Глава 3

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

§3.1. Случайные величины

Случайной величиной называется величина (X), которая в результате опыта может принимать одно из значений x_1, x_2,…, x_i,…, x_n, образующих полную группу несовместных событий, причем неизвестно заранее, какое именно.

$X = x_i$; $P(X = x_i) = p_i$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Дискретной (не непрерывной) случайной величиной называют случайную величину X, которая принимает отдельные, изолированные возможные значения x_i с определенными вероятностями p_i.

Законом распределения случайной величины X называется совокупность пар чисел (x_i, p_i), где x_i – возможные значения случайной величины, p_i – вероятности, с которыми она принимает эти значения. При этом

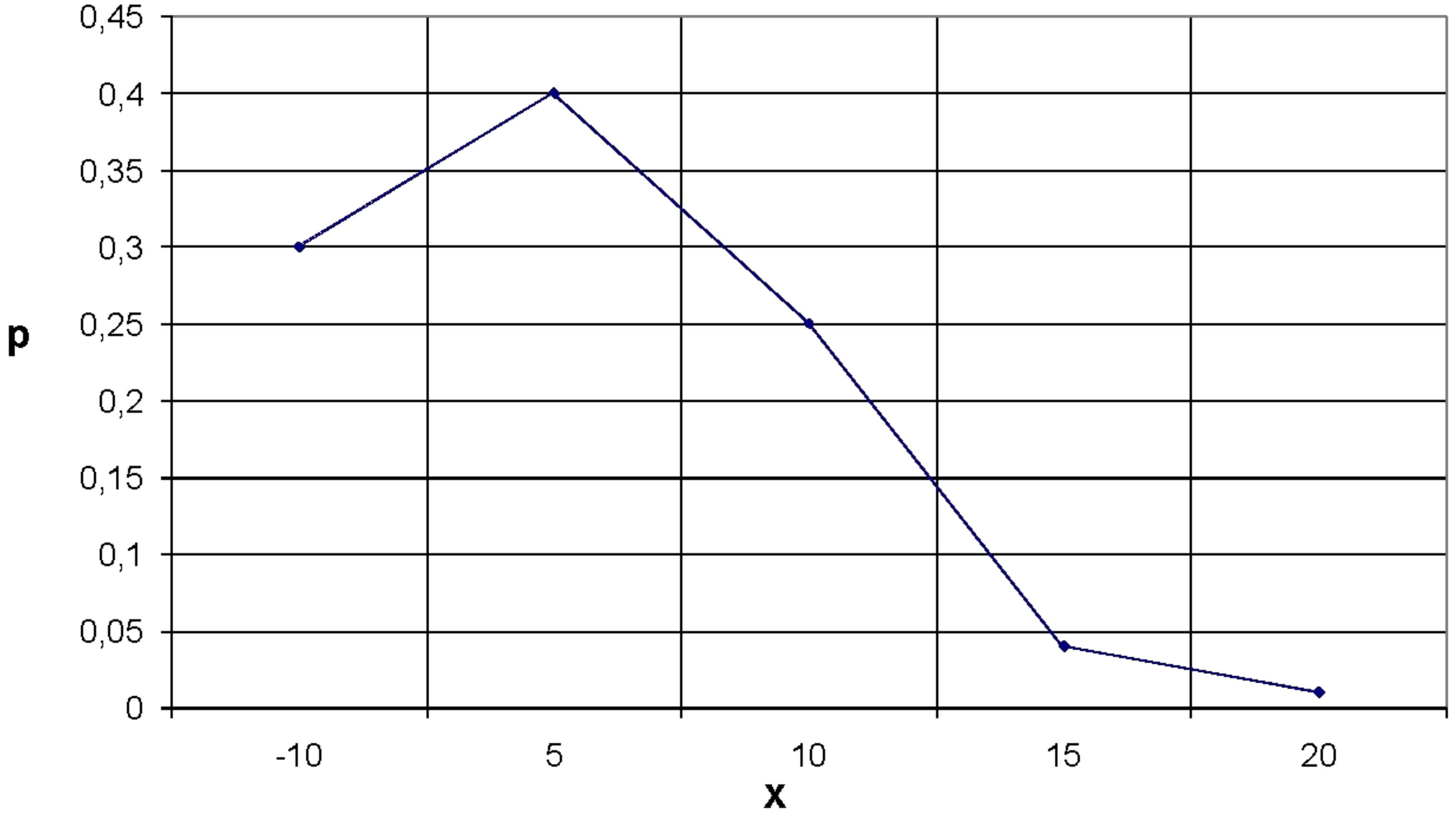
$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Пример:

X	-10	5	10	15	20
p	0,30	0,40	0,25	0,04	0,01

Многоугольник распределения



Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка. Число возможных значений случайной непрерывной величины бесконечно.

Числовая функция $X(\omega)$ называется случайной величиной, если для любого ее возможного значения $x_i \in \Omega = (-\infty < x_i < \infty)$, где множество Ω есть множество элементарных событий ω, определена вероятность $P\{X(\omega) < x\}$ и $P\{-\infty < X(\omega) < \infty\} = 1$.

§3.2. Числовые характеристики случайной внличины

В теории вероятностей числовые характеристики условно можно разделить на две группы:

– характеристики положения;

– характеристики рассеивания и вероятностных взаимодействий.

§3.2.1. Характеристики положения

Математическое ожидание, мода и медиана.

N независимых испытаний; СВ принимает определенные значения $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$.

Причем, x_1 благоприятствовали m_1 случаев, x_2 - m_2 случаев, далее x_n - m_n случаев.

Арифметическое значений СВ X обозначим через M[X]:

$$M[X] = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_i m_i + \ldots + x_n m_n}{N} =$$

$$= x_1 \frac{m_1}{N} + x_2 \frac{m_2}{N} + \ldots \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$ где $N = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Если ряд $\sum_{i=1}^{n} |x_i| p_i < \infty$ сходится абсолютно и $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$, то M[X]= $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

Для дискретной СВ M[X]= $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

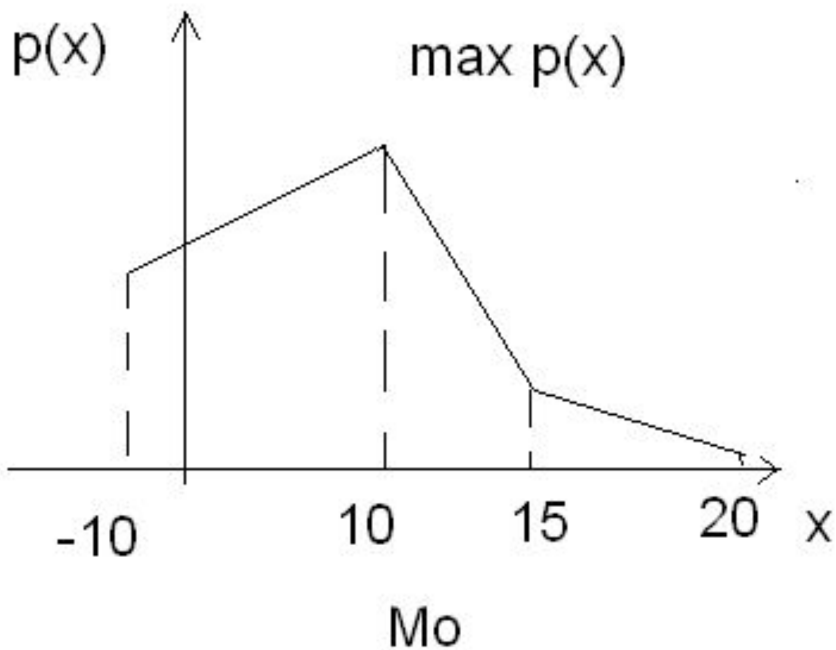
Для непрерывной СВ M[X]= $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} xdF(x)$

Свойства МО СВ:

1. M[C]=C;
2. M[CX]=CM[X];
3. $M[X_1+X_2+\ldots+X_n]= M[X_1]+M[X_2]+\ldots+ M[X_n]$;
4. $M[X_1X_2\ldots X_n]= M[X_1]M[X_2]\ldots M[X_n]$.

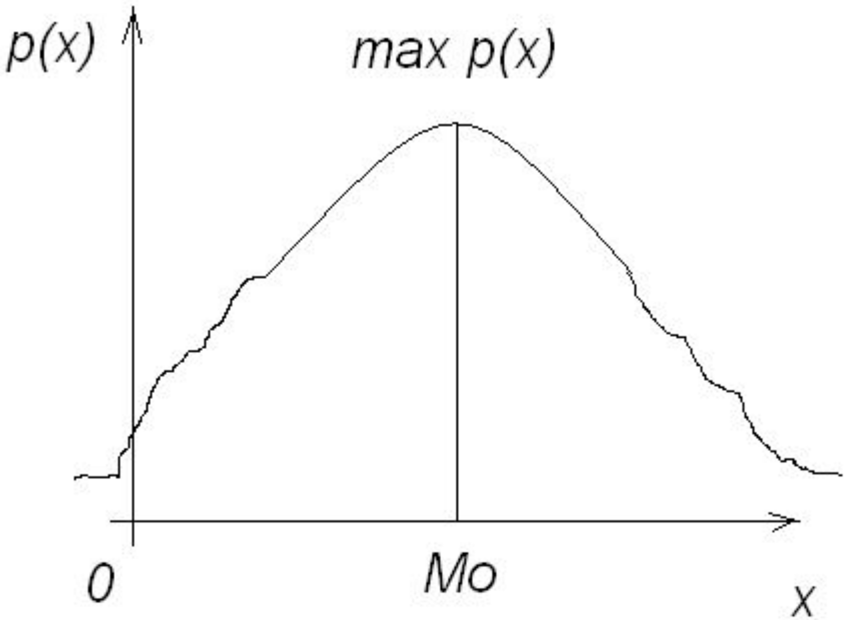
Кроме МО вводят такие характеристики, как мода (Мо) и медиана (Ме).

Модой дискретной



наиболее

значение(рис.1).



ерывной

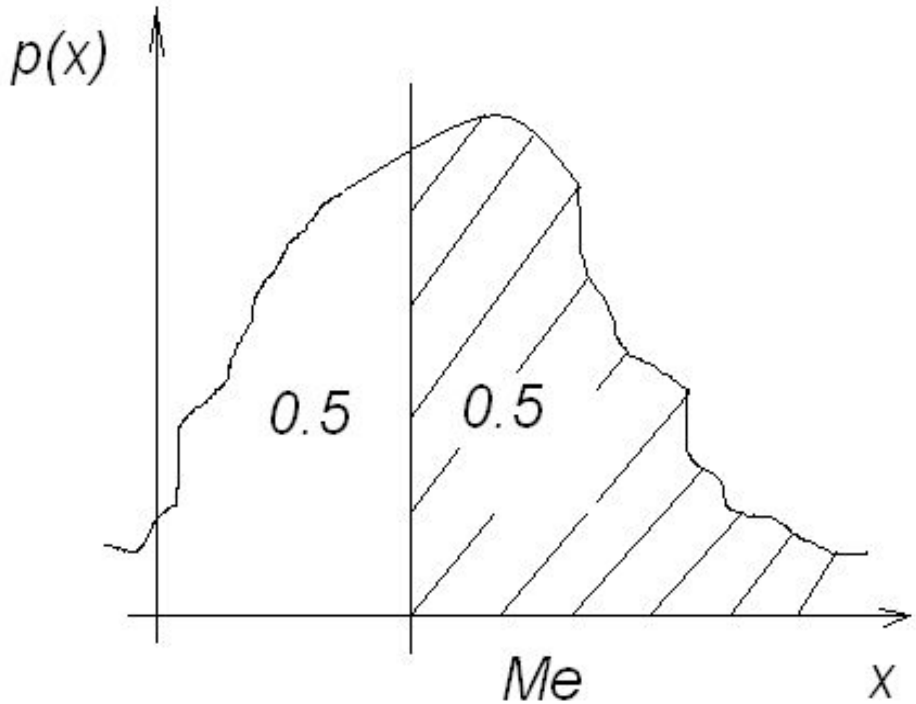
значение,

ром плотность

максимальное

ие (рис.2).

СВ



значение

которого P(X<Me)=

0,5

Симметричное распределение: M[X]=Mo=Me

§3.2.2. Характеристики рассеивания и взаимодействия

Моменты двух видов: начальные и центральные.

Начальным моментом k-го порядка $\alpha_k[X]$ СВ X называется МО k-ой степени от этой СВ, т.е. $\alpha_k[X]=M[X^k]$.

Для дискретной СВ: $\alpha_k[X]=$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i$

Для непрерывной СВ: $\alpha_k[X]=$ $\int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x)$

Центрированной СВ $X°$, соответствующей СВ X, называется отклонение СВ от ее МО $M[X]=m$, т.е. $X°=X-m$.

$M[X°]=0$.

Для дискретной СВ X: $M[X°]=M[X-m]=$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m\sum_{i=1}^{n} p_i = 0$$

Центральным моментом k-го порядка $\mu_k[X]$ СВ X называется МО k-ой степени центрированной СВ $X°$, т.е. $\mu_k[X]= M[(X°)^k]=M[(X-m)^k]$.

Для дискретной СВ X: $\mu_k[X]= \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^k p_i$

Для непрерывной СВ X: $\mu_k[X]=$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k p(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^k dF(x)$$

$\mu_1[X]=M[X°]= M[X\text{-}m]=0.$

$\mu_2[X]= M[(X°)^2]=M[(X\text{-}m)^2]= \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \alpha_2[X] - m^2 = \alpha_2[X] - (\alpha_2[X])^2$$

$\mu_2[X]=D[X]=D_x=\sigma^2$.

Для дискретной СВ:$D[X]= M[(X°)^2]= M[(X-$

$-m)^2]=$ $\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 p_i$

Для непрерывной СВ: $D[X]=$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 p(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^2 dF(x)$$

Среднее квадратическое или стандартное отклонение СВ σ: σ= $\sqrt{D[X]}$

Свойства дисперсии:

$D[X] \geq 0$. При $X=C$: $D[C]=0$.

$D[CX]=C^2 D[X]$.

$D[X_1+X_2+\ldots+X_n]= D[X_1] + D[X_2] + \ldots + D[X_n]$.

$D[C+X]= D[X]$.

$D[X-Y]= D[X]+D[Y]$.

$D[X+Y]= D[X]+D[Y]+2K(x,y)$.

Коэффициент асимметрии А= $\frac{\mu_3[X]}{\sqrt{D^3[X]}} = \frac{\mu_3[X]}{\sigma^3}$

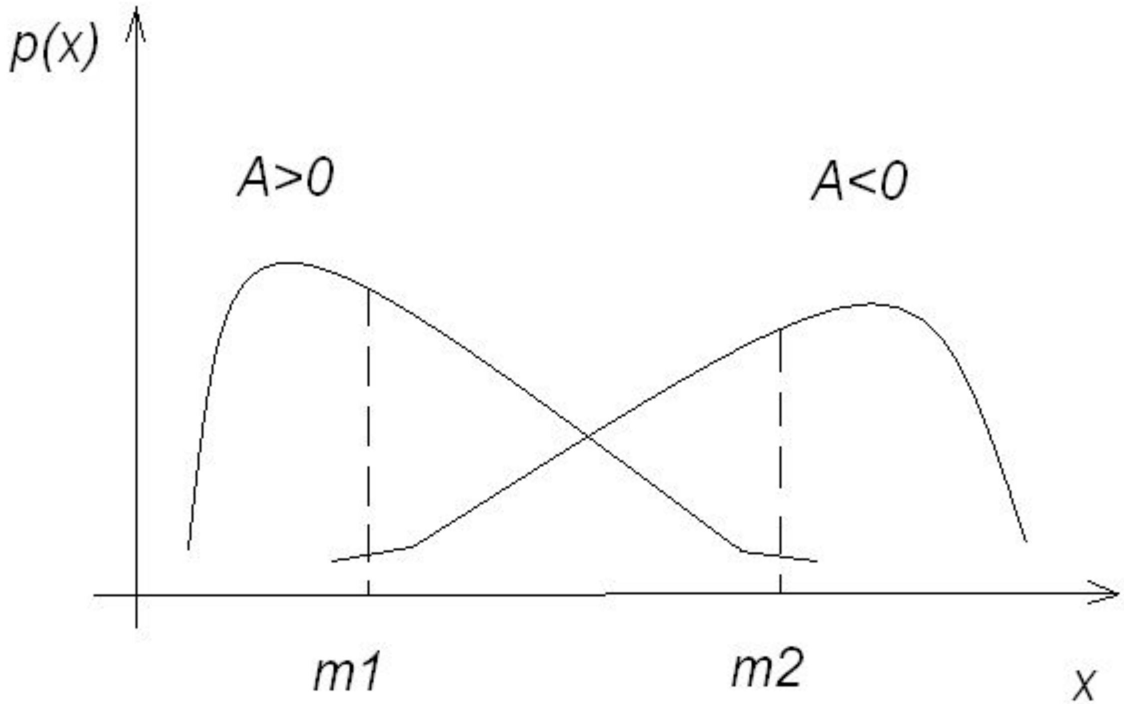


Рис.4

Коэффициент эксцесса: E= $\dfrac{\mu_4[X]}{\sqrt{D^4[X]}} - 3 = \dfrac{\mu_4[X]}{\sigma^4} - 3$

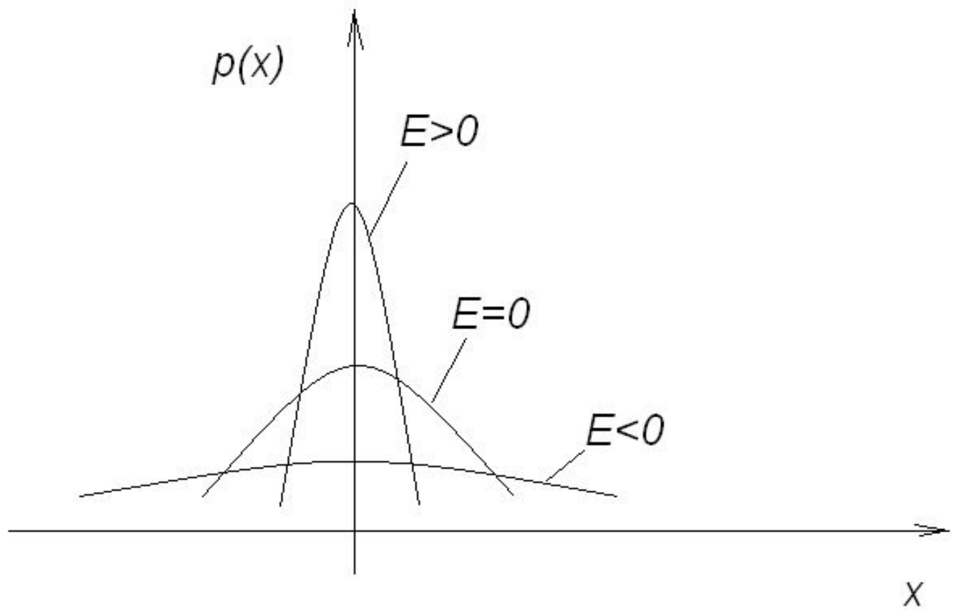


Рис.5

Для нормального закона распределения

E= $\dfrac{\mu_4[X]}{\sqrt{D^4[X]}} - 3 = \dfrac{\mu_4[X]}{\sigma^4} - 3 = 0$