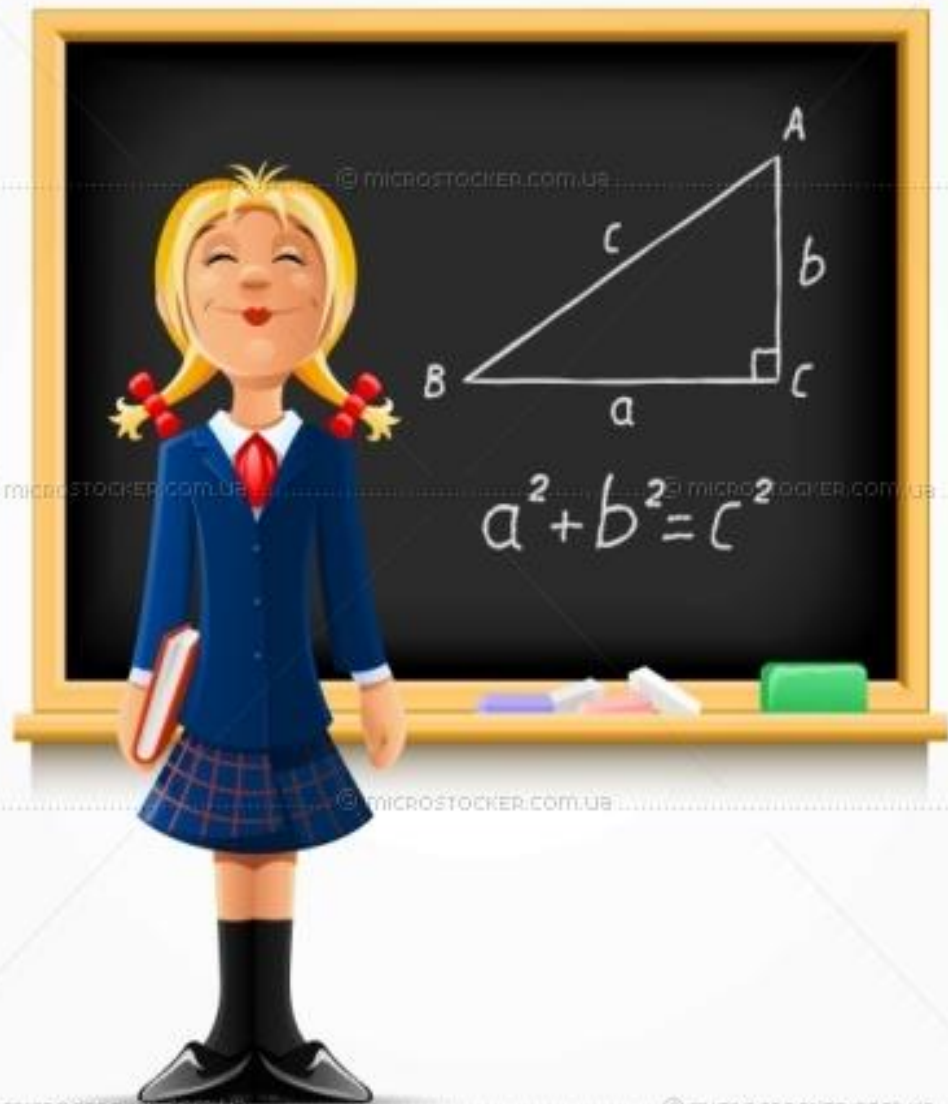


УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

ПЛОСКОСТЬ -
от лат. *planum*
ровная
поверхность.

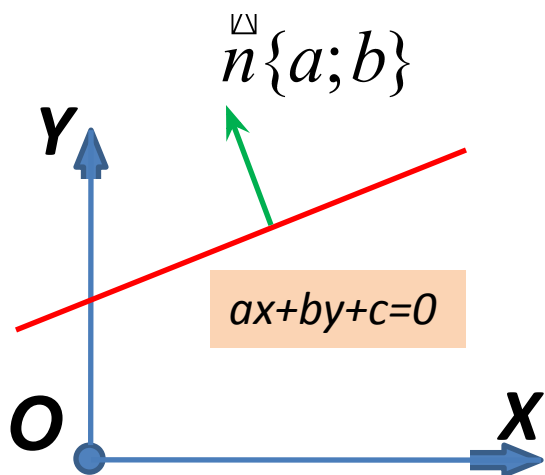
План урока:

- 1 Прямая на плоскости и плоскость в пространстве.
- 2 Вывод формулы уравнения плоскости.
- 3 Решение задач о нахождении уравнения плоскости.
- 4 ДЗ.



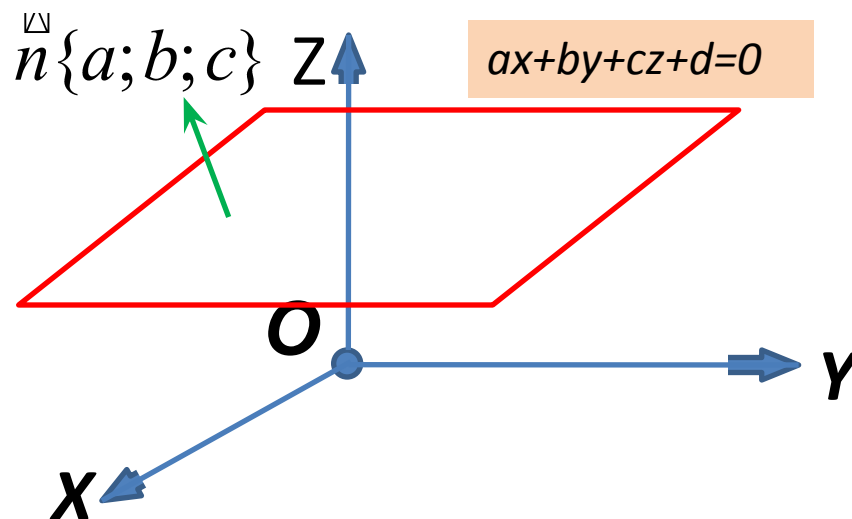
Прямая на плоскости и плоскость в пространстве.

Уравнение
прямой
на плоскости



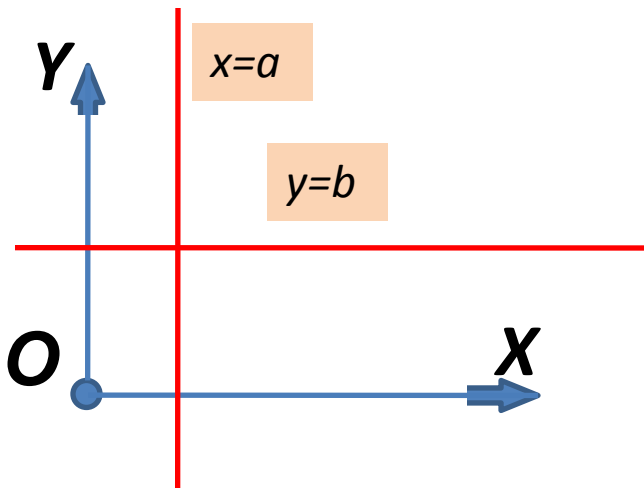
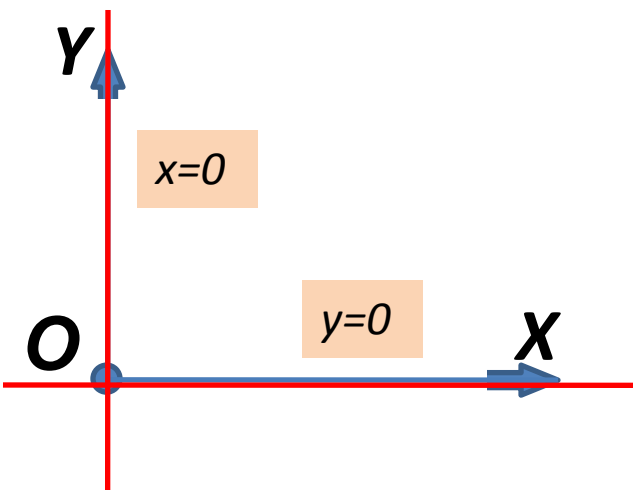
Вектор нормали прямой – это вектор, который перпендикулярен данной прямой.

Уравнение
плоскости
в пространстве

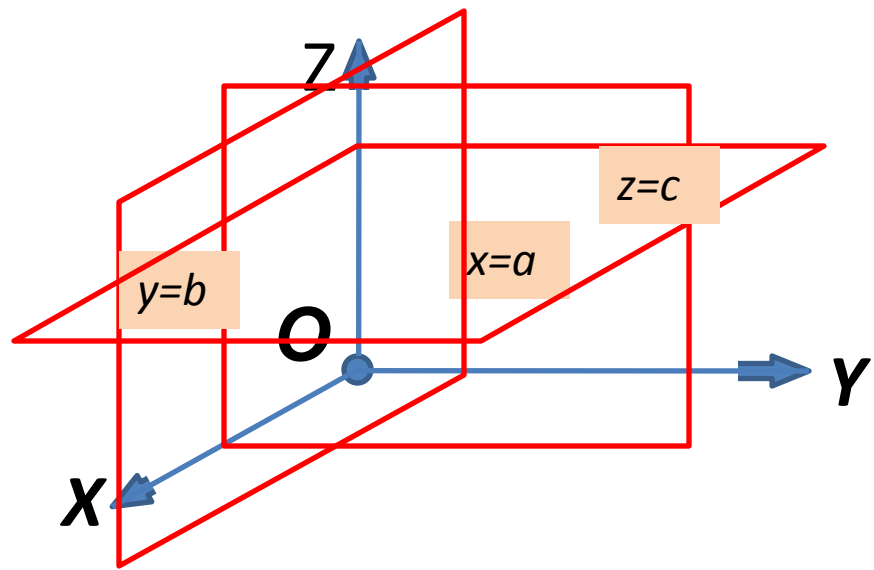
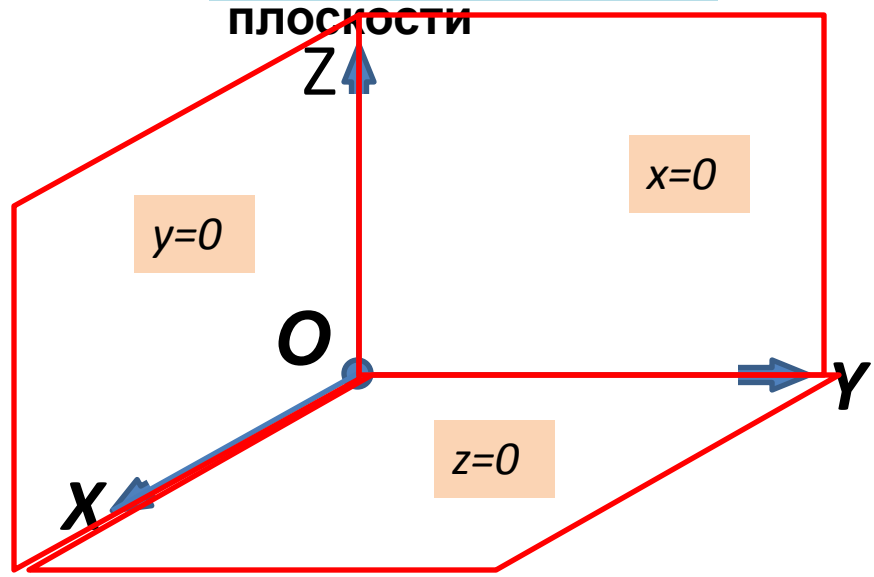


Вектор нормали плоскости – это вектор, который перпендикулярен данной плоскости.

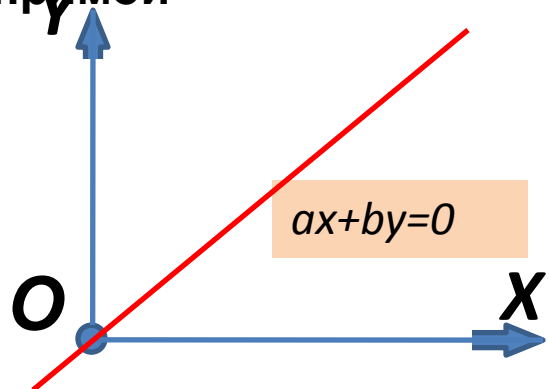
Частные случаи уравнения прямой



Частные случаи уравнения плоскости



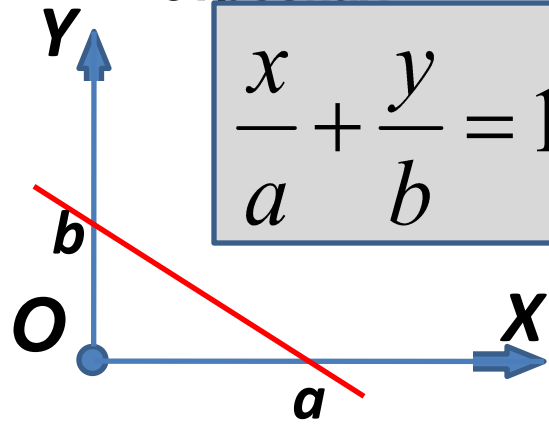
Частные случаи уравнения прямой



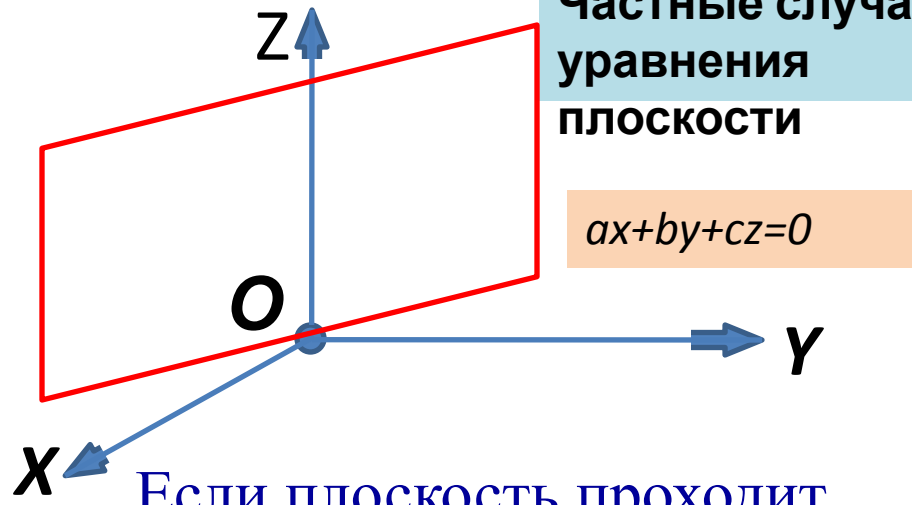
Если прямая проходит через начало координат, то $c=0$

Уравнение прямой в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



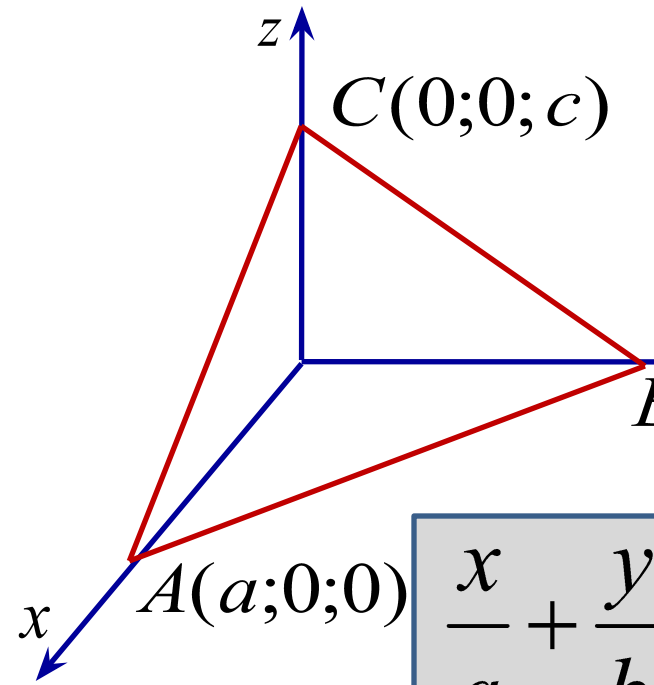
Частные случаи уравнения плоскости



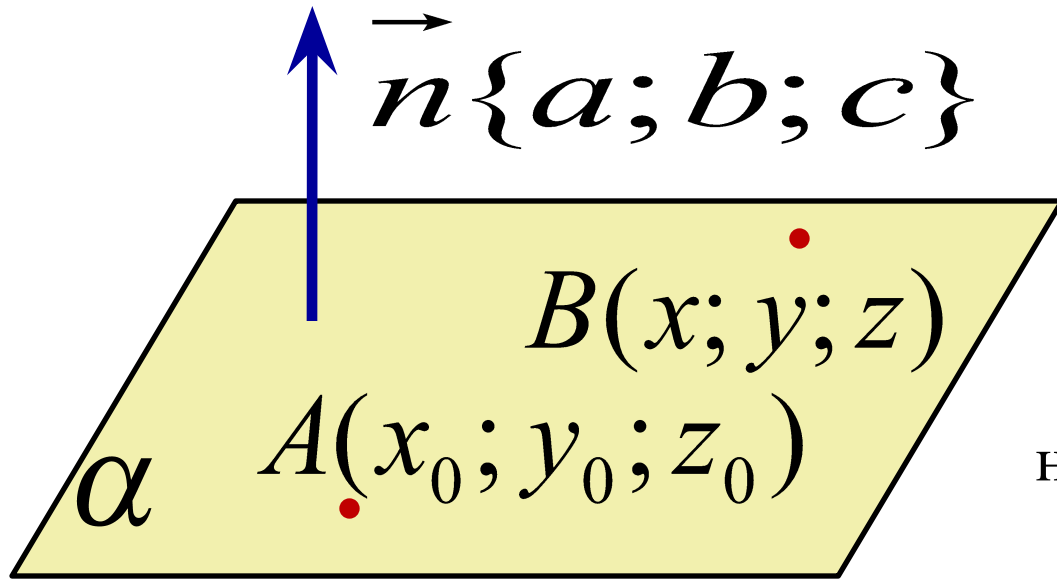
Если плоскость проходит через начало координат, то $d=0$

Уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору



$$A(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$$

$$\vec{n} \perp \alpha$$

$$\vec{n}\{a; b; c\}$$

нормальный вектор плоскости

$$\vec{n} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = |\vec{n}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos \alpha$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ где } d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$$

Уравнение плоскости

1 Общее уравнение

$$ax + by + cz + d = 0$$

плоскости

Частные случаи уравнения

плоскости и $O(0;0;0)$, $O \in \alpha$, то $d=0$

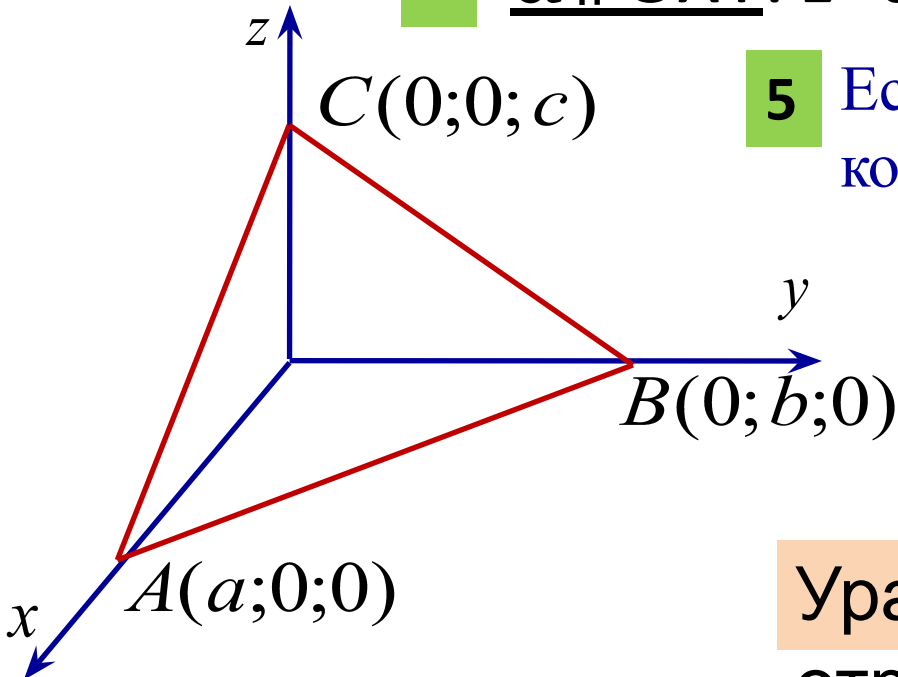
$$ax + by + cz = 0$$

3 $\alpha=OXY$: $z=0$, $\alpha=OXZ$: $y=0$, $\alpha=OYZ$: $x=0$.

4 $\alpha \parallel OXY$: $z=c$, $\alpha \parallel OXZ$: $y=b$, $\alpha \parallel OYZ$: $x=a$.

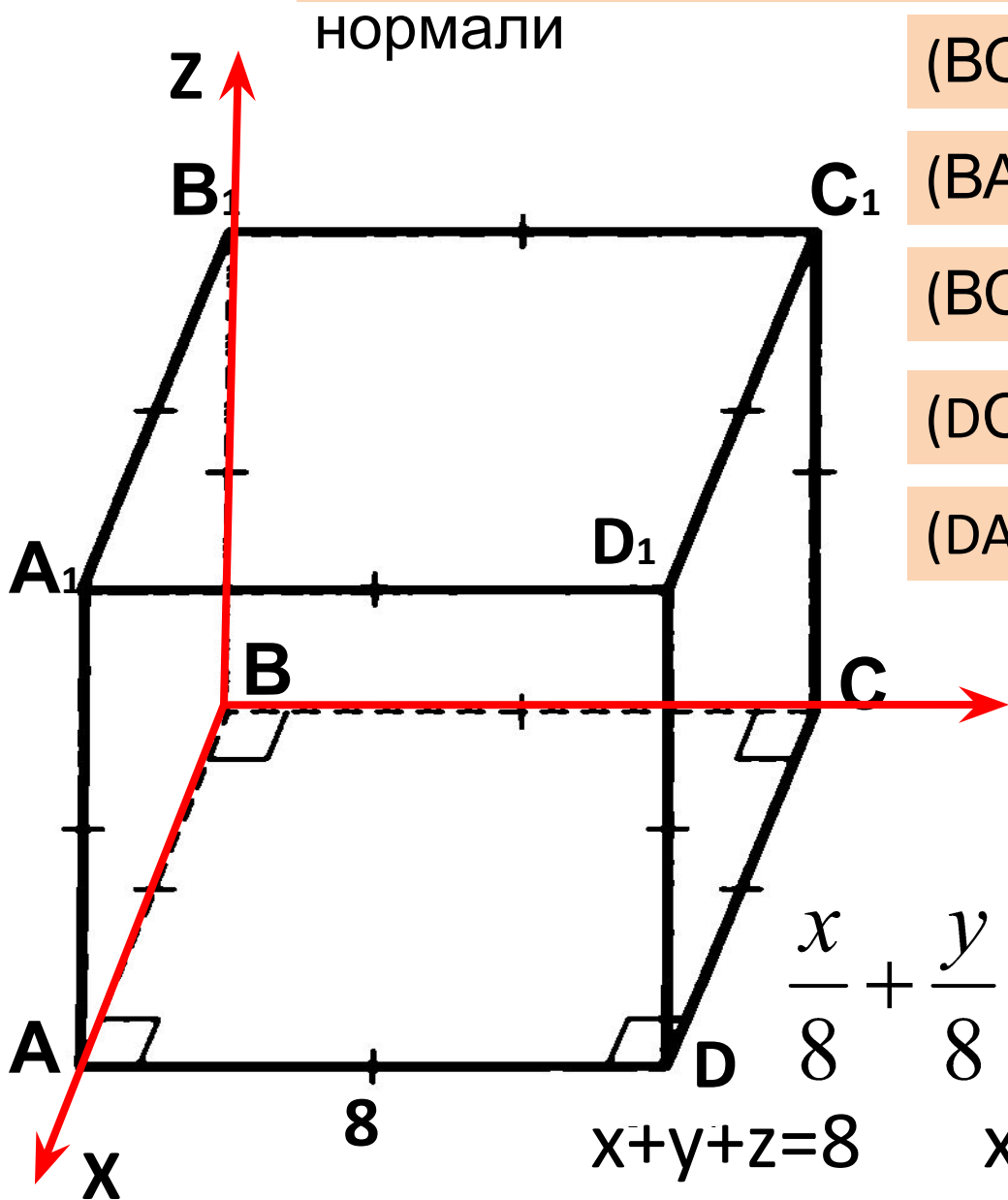
5 Если плоскость пересекает оси координат в точках А, В, С, то

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Уравнение плоскости в отрезках

1) Запишите уравнения плоскостей по рисунку и координаты вектора нормали



(BCC_1): $x=0$ $\vec{n}\{1;0;0\}$

(BAA_1): $y=0$ $\vec{n}\{0;1;0\}$

(BCA): $z=0$ $\vec{n}\{0;0;1\}$

(DCC_1): $y=8$ $\vec{n}\{0;1;0\}$

(DAA_1): $x=8$ $\vec{n}\{1;0;0\}$

($D_1C_1B_1$): $z=8$ $\vec{n}\{0;0;1\}$

(ACB_1): $\frac{x}{8} + \frac{y}{8} + \frac{z}{8} = 1$ $\vec{n}\{1;1;1\}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

$x+y+z=8$ $\vec{n}\{1;1;1\}$

$x+y+z-8=0$ $\vec{n}\{1;1;1\}$

2) Запишите уравнения плоскости по рисунку, укажите вектор

Предложите как лучше выбрать систему

нормали.

координат?

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1

(SCD) :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

$$OD = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\triangle DOC = \triangle DOS$$

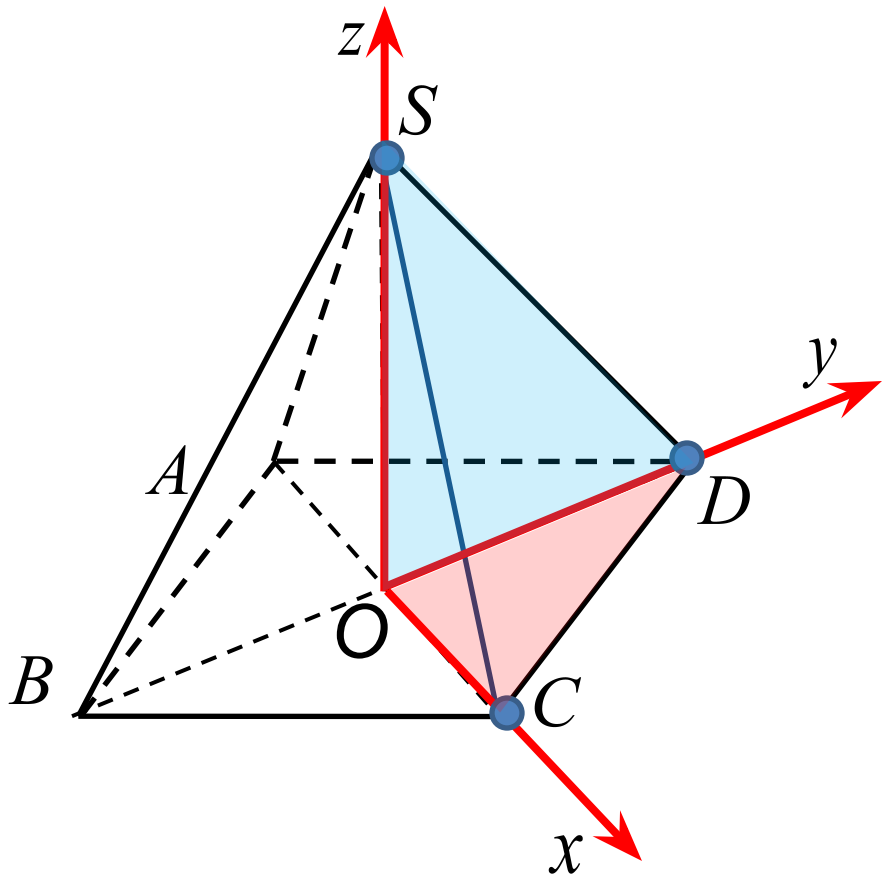
по гипотенузе и катету

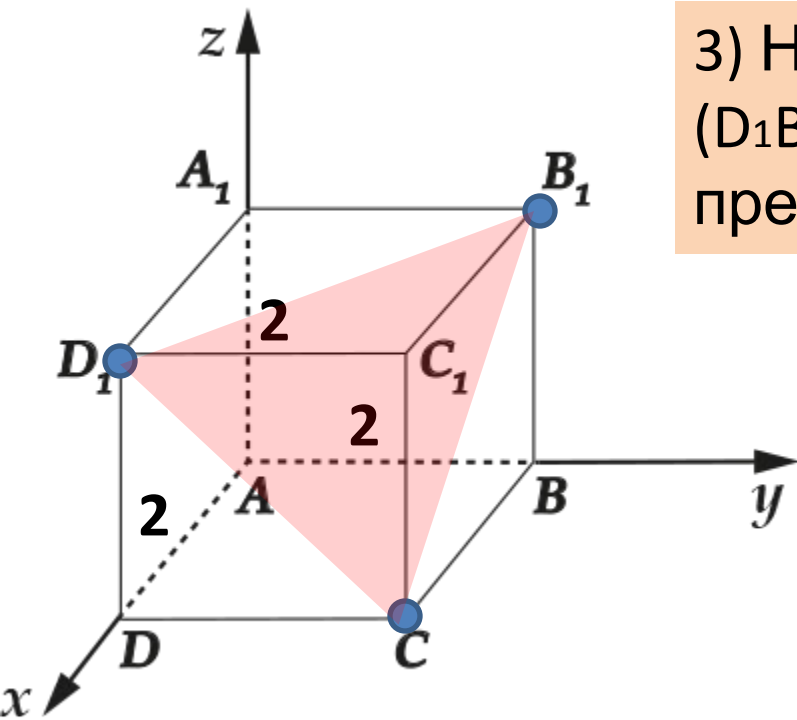
$$OS = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \frac{z}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \sqrt{2}z - 1 = 0$$

$$\vec{n} \{ \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2} \}$$





3) Напишите уравнение плоскости (D₁B₁C), укажите вектор нормали, если представленная фигура куб

$$D_1(2;0;2), B_1(0;2;2), C(2;2;0)$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\begin{cases} 2a+2c+d=0 & 2a-2b=0 \\ 2b+2c+d=0 & 2a+2b+d=0 \\ 2a+2b+d=0 & 4a+d=0 \end{cases}$$

$$2a+2c+d=0$$

$$2a+2b+d=0$$

$$4a+d=0$$

$$2(-1/4d)+2c+d=0$$

$$2(-1/4d)+2b+d=0$$

$$a=-1/4d$$

$$-1/2d+2c+d=0$$

$$-1/2d+2b+d=0$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$2c=-1/2d$$

$$2b=-1/2d$$

$$-1/4dx-1/4dy-1/4dz+d=0$$

$$c=-1/4d$$

$$b=-1/4d$$

$$x+y+z-4=0 \quad \vec{n} \{1;1;1\}$$

4) Напишите уравнение плоскости (АМС), укажите вектор нормали, если представленная фигура прямоугольный параллелепипед

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{5} + \frac{z}{4} = 1$$

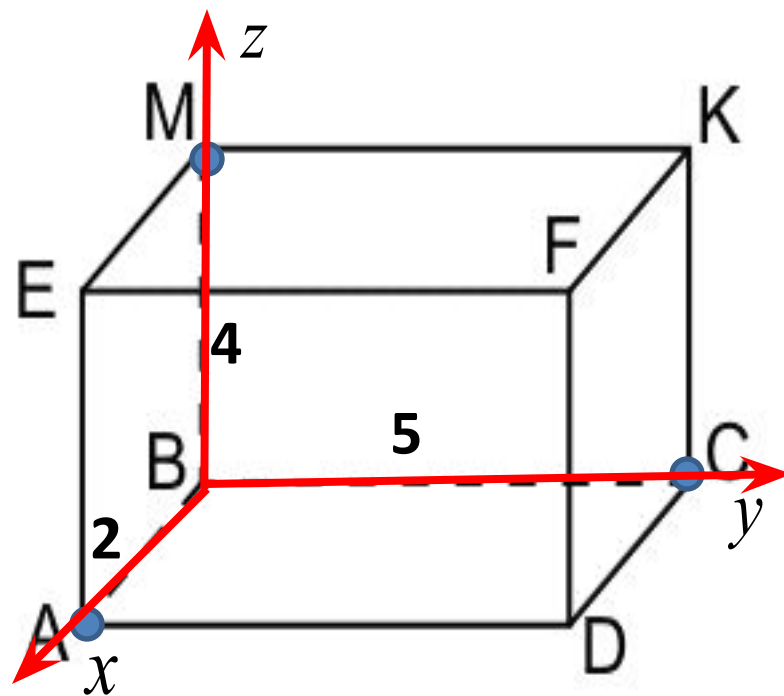
$$10x + 4y + 5z = 20$$

$$10x + 4y + 5z - 20 = 0$$

$$\vec{n} \{1 \ 0; 4; 5\}$$

Введем систему координат как показано на рисунке

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$



Задача 5(6): Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-2;3;5)$, $B(4;-3;0)$, $C(0;6;-5)$ и найти координаты вектора нормали $(A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$(3;-2;-1)) \quad 4a - 3b + d = 0$$

$$\begin{cases} -2a + 3b + 5c + d = 0 \\ 4a - 3b + d = 0 \\ 6b - 5c + d = 0 \end{cases}$$

Цель - выразить каждую из трех переменных a, b, c через d

$$4a + d + d = 0$$

$$4a = -2d$$

$$a = -\frac{d}{2}$$

Сложив 1 и 3 уравнение системы получим уравнение с 3-мя неизвестными a, b, d

$$6b - 5c + d = 0$$

$$-2a + 9b + 2d = 0$$

$$-2d - 5c + d = 0$$

Получили уравнение, которое «созвучно» со 2 уравнением системы с 3-мя неизвестными a, b, d , умножим на 2 данное уравнение и сложим его со 2 уравнением (для того чтобы избавиться от переменной a)

$$-5c = d$$

$$a) \quad 4a + 18b + 4d = 0$$

$$c = \frac{-d}{5}$$

$$\begin{aligned} 15b + 5d &= 0 \\ 15b &= -5d \end{aligned} \quad b = \frac{-d}{3}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a = -\frac{d}{2} \quad b = \frac{-d}{3} \quad c = \frac{-d}{5}$$

$$\frac{-d}{2}x + \frac{-d}{3}y + \frac{-d}{5}z + d = 0$$

$$15x + 10y + 6z - 30 = 0$$

Проверка правильности составленного уравнения плоскости
(подставим координаты точек в данное уравнение плоскости)

$$A(-2;3;5), B(4;-3;0), C(0;6;-5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -30 + 30 + 30 - 30 = 0 \\ 60 - 30 - 30 = 0 \\ 60 - 30 - 30 = 0 \end{array} \right.$$

Запишем координаты вектора нормали к
плоскости

$$\vec{n} \{15; 10; 6\}$$

Составить уравнение плоскости: A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C

(3;-2;-1)
 $ax + by + cz + d = 0$

$$\begin{cases} -a + 3b - 2c + d = 0 \\ 4a - 2b + d = 0 \\ 3a - 2b - c + d = 0 \end{cases}$$

0) система содержит **четыре** неизвестных

1) и 2) позволило получить два уравнения с **тремя** неизвестными (избавились от переменной a)

3) Работаем с полученными уравнениями (избавимся от переменной b), для этого первое уравнение умножим на (-7), а второе на 10 и сложим, получили уравнение с **двумя** неизвестными

5) Подставим (4) в (1) и выразим b через d

6) Подставим (5) во второе уравнение исходной системы и выразим a через d

1) Работаем с первым уравнением системы, умножим на 4 и сложим со вторым (избавимся от переменной a)

2) Работаем с первым уравнением системы, умножим на 3 и сложим с третьим (избавимся от переменной a)

$$10b - \frac{20d}{7} + 5d = 0$$

$$4a - 2b + d = 0$$

$$4a + \frac{3d}{7} + d = 0$$

$$b = -\frac{3d}{14} \quad (5)$$

$$a = -\frac{5d}{14} \quad (6)$$

$$-a + 3b - 2c + d = 0$$

$$-4a + 12b - 8c + 4d = 0$$

$$4a - 2b + d = 0$$

$$10b - 8c + 5d = 0 \quad (1)$$

$$-a + 3b - 2c + d = 0$$

$$-3a + 9b - 6c + 3d = 0$$

$$3a - 2b - c + d = 0$$

$$7b - 7c + 4d = 0 \quad (2)$$

$$-70b + 56c - 35d = 0$$

$$70b - 70c + 40d = 0$$

$$-14c + 5d = 0 \quad (3)$$

4) Выразим c через d

$$c = \frac{5d}{14} \quad (4)$$

7) Подставим (4);(5);(6) в общее уравнение плоскости $ax + by + cz + d = 0$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a = -\frac{5d}{14} \quad b = -\frac{3d}{14} \quad c = \frac{5d}{14}$$

$$\frac{-5d}{14}x + \frac{-3d}{14}y + \frac{5d}{14}z + d = 0$$

Разделим обе части уравнения на d , и умножим на (-14)

$$5x + 3y - 5z - 14 = 0$$

Проверка правильности составленного уравнения плоскости (подставим координаты точек в данное уравнение плоскости)

A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C

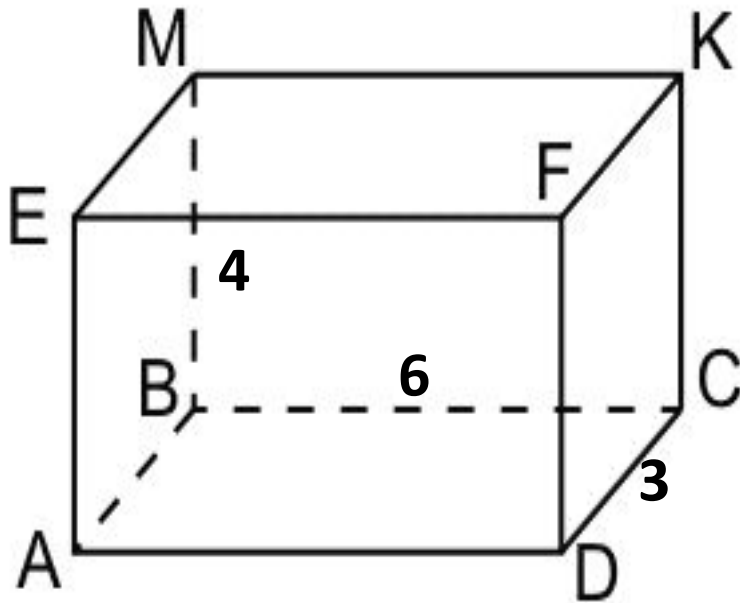
(3;-2;-1)

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 + 9 + 10 - 14 = 0 \\ 20 - 6 - 14 = 0 \\ 15 - 6 + 5 - 14 = 0 \end{array} \right.$$

Уравнение плоскости проходящей через три точки A(-1;3;-2), B(4;-2;0), C(3;-2;-1) имеет вид $5x + 3y - 5z - 14 = 0$

Домашнее задание с урока

Знать уравнение плоскости, вектор нормали к плоскости, выбрать произвольные три точки, заданные в системе координат в пространстве, составить уравнение плоскости (2 задачи), задача ниже



3) Напишите уравнение плоскостей, которые являются гранями прямоугольного параллелепипеда и (ВЕК). Укажите для каждой плоскости вектор нормали. Подумайте как легче ввести в этом случае систему координат (какую вершину выбрать началом координат, подскажет (ВЕК)).