Методы экспертного оценивания в принятии решений

Методы экспертного оценивания

- это методы организации работы с экспертами и обработки их мнений, выраженных в количественной или качественной форме с целью подготовки информации для принятия решений ЛПР.

Этапы экспертного опроса

- 1. Формулировка цели экспертного опроса.
- 2. Подбор основного состава экспертной группы.
- 3. Разработка сценария проведения сбора и анализа экспертных оценок.
- 4. Организация и проведение сбора экспертной информации .
- 5. Анализ и обработка экспертной информации.
- 6. Интерпретация полученных результатов для ЛПР.

Метод парного сравнения

Был разработан психофизиологом Л. Терстоуном в 1927г.

Согласно этому методу, респонденту предъявляют два объекта и просят выбрать наиболее из них предпочтительный в соответствии с его собственными критериями.

При таком способе сравнения объектов удается получить наиболее точное отражение субъективных предпочтений, поскольку на выбор здесь налагается гораздо меньше ограничений, чем при других видах экспертного оценивания.

Матрица парных сравнений и ее элементы

Матрица парных сравнений

Объекты	A_1	A_2	. . . . .	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	. . . . .	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	. . . . .	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	. . . . .	⋮
A_n	a_{n1}	a_{n2}	. . . . .	a_{nn}

В соответствии с этой формулой на пересечении i-й строки и j-го столбца должен стоять 0, если объект с номером i, по мнению эксперта, менее значим, чем объект с номером j; должна стоять 1, если объекты равнозначны, и 2, если i-й объект превосходит j-й. Полностью заполненная таблица в этом случае представляет собой квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой удовлетворяют соотношению $a_{ij} + a_{ji} = 2$.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & A_i \prec A_j \\ 1, & A_i \sim A_j \\ 2, & A_i \succ A_j \end{cases}.$$

Альтернативный способ заполнения матрицы парных сравнений

В некоторых случаях, когда эксперт имеет возможность более дифференцированно оценивать сравниваемые объекты, для заполнения матрицы можно использовать следующее правило:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_{ij}, & \mathrm{A}_i \prec \mathrm{A}_j \\ 1, & \mathrm{A}_i \sim \mathrm{A}_j, \\ 1/x_{ij}, & \mathrm{A}_i \succ \mathrm{A}_j \end{cases}$$

где x_{ij} показывает, во сколько раз объект с номером i, по мнению эксперта, предпочтительнее объекта с номером j. Так заполненная таблица представляет собой квадратную матрицу $\mathbf{A}$, элементы которой удовлетворяют соотношению $a_{ij}a_{ji} = 1$.

Процедура вычисления весовых коэффициентов

Метод вычисления весовых коэффициентов, в соответствии со значениями которых ранжируются объекты, представляет собой итерационную процедуру

$$\mathbf{p}^{t} = \mathbf{A}\mathbf{p}^{t-1},$$

где $\mathbf{p}^{0} = (1,\ 1, \ldots, 1)'$.

Чтобы избежать в процессе итерирования получения чрезвычайно больших весовых значений, компоненты вектора $\mathbf{p}^{t}$ на каждом шаге нормируются путем деления на сумму

$$\lambda^{t} = \sum_{i} p_i^t = \sum_{i}\sum_{j} a_{ij} p_j^{t-1}.$$

С учетом нормирующего множителя процедура вычисления весовых коэффициентов записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}^{t} = \frac{1}{\lambda^t}\mathbf{A}\mathbf{p}^{t-1}.$$

Ее применение приводит к получению весовых коэффициентов p_i в виде относительных величин, так как $\sum_{i} p_i^t = 1$.

Вычислительный процесс продолжается до момента, когда весовые коэффициенты, полученные на двух соседних итерациях, будут незначительно отличаться друг от друга, т.е.

$$\max_i \left| p_i^t - p_i^{t-1} \right| < \varepsilon,$$

где ε – достаточно малое положительное число, задающее точность расчетов.

Свойства матрицы парных сравнений

Матрица парных сравнений неотрицательна ($a_{ij} \geq 0$ для любых i, j) и неразложима, т.е. среди номеров строк и столбцов нельзя выделить такие подмножества I и J, что $a_{ij} = 0$ для всех $i \in \mathrm{I}$ и $j \in \mathrm{J}$. Другими словами неразложимость матрицы $\mathbf{A}$ означает, что любыми перестановками строк и столбцов нельзя ее привести к виду

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{A}_{11}$ и $\mathbf{A}_{22}$ – квадратные подматрицы.

В соответствии с широко известной теоремой Фробениуса – Перрона у таких матриц максимальное собственное значение является действительным положительным числом λ, которому отвечает собственный вектор $\mathbf{p}$ с положительными компонентами. Причем, и собственное число, и собственный вектор получаются в виде предельных значений

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \lambda^t, \qquad \mathbf{p} = \lim_{t \to \infty} \mathbf{p}^t,$$

представляя, по сути, результат применения итерационной процедуры.

Содержательная интерпретация итерационной процедуры

Пусть требуется оценить степень значимости пяти объектов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. В результате опроса одного из экспертов была получена следующая матрица парных сравнений

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последовательность итераций без учета нормирующего множителя выглядит следующим образом:

$$\mathbf{p}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^2 = \begin{pmatrix} 33 \\ 21 \\ 18 \\ 29 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^3 = \begin{pmatrix} 147 \\ 93 \\ 94 \\ 137 \\ 94 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}^4 = \begin{pmatrix} 709 \\ 469 \\ 462 \\ 617 \\ 462 \end{pmatrix}, \ \ldots$$

Содержательная интерпретация итерационной процедуры

Итерированная значимость первого порядка $\mathbf{p}^1$ (так будем называть промежуточные результаты итерационного процесса) представляет собой сумму «очков», набранных каждым объектом в результате экспертного сравнения. Расчеты показали, что одинаковое количество очков набрали A_2, A_4 и A_3, A_5. Если предпочтение устанавливать по итерированной значимости первого порядка, то эти пары объектов следует считать одинаково значимыми. Однако, как показывают дальнейшие расчеты, это не так.

При подсчете итерированной значимости второго порядка каждому объекту засчитываются не только собственные «очки», но и те, причем удвоенные, которые набрали проигравшие ему сравнение. Поэтому очень важно, в сравнении с какими «противниками» (сильными или слабыми) были заработаны «очки». Эти рассуждения хорошо иллюстрируют следующие расчеты:

$$p_2^2 = 0 \cdot 7 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 21;$$

$$p_4^2 = 2 \cdot 7 + 2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 4 = 29,$$

из которых становится понятным механизм формирования итерированных предпочтений, обеспечивший превосходство 4-го объекта над 2-ым.

Компетентность экспертов

Предположение о том, что «компетентность экспертов, принимавших участие в экспертизе, одинакова», в подавляющей большинстве случаев следует признать несостоятельным.

Нетрудно указать и причины несостоятельности:

- Во-первых, сформировать однородную группу экспертов практически невозможно.
- Во-вторых, однородная группа совсем необязательно обеспечивает высокую объективность результатов экспертизы. Скорее наоборот, результаты опроса такой группы могут оказаться смещенными, хотя и согласованными.

Поэтому рациональный взгляд на эту проблему подсказывает решение, суть которого в том, чтобы при построении групповой оценки не стремиться к созданию однородной группы, а предусмотреть возможность учитывать компетентность каждого эксперта. В связи с этим возникает вопрос о процедуре определения весовых коэффициентов, характеризующих компетентность экспертов.

Результаты экспертного опроса в общем виде

Пусть опрос группы из m экспертов позволил получить оценки значимости n объектов. Результаты опроса представлены в виде таблицы, в каждой строке которой, как нетрудно понять, стоят оценки, полученные соответствующим объектом, а в столбце – оценки, поставленные соответствующим экспертом.

Таблица

Результаты опроса группы экспертов

Объекты	*Эксперты*			
	$Э_1$	$Э_2$	. . . . .	$Э_m$
A_1	p_{11}	p_{12}	. . . . .	p_{1m}
A_2	p_{21}	p_{22}	. . . . .	p_{2m}
$\vdots$		$\vdots$	. . . . .	$\vdots$
A_n	p_{n1}	p_{n2}	. . . . .	p_{nm}

Формальная процедура итерационного уточнения групповой оценки и коэффициентов компетентности

Изложение формальной процедуры итерационного уточнения групповой оценки и коэффициентов компетентности начнем с обозначений:

$\mathbf{P}$ – прямоугольная $n \times m$ матрица с элементами p_{ij}, представляющими собой оценки i-го объекта j-м экспертом;

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)'$ – вектор групповой оценки;

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m)'$ – вектор весовых коэффициентов компетентности;

$\mathbf{p}_{i\bullet}$ – i-я строка матрицы $\mathbf{P}$;

$\mathbf{p}_{\bullet j}$ – j-й столбец матрицы $\mathbf{P}$.

В качестве начального приближения весовых коэффициентов компетентности удобно взять вектор

$$\mathbf{v}^0 = (v_1^0, v_2^0, \ldots, v_m^0)' = (1/m, 1/m, \ldots, 1/m)',$$

равенство компонент которого означает, что эксперты не различимы по уровню компетентности. С помощью этого вектора легко определяется групповая оценка

$$\mathbf{p}^1 = v_1\mathbf{p}_{\bullet 1} + v_2\mathbf{p}_{\bullet 2} + \cdots + v_m\mathbf{p}_{\bullet m} = \mathbf{P}\mathbf{v}^0.$$

Формальная процедура итерационного уточнения групповой оценки и коэффициентов компетентности экспертов

Затем полученные значения групповой оценки используются для уточнения коэффициентов компетентности. С этой целью строки матрицы $\mathbf{P}$ умножаются на оценки первой итерации $\mathbf{p}^1$ и суммируются

$$\mathbf{v}^1 = p_{1\bullet}^1 \mathbf{p}_{1\bullet} + p_{2\bullet}^1 \mathbf{p}_{2\bullet} + \cdots + p_{n\bullet}^1 \mathbf{p}_{n\bullet}.$$

Так как коэффициенты компетентности являются нормированными величинами, то и полученный результат необходимо пронормировать, разделив его на сумму

$$\lambda^1 = \sum_{j=1}^{m} v_j^1 .$$

После нормирования расчеты повторяются в той же последовательности, образуя таким образом итерационную процедуру параллельных расчетов. В матричной форме эта процедура записывается следующим образом:

$$\mathbf{p}^t = \mathbf{P}\,\mathbf{v}^{t-1} \qquad (1)$$

$$\mathbf{v}^t = \frac{1}{\lambda^t}[\mathbf{p}^t]'\,\mathbf{P}. \qquad (2)$$

Если в (1) подставить (2) с измененным порядком сомножителей, а в (2) подставить (1), то окончательно итерационный процесс записывается в виде

$$\mathbf{p}^t = \frac{1}{\lambda^t}\mathbf{P}\,\mathbf{P}'\mathbf{p}^{t-1}$$

$$\mathbf{v}^t = \frac{1}{\lambda^t}\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{v}^{t-1}.$$

Формальная процедура итерационного уточнения групповой оценки и коэффициентов компетентности экспертов

Так как столбцы матрицы $\mathbf{P}$ в силу того, что получены с помощью метода парных сравнений, неотрицательны, то и сама матрица неотрицательна и, следовательно, неотрицательны матрицы $\mathbf{P}\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}'\mathbf{P}$. Кроме того, можно показать, что в случае неразложимости $\mathbf{P}$, они тоже неразложимы.

Таким образом, и групповая оценка значимости объектов $\mathbf{p}$, и весовые коэффициенты компетентности экспертов $\mathbf{v}$ могут быть получены как характеристические векторы матриц $\mathbf{P}\mathbf{P}'$ и $\mathbf{P}'\mathbf{P}$, причем эти векторы являются предельными величинами

$$\mathbf{p} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{p}^t, \qquad \mathbf{v} = \lim_{t\to\infty} \mathbf{v}^t.$$

Как и в случае обработки матрицы парных сравнений, расчеты ведутся до достижения заданной точности.

Согласованность мнений экспертов

Групповые экспертные оценки должны отражать согласованное мнение экспертов. Следовательно, перед формированием групповой оценки необходимо выяснить, можно ли для этих целей использовать полученные в результате опроса индивидуальные оценки. Выясняется этот вопрос с помощью рангового коэффициента корреляции и коэффициента конкордации. Эти коэффициенты применимы в тех случаях, когда результаты экспертного опроса представимы в ранговой шкале.

Связанные ранги

Имеют место тогда, когда в ранжируемой совокупности некоторые объекты получили одинаковые оценки.

Дисперсионный коэффициент конкордации

Дисперсионный коэффициент конкордации можно записать в компактном виде следующим образом:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)},$$

где n – число объектов; m – число экспертов;

$$S = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} - \overline{p}\right)^2; \qquad \overline{p} = \frac{(n+1)m}{2}$$ – средний ранг;

p_{ij} – ранг, присвоенный i-му объекту j-м экспертом.

Скорректированный коэффициент конкордации

Если в полученных ранжировках есть связные ранги, то коэффициент конкордации нужно корректировать, так как максимальное значение дисперсии становится меньше, чем в случае отсутствия связных рангов. Скорректированный коэффициент конкордации вычисляется по формуле

$$\mathrm{W} = \frac{12\,\mathrm{S}}{m^2(n^3 - n) - m\sum_{j=1}^{m} \mathrm{T}_j},$$

где T_j – показатель связных рангов в j-й ранжировке, вычисляемый следующим образом:

$$\mathrm{T}_j = \sum_{k=1}^{H_j} (h_k^3 - h_k).$$

В приведенных формулах H_j – число групп равных рангов в j-й ранжировке, h_k – число равных рангов в k-й группе связных рангов в ранжировке, полученной от j-го эксперта.

Дисперсионный коэффициент конкордации

Коэффициент конкордации равен 1 в тех случаях, когда мнения экспертов по всем объектам полностью совпадают, и равен нулю, когда все ранжировки различны. В остальных случаях его значения удовлетворяют неравенству $0 \le W \le 1$, причем, чем ближе это значение к 1, тем теснее связь между ранжировками и надежней групповая оценка.

Проверка значимости коэффициента конкордации

Коэффициент конкордации, вычисляемый по выведенной формуле, является, по сути, оценкой истинного значения и представляет собой случайную величину. Естественно, возникает необходимость в проверке его значимости.

Для небольших значений m и n разработана специальная таблица распределения частот. Эту таблицу можно найти в Приложении.

Если число объектов $n > 7$, то значимость оценки коэффициента конкордации проверяется с помощью критерия χ^2. Доказано, что величина

$$\chi^2 = \mathrm{W}\, m(n-1)$$

имеет χ^2- распределение с $\nu = (n-1)$ степенями свободы.

Если в некоторых ранжировках есть связанные ранги, то для проверки значимости коэффициента конкордации используется статистика

$$\chi^2 = \frac{12\,\mathrm{S}}{mn(n+1) - (n-1)^{-1} \sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{T}_j}.$$

Проверка значимости коэффициента конкордации гарантирует получение статистически надежных результатов.

Энтропийный коэффициент конкордации

Энтропийный коэффициент конкордации определяется через величину энтропии Н с помощью формулы

$$W_э = 1 - \frac{H}{H_{max}},$$

где $H = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \log_2 p_{ij}$;

$$H_{max} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\log_2 \frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{m}\log_2 n = m \cdot \log_2 n$$

В формуле для вычисления энтропии p_{ij} представляет собой оценку вероятности, с которой i-му объекту приписывается j-й ранг. Вычисляется эта вероятность как отношение числа экспертов m_{ij}, приписавших объекту A_i ранг j, к общему числу экспертов

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{m}.$$

Сравнение дисперсионного и энтропийного коэффициентов конкордации

Значения дисперсионного и энтропийного коэффициентов корреляции не совпадают. Причем их значения сближаются по мере увеличения степени согласованности мнений экспертов, т.е. чем ближе к единице, тем меньше различие между ними. Самое большое различие между этими коэффициентами имеет место в случае, когда эксперты разделились на две группы с полностью противоположными точками зрения. По дисперсионному коэффициенту конкордации степень согласованности в этой ситуации будет равна нулю, а по энтропийному – 0,5.

Лекция окончена.

Благодарю за внимание!