Основы математической обработки информации

Семестр: 1
Лекции: 6
Практические занятия: 10
Контрольная работа: 1
Зачёт

Лекция 3.
Математическое моделирование

§0. «Вопрос науки. Игры разума»

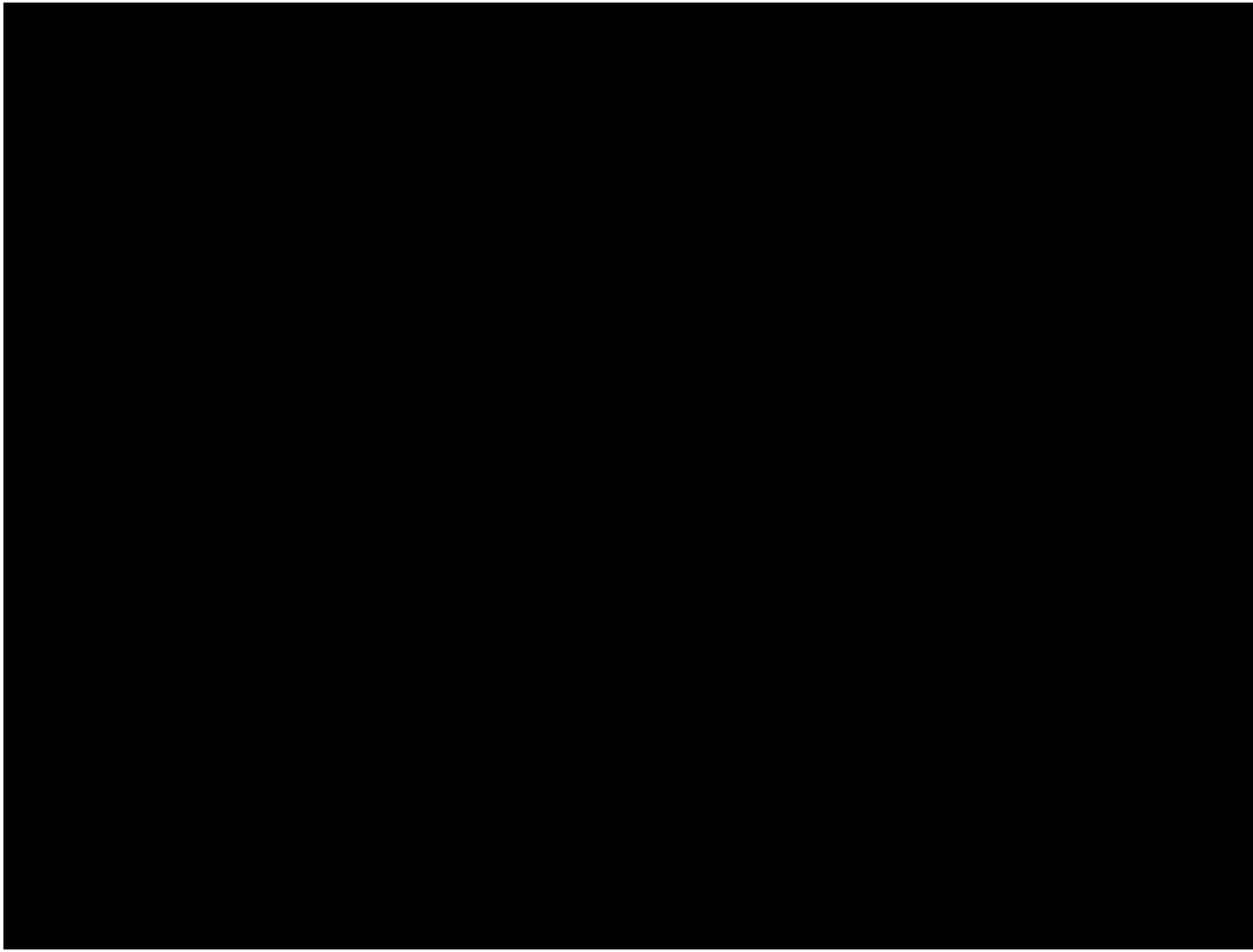
§1. О моделировании

§2. Математическое моделирование

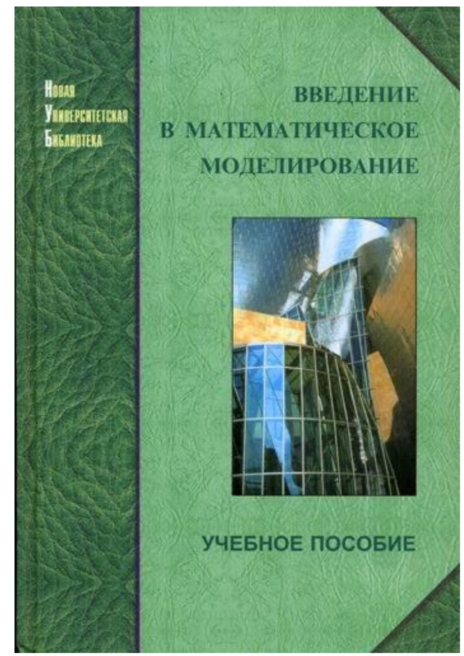
§3. Примеры линейных моделей

§4. Примеры оптимизационных моделей

«Вопрос науки. Игры разума»



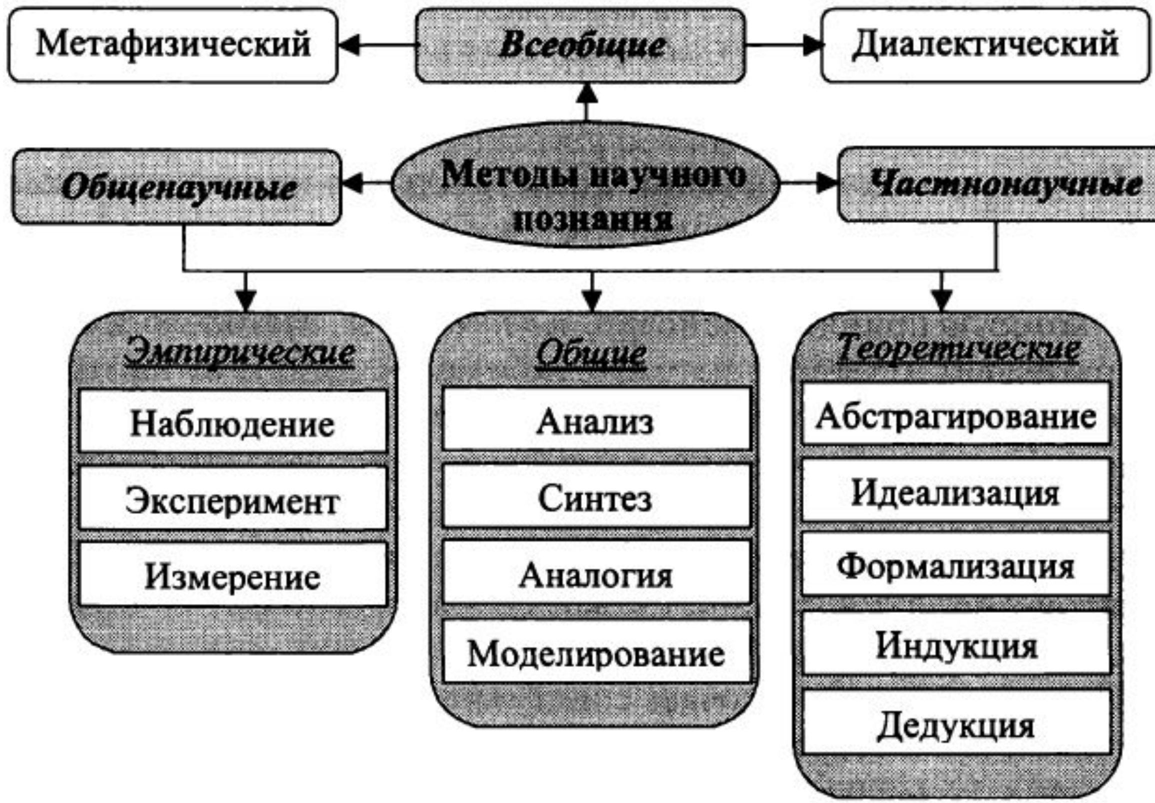
§1. О моделировании



Трусов Пётр Валентинович

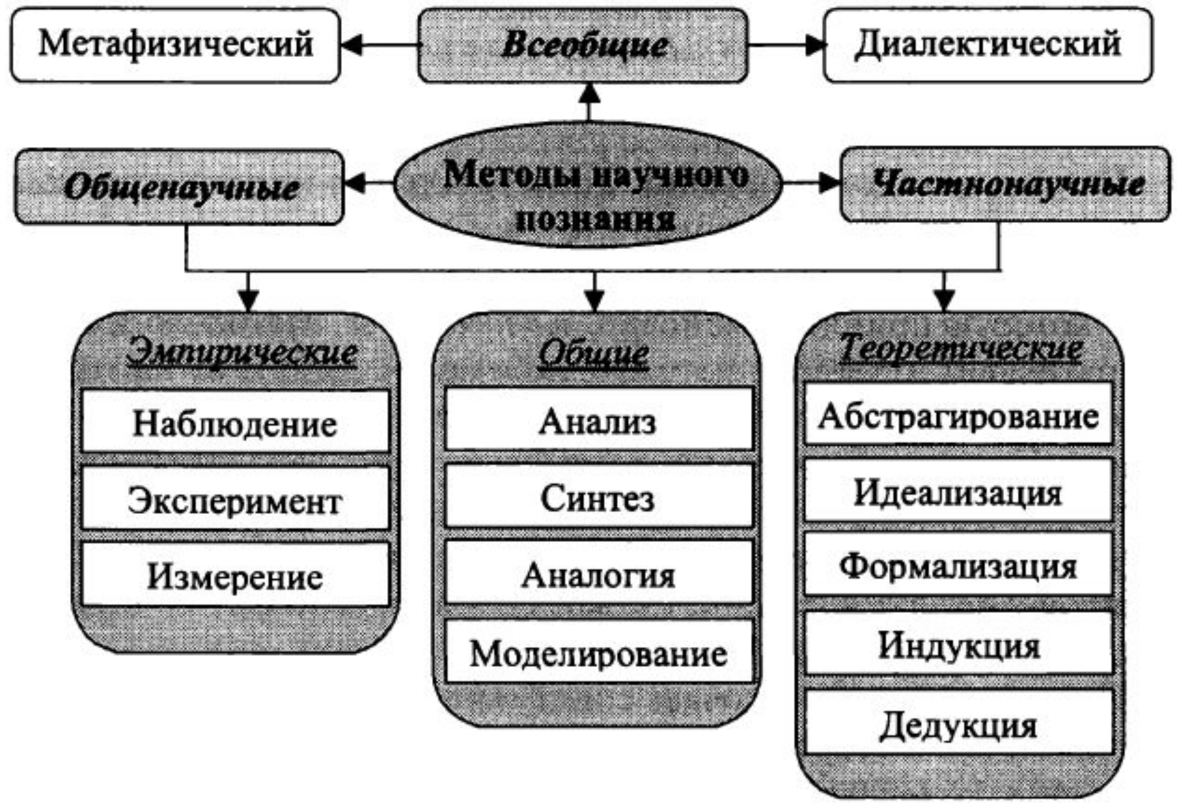
российский учёный-физик, д.ф.-м.н., специалист в области механики сплошных сред. Автор учебных пособий для студентов ВУЗов по механике сплошных сред, теории определяющих соотношений и математическому моделированию.

§1. О моделировании



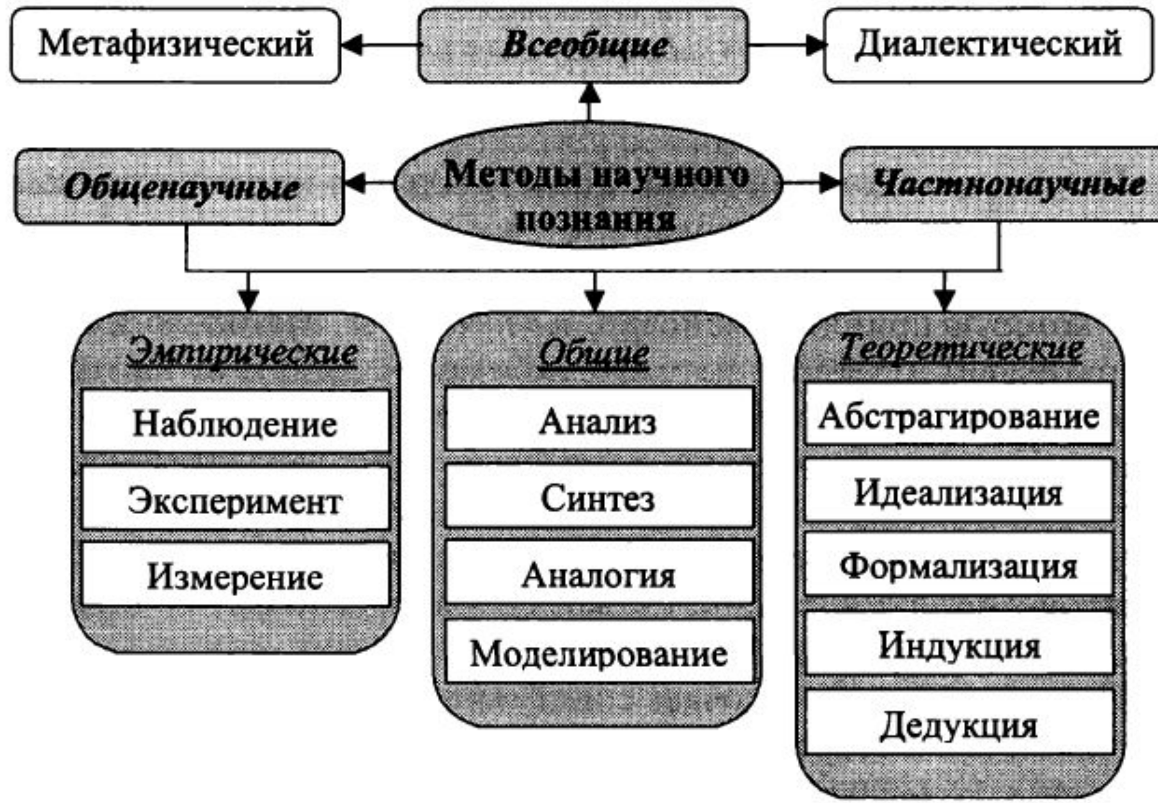
При **метафизическом** подходе объекты рассматриваются изолированно, без учёта их взаимосвязи, как бы в застывшем, неизменном состоянии.

§1. О моделировании



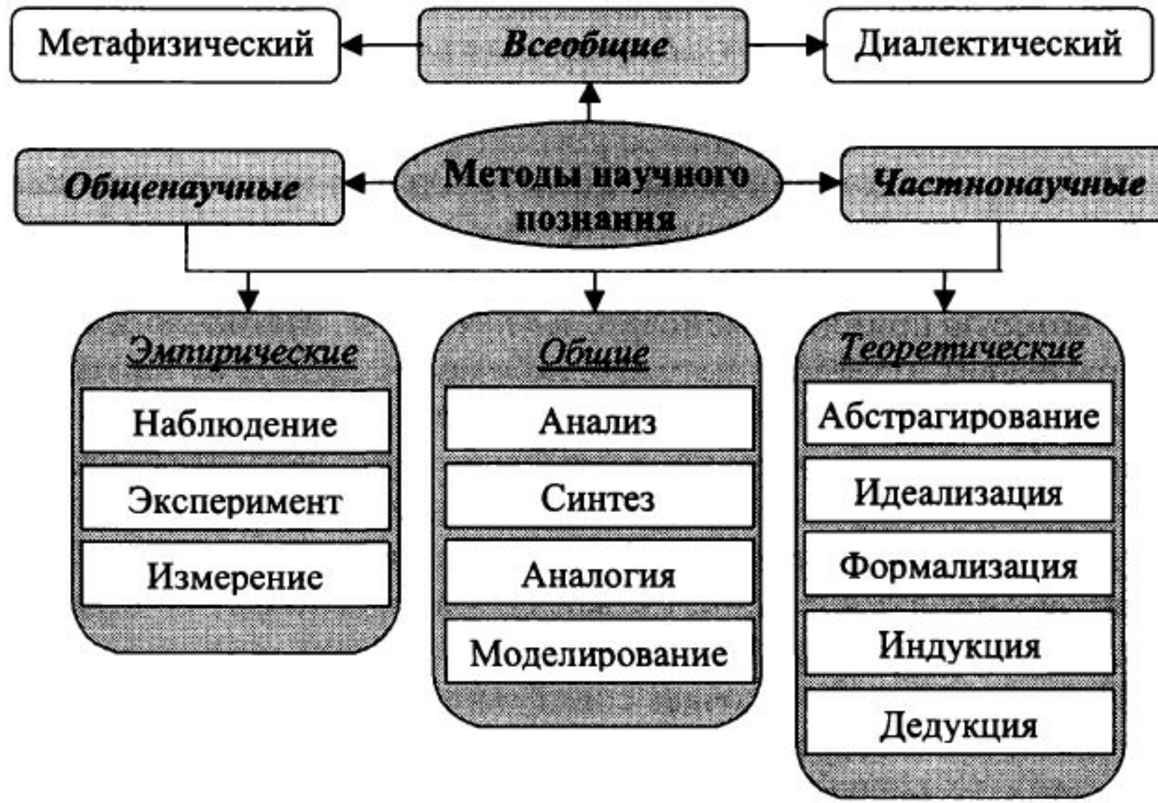
Диалектический подход предполагает изучение объектов с учётом реальных процессов взаимодействия, изменения, развития. С середины 19-го века метафизический метод вытесняется из естествознания диалектическим методом.

§1. О моделировании



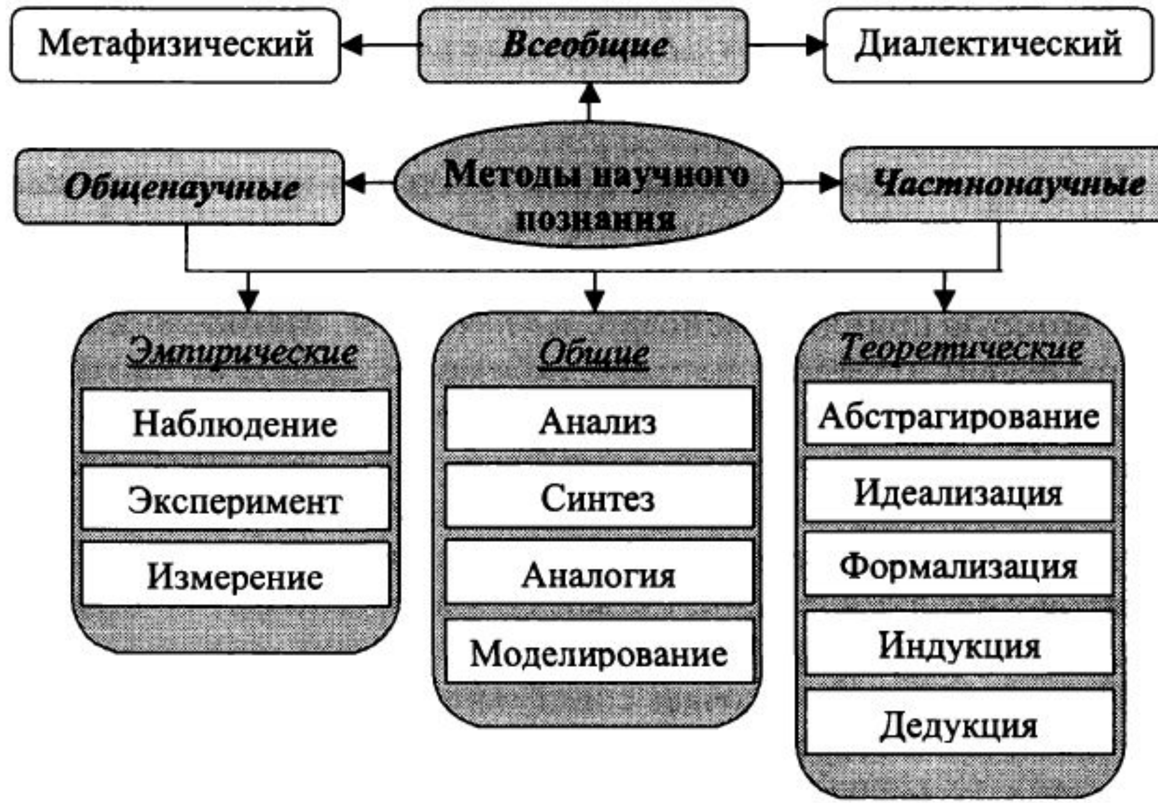
Общенаучные методы имеют междисциплинарный спектр применения. При этом различают два уровня научного познания:

§1. О моделировании



эмпирический уровень познания характеризуется непосредственным исследованием реально существующих, чувственно воспринимаемых объектов; **теоретический** уровень – более высокая ступень научного познания, на котором формируются гипотезы, теории, законы.

§1. О моделировании



Частнонаучные методы используются лишь в рамках какой-либо конкретной науки.

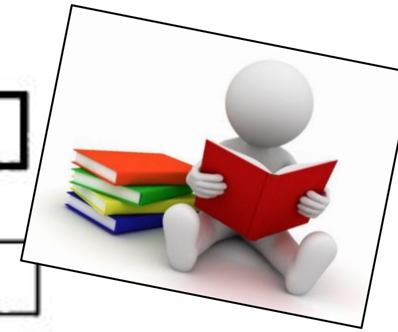
§1. О моделировании

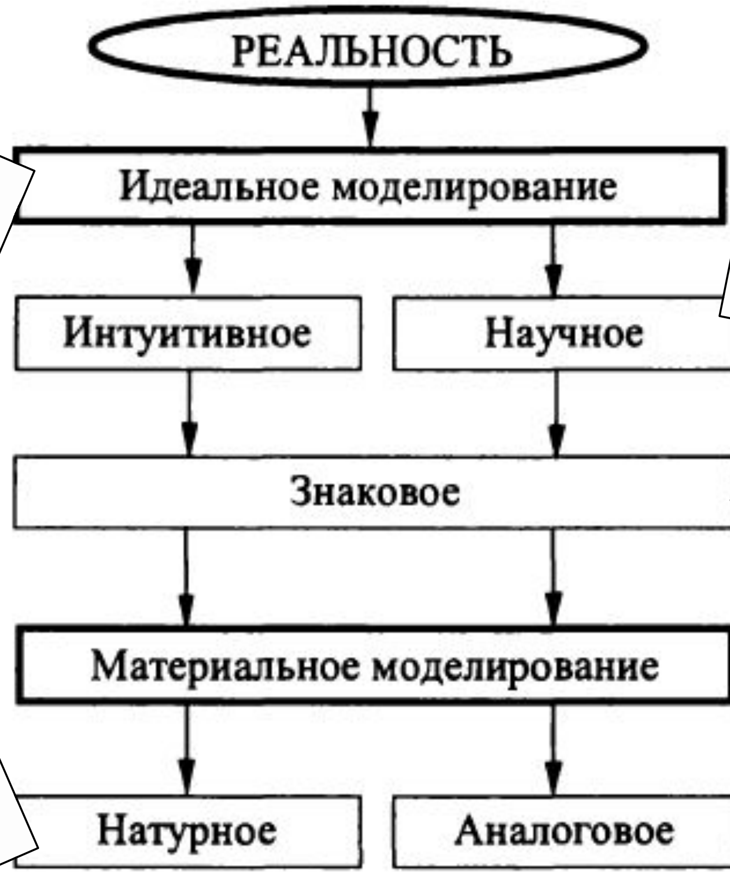
Моделирование – метод познания окружающего мира, который можно отнести к общенаучным методам, применяемым как на эмпирическом, так и теоретическом уровне познания.

Модель (от лат. *modulus* **–** мера, образец, норма) **–** материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект – оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты.

Процесс построения и использования модели называется **моделированием**.

§1. О моделировании





Виды моделирования

§1. О моделировании

Когнитивной моделью называется мысленный образ объекта, возникающий у исследователя при наблюдении за объектом-оригиналом.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Представление модели на естественном языке называется **содержательной** моделью.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

По функциональному признаку модели делят на **описательные, объяснительные** и **прогностические**.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Концептуальной принято называть содержательную модель при формулировке которой используются понятия предметной области, которой принадлежит объект моделирования.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Логика семантическая модель использует при описании логически непротиворечивые утверждения и факты.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Структурно-функциональная модель рассматривает объект как целостную систему, в которой выделены подсистемы и отдельные элементы.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Причинно-следственная модель ориентирована на выявление взаимосвязей между элементами объекта.

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Формальная модель предполагает использование одного или нескольких формальных языков (язык математической теории, алгоритмический язык, универсальный язык моделирования).

Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

В **гуманитарных науках** процесс моделирования заканчивается на этапе создания концептуальной модели. В **естественно-научных дисциплинах** удаётся построить формальную модель; при этом когнитивные, содержательные и формальные модели представляют три взаимосвязанных уровня моделирования.

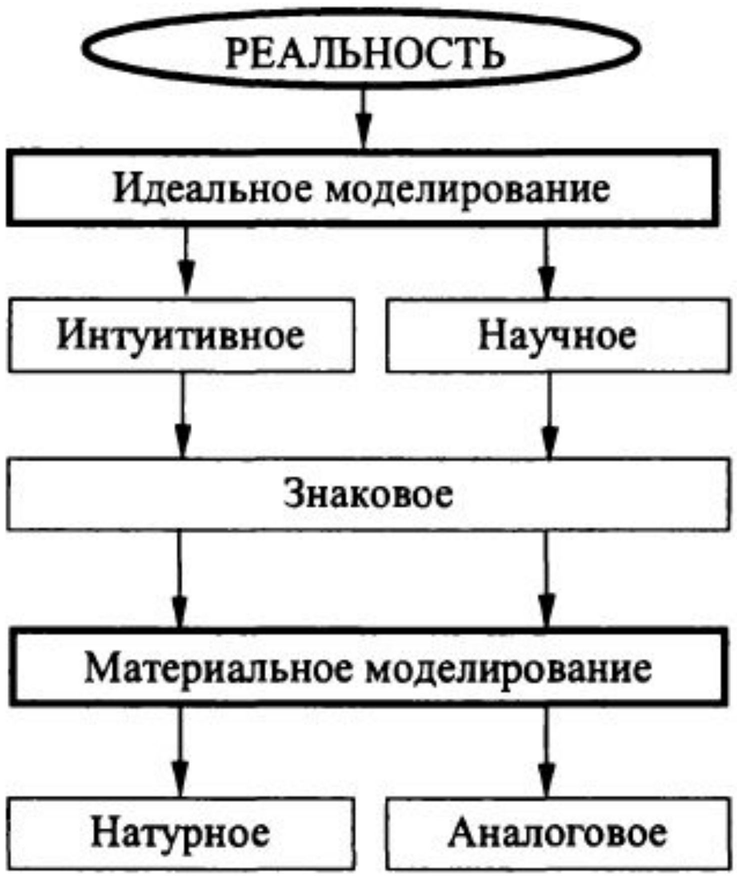
Взаимосвязь моделей

§1. О моделировании

Информационные модели представляют, по существу, автоматизированные справочники; они позволяют по запросу найти информацию в базе данных, однако не могут генерировать новое знание.

Взаимосвязь моделей

§2. Математическое моделирование



Виды моделирования

Математическое моделирование – идеальное, научное, знаковое моделирование, при котором описание объекта осуществляется на языке математики, а исследования модели проводятся с использованием математических методов.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей
в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- **Сложности объекта моделирования**;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Модели объектов- систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними называют **структурными**.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- **Сложности объекта моделирования**;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Структурную модель называют **имитационной**, если каждый элемент имеет конечное число состояний.

§2. Математическое моделирование

$$A: X \to Y, \quad X \in \Omega_X, \quad Y \in \Omega_Y$$

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- **Оператора модели**;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Оператор модели можно понимать и как некую функцию, связывающее входные и выходные параметры; так и некий алгоритм, обеспечивающий нахождение выходных параметров по заданным исходным значениям.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

-
-
-

} независимые (экзогенные)

- } зависимые (эндогенные)

- совокупность входных (управляемых) воздействий на объект (Ω_X);
- совокупность воздействий внешней среды (неуправляемых) (Ω_E);
- совокупность внутренних (собственных) параметров объекта (Ω_I);
- совокупность выходных характеристик (Ω_Y).

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

В зависимости от вида используемых множеств параметров модели могут быть **качественные** и **количественные**, **дискретные** и **непрерывные**, а также **смешанные.**

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Детерминированные модели характеризуются определённостью всех параметров.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- ❑Сложности объекта моделирования;
- ❑Оператора модели;
- ❑**Входных и выходных параметров;**
- ❑Способа исследования модели;
- ❑Цели моделирования.

В **стохастических** моделях значения всех или некоторых параметров определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

В **стохастических** моделях значения всех или некоторых параметров определяются случайными величинами, заданными оценками плотностей вероятности, которые получены в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

При **интервальном** характере параметров известен их диапазон, заданный минимальным и максимальным значениями.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Нечёткий характер параметров означает, что все или отдельные параметры описываются функциями принадлежности соответствующему нечёткому множеству.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Модели среди параметров которых есть координаты пространства делят на **одномерные, двумерные и трёхмерные.**

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Если при исследовании объекта необходим учёт времени, то модель называют **динамической**.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

В случае, когда в каждой фиксированной точке пространства значения параметров модели не зависят от времени, процесс называют **стационарным** (установившимся).

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Если время является одной из существенных независимых переменных модели, то модель называется **нестационарной.**

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- **Входных и выходных параметров;**
- Способа исследования модели;
- Цели моделирования.

Если скорость изменения внешних воздействий на объект моделирования существенно меньше скорости релаксации, то явной зависимостью от времени можно пренебречь и говорят о **квазистатическом** процессе.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- **Способа исследования модели**;
- Цели моделирования.

Если выходные параметры можно получить в виде аналитических выражений, то говорят об **аналитической** модели.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- **Способа исследования модели**;
- Цели моделирования.

Частным случаем аналитических выражений являются **алгебраические**, в которых используются арифметические операции, операции возведения в степень и извлечения корня.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- **Способа исследования модели**;
- Цели моделирования.

Аналитическое решение модели можно представить в элементарных функциях, значения которых иногда находят **приближенно** с помощью рядов.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- **Способа исследования модели**;
- Цели моделирования.

При **численном** подходе совокупность математических соотношений заменяется конечномерным аналогом.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

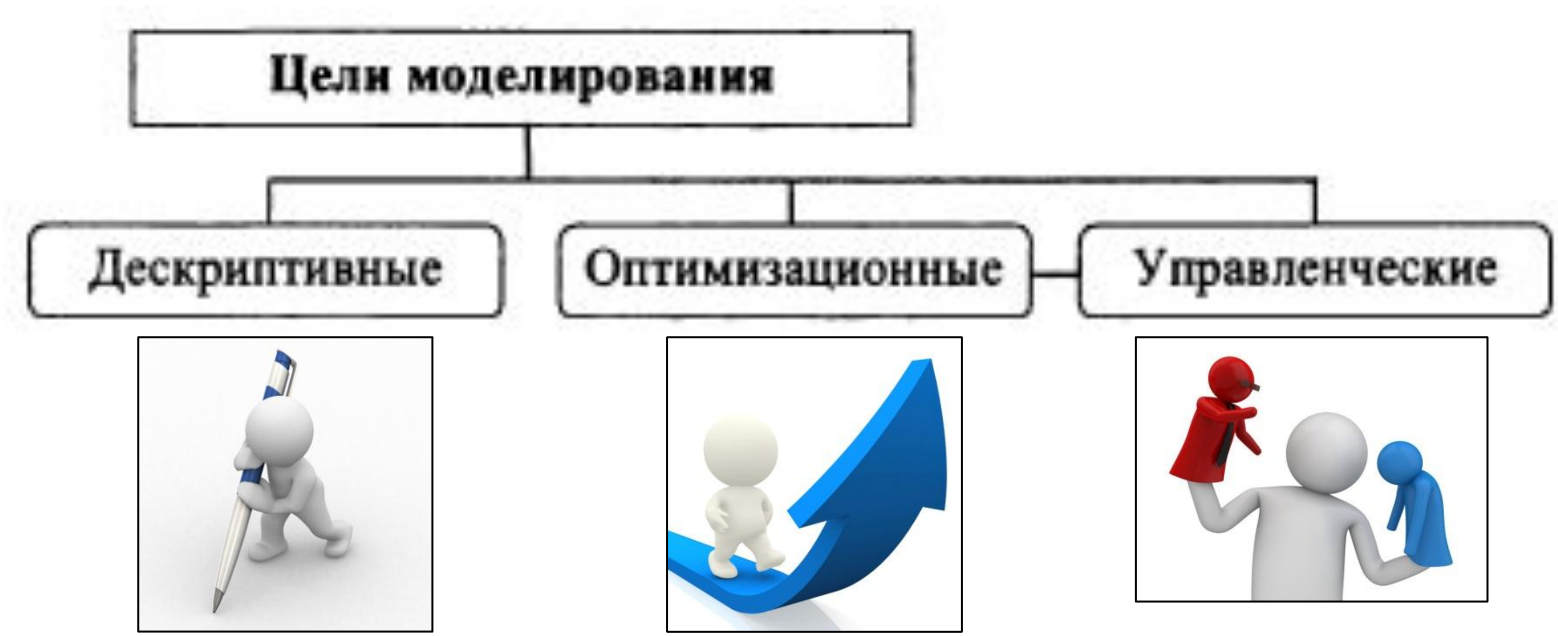
- ❑Сложности объекта моделирования;
- ❑Оператора модели;
- ❑Входных и выходных параметров**;**
- ❑**Способа исследования модели**;
- ❑Цели моделирования.

При **имитационном** моделировании на отдельные элементы разбивается сам объект исследования.

§2. Математическое моделирование

Классификация математических моделей в зависимости от:

- Сложности объекта моделирования;
- Оператора модели;
- Входных и выходных параметров;
- Способа исследования модели;
- **Цели моделирования**.



§2. Математическое моделирование

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Этапы построения математической модели

Пример. *Содержательная постановка задачи о баскетболисте.*

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

Исходные данные:

- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

§2. Математическое моделирование

Этапы построения математической модели

Пример. *Концептуальная постановка задачи о баскетболисте.*

Движение баскетбольного мяча может быть описано в соответствии с законами классической механики Ньютона (рис. 2.2).

Примем следующие гипотезы:

- объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R;
- мяч будем считать материальной точкой массой m, положение которой совпадает с центром масс мяча;
- движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения g и описывается уравнениями классической механики Ньютона;

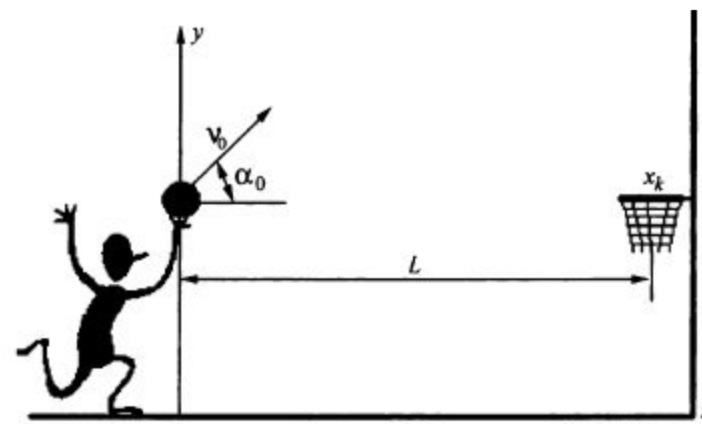


Рис. 2.2. *Схема к постановке задачи о баскетболисте*

- движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
- пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча вокруг центра масс.

§2. Математическое моделирование

Пример. *Математическая постановка задачи о баскетболисте.*

Этапы построения математической модели

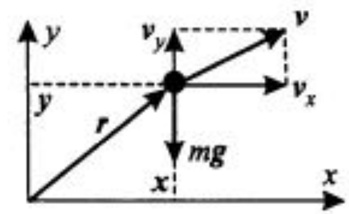


Рис. 2.4. *Расчетная схема*

1. *Векторная форма.*

Найти зависимости векторных параметров от времени – $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{v}(t)$ – из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = m\boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{2.1}$$

при начальных условиях

$$\boldsymbol{r}(0) = 0, \quad \boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0. \tag{2.2}$$

Вычислить параметр Δ по формуле

$$\Delta = r_x(t_k) - r_{xk}, \tag{2.3}$$

где t_k определить из следующих условий:

$$t_k > 0, \quad v_y(t_k) < 0, \quad y(t_k) = y_k. \tag{2.4}$$

Проецируя векторные соотношения (2.1)–(2.4) на оси координат, получим математическую постановку задачи о баскетболисте в координатной форме.

§2. Математическое моделирование

Пример. *Математическая постановка задачи о баскетболисте.*

Этапы построения математической модели

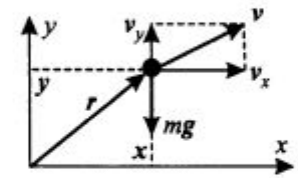


Рис. 2.4. *Расчетная схема*

2. *Координатная форма*.

Найти зависимости $x(t)$, $y(t)$ и $v_x(t)$, $v_y(t)$ из решения системы дифференциальных уравнений:

$$m\frac{dv_x}{dt}=0, \qquad v_x=\frac{dx}{dt},$$
$$m\frac{dv_y}{dt}=-mg, \qquad v_y=\frac{dy}{dt} \tag{2.5}$$

при следующих начальных условиях:

$$x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0,$$
$$v_x(0)=v_0\cos\alpha_0, \quad v_y(0)=v_0\sin\alpha_0. \tag{2.6}$$

Вычислить параметр Δ по формуле

$$\Delta=x(t_k)-x_k, \tag{2.7}$$

где t_k определить из условий

$$t_k>0, \quad v_y(t_k)<0, \quad y(t_k)=y_k. \tag{2.8}$$

§2. Математическое моделирование

Пример. *Математическая постановка задачи о баскетболисте.*

Как можно видеть, с математической точки зрения задача о баскетболисте свелась к задаче Коши для системы ОДУ первого порядка с заданными начальными условиями. Полученная система уравнений является замкнутой, так как число независимых уравнений (четыре дифференциальных и два алгебраических) равно числу искомых параметров задачи (x, y, v_x, v_y, Δ, t_k). Выполним контроль размерностей задачи:

уравнение динамики

$$m\frac{dv}{dt}=\sum F\Rightarrow[\text{кг}]\frac{[\text{м/с}]}{[\text{с}]}=[H]\Rightarrow\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right]=\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2}\right],$$

связь скорости и перемещения

$$\frac{dr}{dt}=v\Rightarrow\frac{[\text{м}]}{[\text{с}]}=\left[\frac{\text{м}}{\text{с}}\right].$$

Существование и единственность решения задачи Коши доказана математиками. Поэтому данную математическую модель можно считать корректной.

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Аналитическое решение задачи о баскетболисте.*

Для получения решения рассмотренной выше задачи о баскетболисте в постановке (2.5)–(2.8) можно использовать как аналитические, так и численные методы. Проинтегрировав соотношения (2.5) по времени, получим

$$x(t)=C_2+C_1t,\quad y(t)=C_4+C_3t-gt^2/2,$$
$$v_x(t)=C_1,\quad v_y(t)=C_3-gt. \tag{2.9}$$

Константы интегрирования найдем из начальных условий (2.6). Тогда решение задачи можно записать следующим образом:

$$x(t)=x_0+v_0t\cos\alpha_0,\quad y(t)=y_0+v_0t\sin\alpha_0-gt^2/2,$$
$$v_x(t)=v_0\cos\alpha_0,\quad v_y(t)=v_0\sin\alpha_0-gt. \tag{2.10}$$

Примем для простоты, что в момент броска мяч находится в начале координат и на одном уровне с корзиной (т.е. $x_0=y_0=y_k=0$). Под дальностью L броска будем понимать расстояние вдоль оси $0x$, которое пролетит мяч от точки броска до пересечения с горизонтальной плоскостью, проходящей через кольцо корзины. Из соотношений (2.10) дальность броска выразится следующим образом:

$$L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha_0. \tag{2.11}$$

С учетом (2.7) точность броска

$$\Delta=L-x_k. \tag{2.12}$$

Например, при броске мяча со штрафной линии можно принять следующие исходные данные: $x_0=y_0=y_k=0$; $x_k=4{,}225$ м; $v_0=6{,}44$м/с; $\alpha_0=45^\circ$. Тогда из (2.11) и (2.12) имеем $L=4{,}225$м; $\Delta=0$ м.

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Спецификация задачи о баскетболисте.*

1. *Название задачи*

Название программы	Basketball
Система программирования	Delphi
Компьютер	IBM PC Pentium
Операционная система	Windows-9x, NT

2. *Описание*

Приводится математическая постановка задачи и описание метода ее решения. (см. разд. 2.3 и 2.4).

3. *Управление режимами работы программы*

Для управления режимами работы программы необходимо использовать интерфейс Windows с использованием меню, диалоговых окон, полей ввода данных, кнопок.

4. *Входные данные*

Радиус и масса мяча, его начальные координаты и скорость, угол бросания, координаты корзины.

5. *Выходные данные*

Траектория центра мяча, расчетная величина дальности и точность броска. Выходные данные представляются в табличном и графическом виде.

6. *Ошибки*

При вводе исходных данных предусмотреть контроль:

- все вводимые значения должны быть положительны;
- угол бросания должен быть в пределах от 5° до 85°;
- начальная скорость мяча должен быть в пределах от 0 до 30 м/с;
- горизонтальная координата центра корзины должна быть больше начальной горизонтальной координаты мяча.

При диагностировании перечисленных ошибок программа должна выдавать соответствующие сообщения, которые могут сопровождаться звуковым сигналом, и предлагать повторить ввод.

7. *Тестовые примеры*

При $x_0 = y_0 = y_k = 0$; $x_k = 4{,}225$; $v_0 = 6{,}44$; $\alpha_0 = 45°$ получаем: $L = 4{,}225$; $\Delta = 0$.

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Проверка адекватности решения задачи о баскетболисте.*

Соотношения (2.10) являются аналитическим решением задачи о баскетболисте и позволяют определить значения координат и скоростей центра масс мяча в любой момент времени. Для координат x и y соотношения (2.10) есть уравнения параболы в параметрической форме. Мяч при броске движется по траектории, близкой к параболе. Поэтому в данном случае можно говорить о качественном совпадении результатов моделирования и экспериментальных данных. Вопрос о количественном совпадении результатов моделирования и эксперимента скорее всего будет решен отрицательно, так как отказ от учета силы сопротивления воздуха является грубым предположением. Для удовлетворительной оценки точности попадания мяча в корзину расхождение результатов моделирования и эксперимента не должно превышать 1–2 см. Поэтому гипотезу об отсутствии силы сопротивления воздуха в концептуальной постановке задачи заменим новой: сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости мяча:

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -k_{\text{сопр}}\mathbf{v},$$

где $k_{\text{сопр}}$ – коэффициент сопротивления, зависящий от свойств среды и формы тела.

Для тела в форме шара коэффициент сопротивления определялся по формуле Стокса:

$$k_{\text{сопр}} = 6\pi\mu R,$$

где μ – динамическая вязкость среды (для воздуха при температуре 20°С и давлении 1 атм $\mu = 0{,}0182$ Н·с/м^2).

В соответствии с принятыми в баскетболе правилами длина окружности мяча может изменяться от 0,749 до 0,780 м, что соответствует изменению радиуса мяча от 0,119 до 0,124 м. Масса мяча должна быть в пределах от 0,567 до 0,650 кг. Примем для определенности радиус мяча $R = 0{,}12$ м, а массу мяча $m = 0{,}6$ кг. Тогда коэффициент сопротивления среды составляет $k_{\text{сопр}} = 0{,}0412$ Н·с/м.

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Проверка адекватности решения задачи о баскетболисте.*

Соотношения (2.5) в математической постановке задачи следует заменить на новые:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -k_{\text{сопр}}v_x, \qquad v_x = \frac{dx}{dt},$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - k_{\text{сопр}}v_y, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Разделяя переменные и интегрируя с учетом начальных условий (2.6), можно получить решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= m_k v_{x0}\left(1-\exp(-t/m_k)\right), \\ y &= m_k\left(m_k g + v_{y0}\right)\left(1-\exp(-t/m_k)\right) - m_k g t, \\ v_x &= v_{x0}\exp(-t/m_k), \\ v_y &= \left(m_k g + v_{y0}\right)\exp(-t/m_k) - m_k g, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $m_k = m/k_{\text{сопр}}$.

Для определения дальности броска следует второе соотношение в (2.13) записать в виде

$$y_k = m_k\left(m_k g + v_0\sin\alpha_0\right)\left(1-\exp(-t/m_k)\right) - m_k g t,$$

где y_k – координата центра корзины. При $y_k = 0$ получим нелинейное уравнение относительно времени

$$\left(m_k g + v_0\sin\alpha_0\right)\left(1-\exp(-t/m_k)\right) = gt. \tag{2.14}$$

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Проверка адекватности решения задачи о баскетболисте.*

Определив время из решения (2.14) и подставив его в первое из соотношений (2.13), можно найти дальность броска. Однако в данном случае нет возможности определить аналитическое решение соотношения (2.14), что не позволяет построить соотношение для дальности L броска, аналогичное (2.11). В этом случае можно только сравнить результаты решения (2.10) и (2.13) для некоторых фиксированных значений v_0 и α_0.

Сила сопротивления воздуха зависит не только от $k_{сопр}$, но и от скорости мяча. Ниже приведены данные сравнения силы сопротивления по отношению к силе тяжести.

v, м/с	5	10	15	20
$F_{сопр}$, Н·с/м^2	0,206	0,412	0,618	0,824
$F_{сопр}/(mg)$, %	3,5	7,0	10,5	14,0

Как можно видеть, сила сопротивления воздуха при скорости движения мяча 20 м/с не превышает 14% величины силы тяжести. Однако даже такое незначительное воздействие на движение мяча может существенно сказаться на точности попадания. Так, при броске мяча под углом 45° с начальной скоростью 6,44 м/с дальность броска с учетом и без учета сил сопротивления будет отличаться на 17 см. При радиусе корзины R_k = 23,3 см разница составляет более половины R_k.

Учет сил сопротивления приводит к изменению результатов в задаче о попадании мяча в корзину. Так, при моделировании без учета сопротивления среды броска мяча со штрафной линии при начальных данных $x_0 = y_0 = y_k = 0$, $x_k = 4{,}225$ м, $\alpha_0 = 45°$ полученный в разд. 2.4 результат для начальной скорости v_0 составил 6,44 м/с. С учетом сопротивления среды начальная скорость мяча должна быть равной 6,575 м/с, т.е. увеличится на 2,1%.

Этапы построения
математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Анализ результатов решения задачи о баскетболисте.*

Соотношения (2.10)–(2.12) представляют аналитическое решение задачи о баскетболисте без учета сил сопротивления среды, а соотношения (2.13)–(2.14) — с учетом этих сил. Достоинством первого решения является его простота, а к недостаткам можно отнести меньшую по сравнению с (2.13), (2.14) точность. Невозможность получения аналитических оценок для дальности броска следует считать недостатками решения (2.13) и (2.14). Это обстоятельство затрудняет аналитический анализ данного решения. Вместе с тем, как следует из приведенных в предыдущем разделе оценок начальной скорости броска, ее изменение для решения (2.13) и (2.14) составляет несколько процентов, что позволяет не отбрасывать решение (2.10)–(2.12) и выполнить его анализ.

Из соотношения (2.11) можно заключить, что заданную величину дальности броска можно определить при двух значениях угла бросания, обеспечивающих *настильную* (при $\alpha_0 < 45^\circ$) и *навесную* (при $\alpha_0 > 45^\circ$) траектории движения мяча. При $\alpha_0 = 45^\circ$ указанные траектории совпадают. Для обеспечения одинаковой точности (при отсутствии сопротивления) для навесной и настильной траекторий начальные скорости мяча должны быть одинаковы.

Для оценки точности попадания мяча в кольцо рассмотрим ситуации, возникающие при подлете мяча к корзине со скоростью v под углом φ к плоскости корзины (рис. 2.5). Отрезок AB длиной $2d$ определяет ширину коридора так называемого «чистого» попадания мяча в корзину.

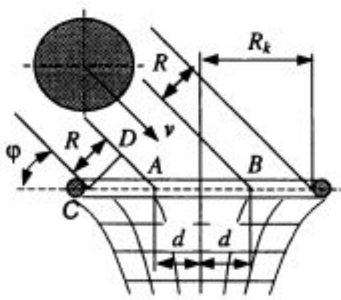


Рис. 2.5. *Схема к оценке точности броска*

Задачу определения d можно свести к чисто геометрической. Для этого достаточно определить длину гипотенузы прямоугольного треугольника ACD и вычесть ее из величины внутреннего радиуса корзины:

$$d = R_k - R/\sin\varphi. \qquad (2.15)$$

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Анализ результатов решения задачи о баскетболисте.*

Величина d получилась зависящей от угла падения φ мяча. При $d = 0$ можно найти минимальное значение φ_{min}, при котором еще возможно «чистое» попадание мяча:

$$\sin\varphi_{min} = R/R_k. \qquad (2.16)$$

Принимая внутренний радиус кольца корзины R_k равным 0,225 м, получаем значение минимального угла $\varphi_{min} = 32{,}2^\circ$.

Если рассматривать броски при условии $y_k = y_0$, то в отсутствии силы сопротивления воздуха угол падения φ мяча равен углу его бросания α_0. В этом случае для обеспечения чистого попадания мяча в корзину угол α_0 должен быть больше $\varphi_{min} = 32{,}2^\circ$.

Проведенный анализ позволяет ввести ограничение на точность броска: $-d \le \Delta \le d$. В предельном случае, учитывая (2.12) и выражая дальность, получим $L = x_k \pm d$. Подставив выражение для дальности (2.11) и определив из полученного соотношения начальную скорость мяча, найдем

$$v_0 = \sqrt{\frac{g}{\sin 2\alpha_0}(x_k \pm d)}. \qquad (2.17)$$

Соотношение (2.17) определяет интервал начальных скоростей, обеспечивающих чистое попадание мяча в корзину при заданном угле бросания.

Этапы построения математической модели

§2. Математическое моделирование

Пример. *Анализ результатов решения задачи о баскетболисте.*

На рис. 2.6,*а* приведена графическая иллюстрация соотношения (2.17). Допустимые начальные скорости мяча образуют С-образную полоску. Черная полоска соответствует чистому попаданию по модели (2.10)–(2.12). Серая полоска соответствует попаданию по модели (2.13). Изменение ширины полосок в зависимости от величины угла бросания приведено на рис. 2.6,*б*. Учет силы сопротивления приво-

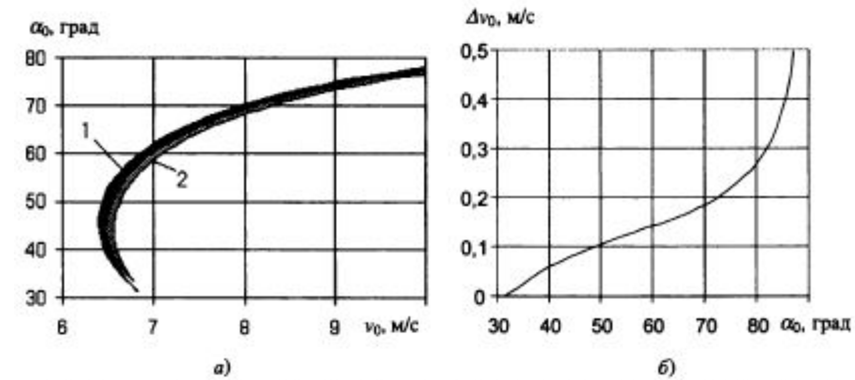


Рис. 2.6. *Соотношения начальной скорости и угла бросания со штрафной линии, обеспечивающие чистое попадание мяча в корзину (1 — без учета сопротивления; 2 — с учетом сопротивления)*

дит к незначительному увеличению начальной скорости мяча. При этом ширина полоски при учете сопротивления воздуха практически не изменяется.

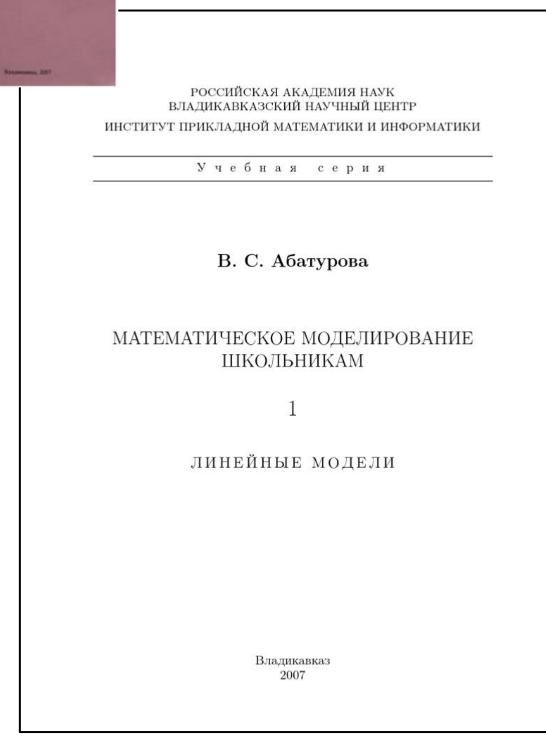
Особенно быстро ширина полоски допустимых скоростей увеличивается при $\alpha_0 > 80°$. Однако в этом случае сильно возрастает также начальная скорость мяча (при $\alpha_0 = 89°$ она должна быть более 34 м/с). Можно предположить, что чем выше начальная скорость броска, тем с большей погрешностью баскетболист может ее сообщить мячу. Поэтому штрафные броски под углом $\alpha_0 > 80°$ надо исключить из рассмотрения.

Этапы построения математической модели

§3. Примеры линейных моделей

Владикавказский центр непрерывного математического образования

Абатурова Вера Сергеевна
к.п.н.; зав. отделом образовательных и информационных технологий Южного математического института Владикавказского научного центра РАН;
директор ВЦНМО



РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Учебная серия

В. С. Абатурова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ШКОЛЬНИКАМ

1

ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Владикавказ
2007

§3. Примеры линейных моделей Система уравнений

Задача Ньютона [19]. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?

a - количество единиц травы, которое было на лугу первоначально;
b - количество единиц травы, которое ежедневно вырастает на лугу;
c - количество единиц травы, которое ежедневно съедает одна корова.

$$\begin{cases} a + 24b = 1680c, \\ a + 60b = 1800c, \\ a + 96b = 96xc. \end{cases}$$

Ответ: 20 коров.

§3. Примеры линейных моделей Система уравнений

Задача Ньютона [19]. Трава на лугу растет одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы ее за 24 дня, а 30 коров за 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву за 96 дней?

a - количество единиц травы, которое было на лугу первоначально;
b - количество единиц травы, которое ежедневно вырастает на лугу;
c - количество единиц травы, которое ежедневно съедает одна корова.

$$\begin{cases} a + 24b = 1680c, \\ a + 60b = 1800c, \\ a + 96b = 96xc. \end{cases}$$

Ответ: 20 коров.

1. Выбор переменных.
2. Запись ограничений на переменные.
3. Формулировка требований задачи на языке математики (с помощью переменных).
4. Решение математической задачи.
5. Интерпретация результатов. Запись ответа.

§3. Примеры линейных моделей
Система неравенств

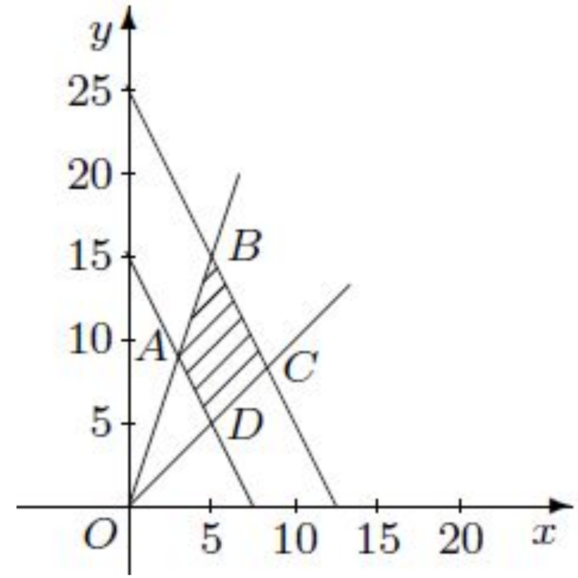
Задача экономной хозяйки. При консервировании компотов из яблок и слив хозяйка пользуется следующим рецептом: вес яблок в баллоне должен быть не меньше веса слив, но и не должен превосходить его более, чем в три раза. Известно, что 1 кг слив стоит 40 руб., а 1 кг яблок — 20 руб. Сколько килограммов слив и яблок можно купить на сумму от 300 до 500 руб., учитывая соотношение веса фруктов в рецепте? Сколько кг слив и яблок нужно купить так, чтобы вес яблок оказался наибольшим из возможных?

x – вес купленных слив (кг);
y – вес купленных яблок (кг).

$$\begin{cases} 40x + 20y \leqslant 500, \\ 40x + 20y \geqslant 300, \\ x \leqslant y \leqslant 3x, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

§3. Примеры линейных моделей
Система неравенств

x – вес купленных слив (кг);
y – вес купленных яблок (кг).



$$\begin{cases} 40x + 20y \leqslant 500, \\ 40x + 20y \geqslant 300, \\ x \leqslant y \leqslant 3x, \\ x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача имеет множество решений. Например, решениями будут пары: $x = 7$, $y = 10$ и $x = 6$, $y = 9$, т. е. можно купить 7 кг яблок и 10 кг слив, или 6 кг яблок и 9 кг слив. Ответом на второй вопрос задачи является пара $(5; 15)$. т. е. при покупке 5 кг слив и 15 кг яблок вес яблок будет наибольший из возможных.

§4. Примеры оптимизационных моделей
Линейное программирование

Задача «двух картошек» Некоторая фирма специализируется на производстве пищевых полуфабрикатов. Подвергая определенной обработке картофель, она производит три различных продукта: Д — картофельные дольки, К — картофельные кубики и Х — картофельные хлопья. В начале технологического процесса необработанный картофель сортируется по размеру и качеству, затем распределяется по различным поточным линиям. Фирма может закупать картофель у двух различных поставщиков А и Б. При этом объемы продуктов Д, К и Х, которые можно получить из одной тонны картофеля первого поставщика, отличаются от объемов продуктов Д, К и Х, получаемых из того же количества картофеля второго поставщика. Соответствующие показатели приведены в таблице [1]

§4. Примеры оптимизационных моделей Линейное программирование

Таблица 1. Задача «двух картошек»

Продукт	Поставщик		Ограничение на объем выпускаемой продукции
	А	Б	
Д	0,2	0,3	1,8
К	0,2	0,1	1,2
Х	0,3	0,3	2,4
Прибыль	5	6	Максимизировать
Количество картофеля	x_1	x_2	—

x1 – вес картофеля, который покупается у поставщика А (т);
x2 – вес картофеля, который покупается у поставщика В (т).

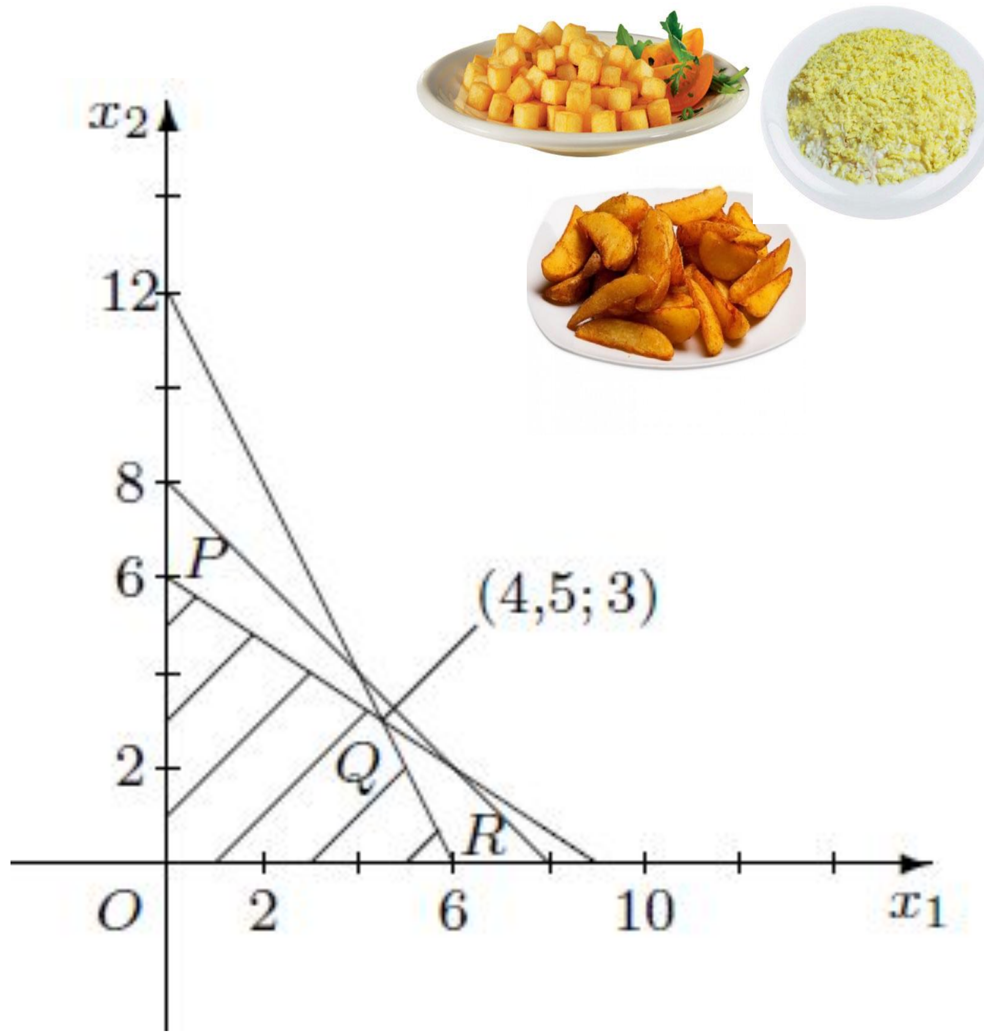
$$Z(x_1, x_2) = 5x_1 + 6x_2 \to \max$$

целевая функция

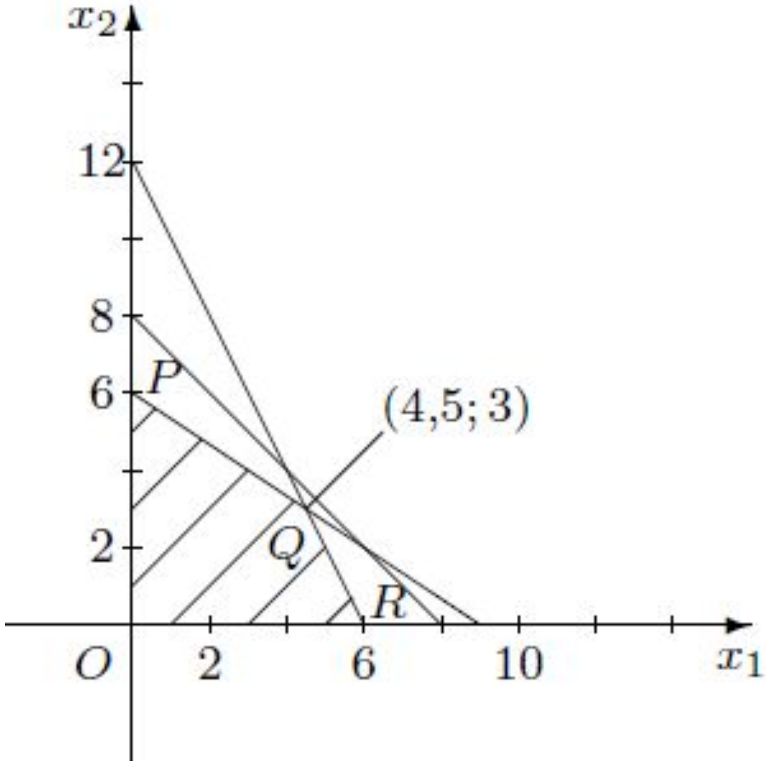
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \to \max, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 1{,}8, \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 1{,}2, \\ 0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 2{,}4, \\ x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

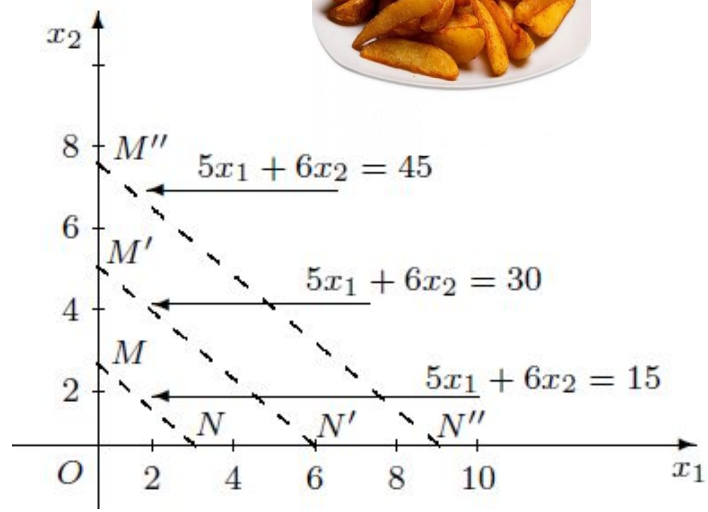
§4. Примеры оптимизационных моделей
Линейное программирование

$$
\begin{cases}
5x_1 + 6x_2 \to \max, \\
0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 1{,}8, \\
0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 1{,}2, \\
0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 2{,}4, \\
x_1 \geqslant 0, \\
x_2 \geqslant 0.
\end{cases}
$$



§4. Примеры оптимизационных моделей
Линейное программирование



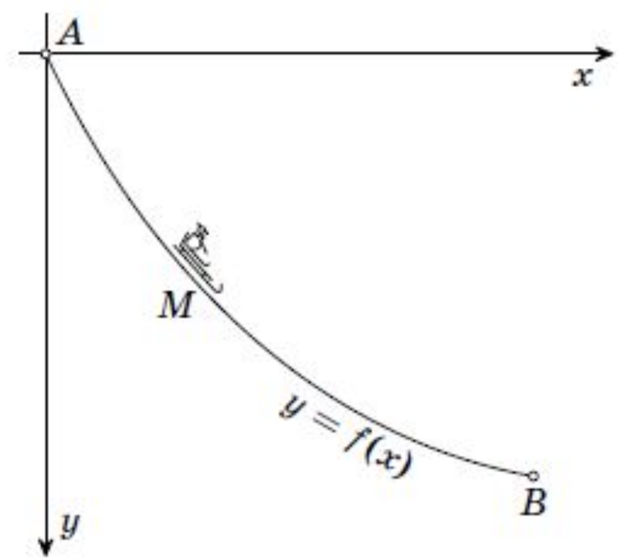


Таким образом, искомый план закупок $(4{,}5;3)$ означает, что максимальная прибыль может быть получена если закупить 4,5 т картофеля у поставщика A и 3 т картофеля у поставщика B. Задача имеет единственное решение.

§4. Примеры оптимизационных моделей Брахистохрона

В вертикальной плоскости даны точки A и B (рис. 29). *Определить путь AMB, спускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело M, начав двигаться из точки A, достигнет точки B в кратчайшее время.*

Брахистохрона – кривая наискорейшего спуска

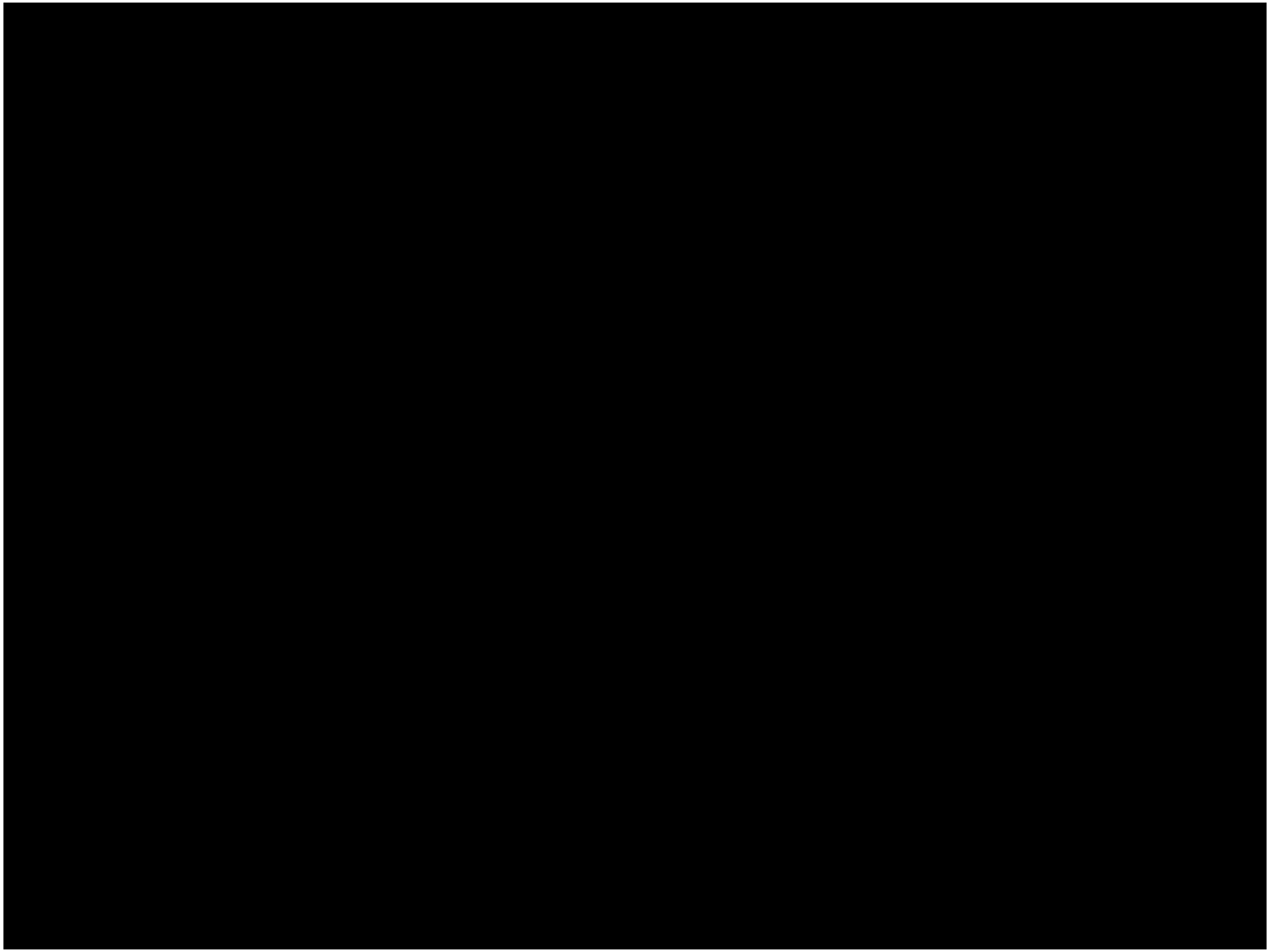


Оптико—механическая аналогия:
в задаче о преломлении света и в данной задаче минимизируется «взвешенная» сумма длин.

$$\frac{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2}}{v_2}$$

$$\frac{\sqrt{y_1^2 + x_1^2}}{\sqrt{2gy_1}} + \frac{\sqrt{(a - x_1)^2 + (b - y_1)^2}}{\sqrt{2gb}}.$$

§4. Примеры оптимизационных моделей
Циклоида



Основы математической обработки информации

Продолжение следует…