Методы многокритериальной оптимизации

I. Методы обобщенного скалярного критерия

$$F(X) = [f_1(X), \dots, f_m(X)]^T \Leftrightarrow \Phi(X) \to \min_{X \in D}$$

1. Линейная свертка:

$$\Phi(F, \mu) = \sum_{i=1}^{m} \mu_i f_i(X) \quad (1)$$

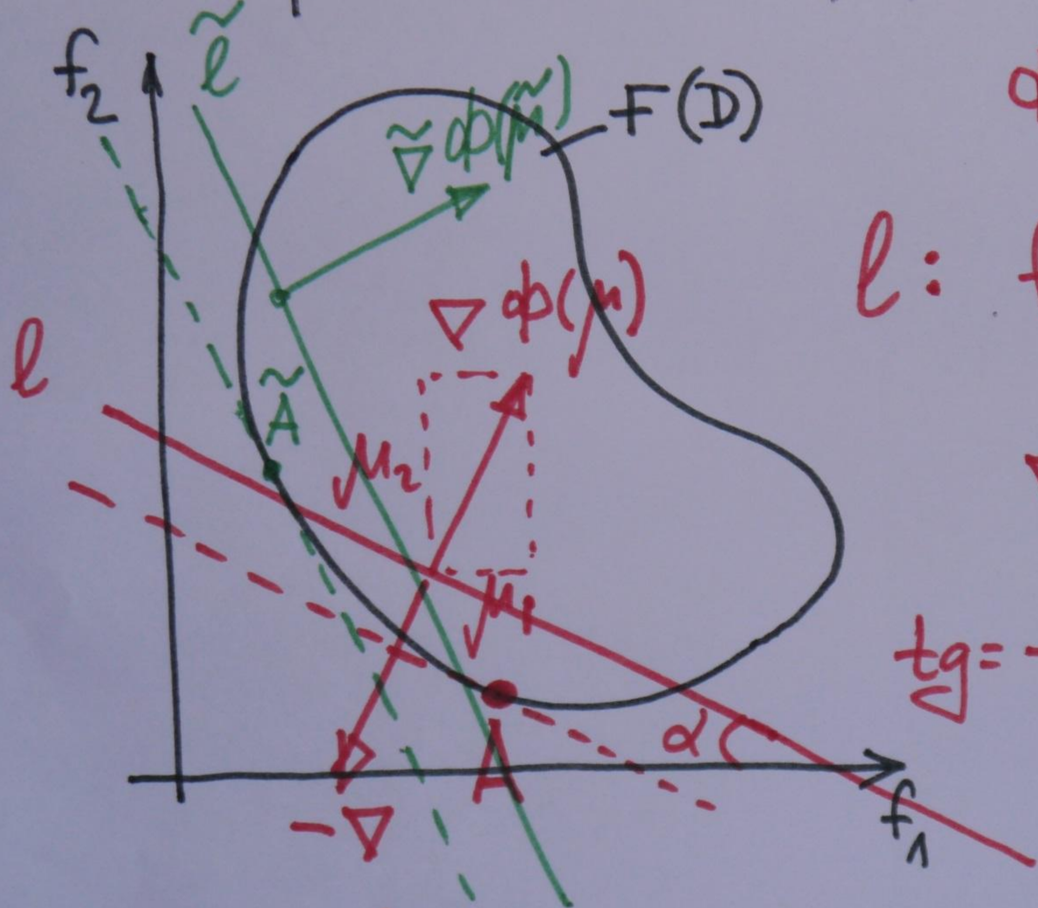
$$\mu = [\mu_1, \dots, \mu_m] \in \bar{M} = \left\{ \mu \in E^m \mid \mu_i \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ \sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1 \right\} \quad (2)$$

μ – вектор весовых коэффициентов.

! Если $f_i(X)$ имеют различный физич. смысл, то необходима **нормализация критериев**: $\hat{f}_i(X) = \dfrac{f_i(X) - f_{min}}{f_{max} - f_{min}}$

$$0 \leq \hat{f}_i(X) \leq 1,\ i = \overline{1,m}$$

Геометрическая интерпретация



$$\Phi(F,\mu)=\mu_1 f_1+\mu_2 f_2 = C$$

$$l:\ f_2 = \frac{C}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} f_1$$

$$\nabla\Phi = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial f_1};\ \frac{\partial\Phi}{\partial f_2}\right]^T = [\mu_1;\mu_2]^T$$

$$tg = -\frac{\mu_1}{\mu_2}$$

т. A - опт. решение задачи

$$\Phi(F(X),\mu)\longrightarrow \min_{X\in D} \iff \Phi(F,\mu)\longrightarrow \min_{F\in F(D)}$$

Пример 1. Решить задачу МО методом линейной свертки

$$f_1(X) = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$f_2(X) = 2x_1 + x_2 \to \max$$
$$f_3(X) = x_1 - 3x_2 \to \max$$

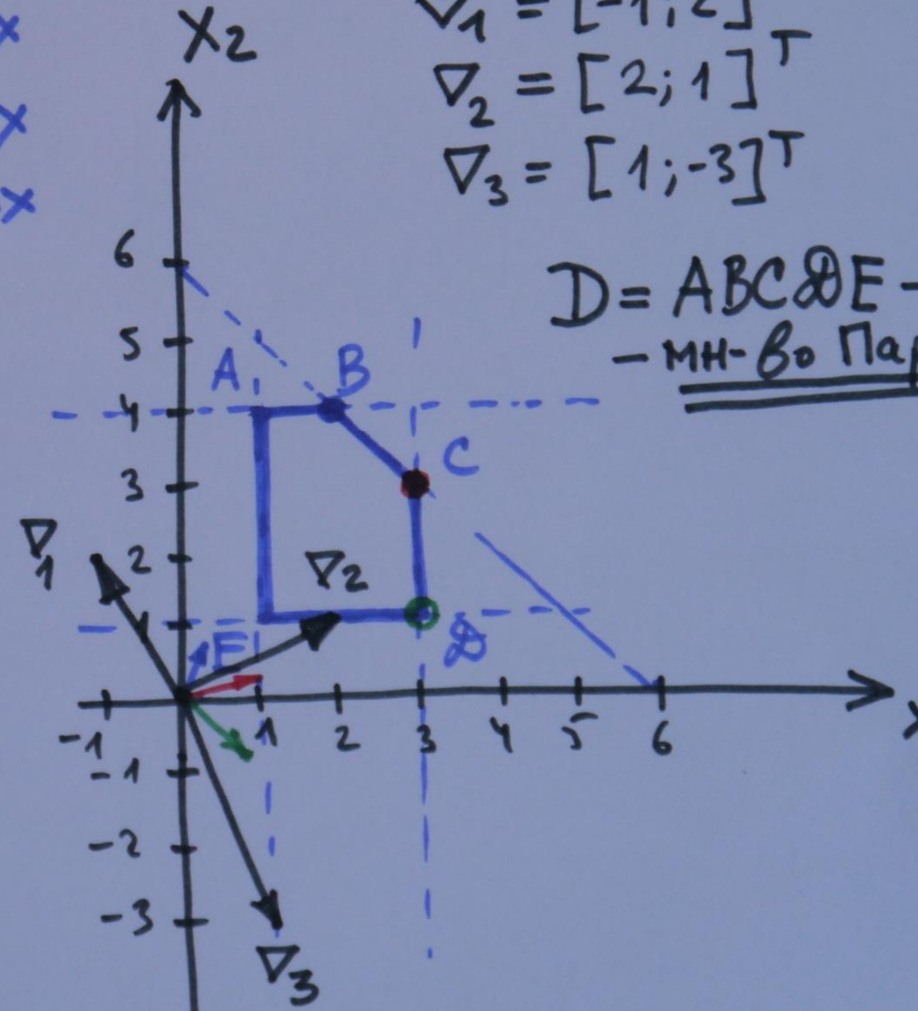
$$D: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \end{cases}$$

$\nabla_1 = [-1; 2]^T$

$\nabla_2 = [2; 1]^T$

$\nabla_3 = [1; -3]^T$

$D = ABCDE$ – мн-во Парето



а) $\mu_1 = 0{,}5$; $\mu_2 = \mu_3 = 0{,}25$

б) $\mu_2 = 0{,}5$; $\mu_1 = \mu_3 = 0{,}25$

в) $\mu_3 = 0{,}5$; $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}25$

а) $\mu_1 = 0{,}5;\ \mu_2 = \mu_3 = 0{,}25.$

$$\Phi(F(X),\mu) = 0{,}5 f_1(X) + 0{,}25 f_2(X) + 0{,}25 f_3(X) =$$
$$= 0{,}25 x_1 + 0{,}5 x_2.$$

$\nabla\Phi = \left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right]^T \Longrightarrow$ т. $B(2;4)$ – оптим. решение.

$f_1(B) = 6;\ f_2(B) = 8;\ f_3(B) = -10.$

б). $\mu_2 = 0{,}5;\ \mu_1 = \mu_3 = 0{,}25.$

$$\Phi(F(X),\mu) = 0{,}25 f_1(X) + 0{,}5 f_2(X) + 0{,}25 f_3(X) = x_1 + 0{,}25 x_2.$$

$\nabla\Phi = [1;\ 0{,}25]^T \Longrightarrow$ т. $C(3;3)$ – оптим. реш.

$f_1(C) = 3;\ f_2(C) = 9;\ f_3(C) = -6.$

в). $\mu_3 = 0{,}5;\ \mu_1 = \mu_2 = 0{,}25.$

$$\Phi(F(X),\mu) = 0{,}25 f_1(X) + 0{,}25 f_2(X) + 0{,}5 f_3(X) = \frac{3}{4} x_1 - \frac{3}{4} x_2$$

$\nabla\Phi = \left[\frac{3}{4};\ -\frac{3}{4}\right]^T \Longrightarrow$ т. $D(3;1)$ – оптим. решение.

$f_1(D) = -1;\ f_2(D) = 7;\ f_3(D) = 0.$

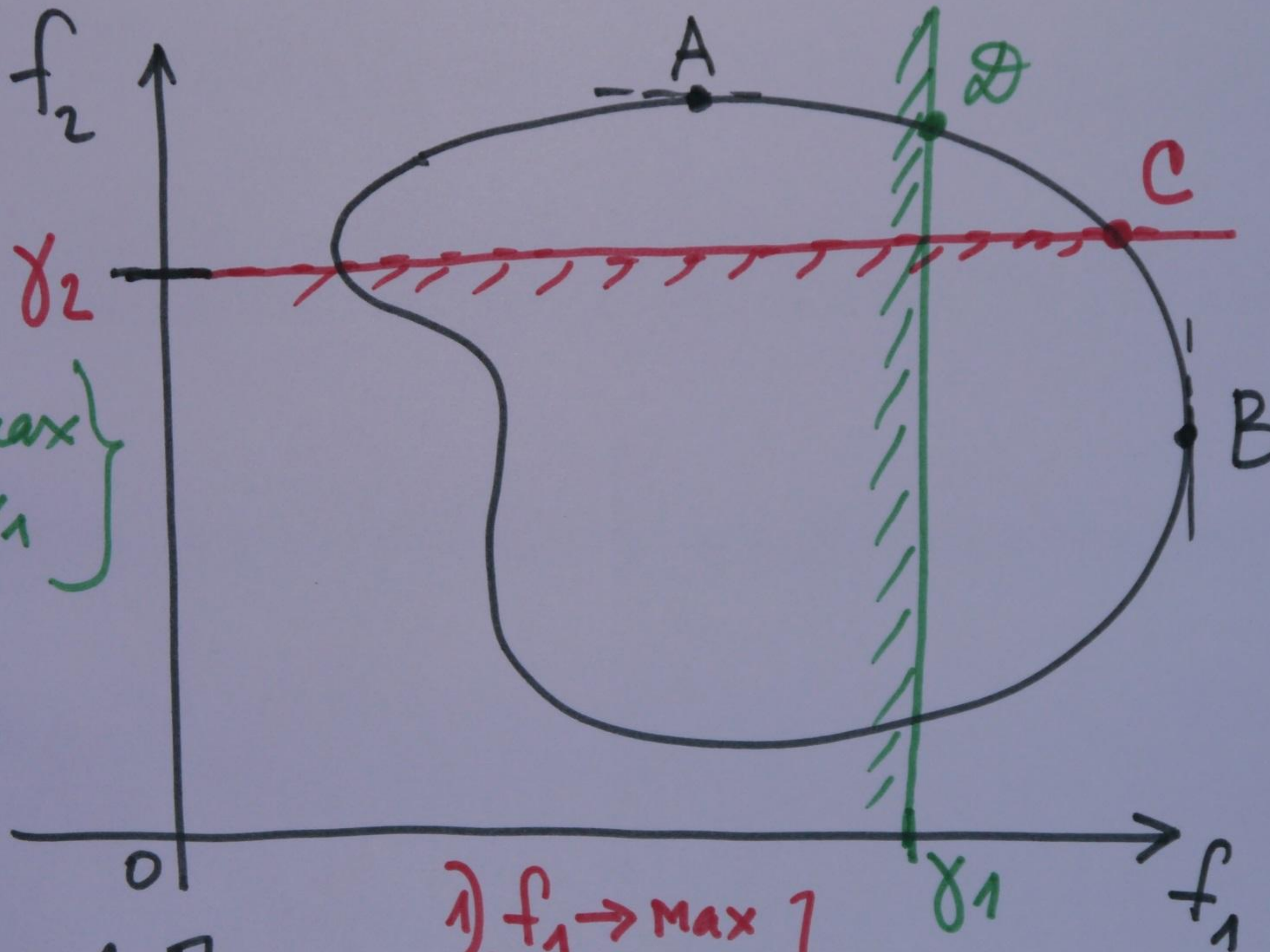
II Методы, использующие информацию о желаемых уровнях значений критериев

1. Пороговая оптимизация: $f_k(X)$ – основной критерий.

$$f_k(X) \to \max_{X \in \tilde{D}} \qquad (3)$$

$$\tilde{D}: \begin{cases} X \in D; \\ f_i(X) \geq \gamma_i, \; i=\overline{1,m}; \; i \neq k. \end{cases} \qquad (4)$$

Геометрическая интерпретация



$$\left.\begin{aligned} &2)\ f_2 \to \max \\ &f_1 \geq \gamma_1 \end{aligned}\right\} \Downarrow$$

т. $\mathcal{D}$

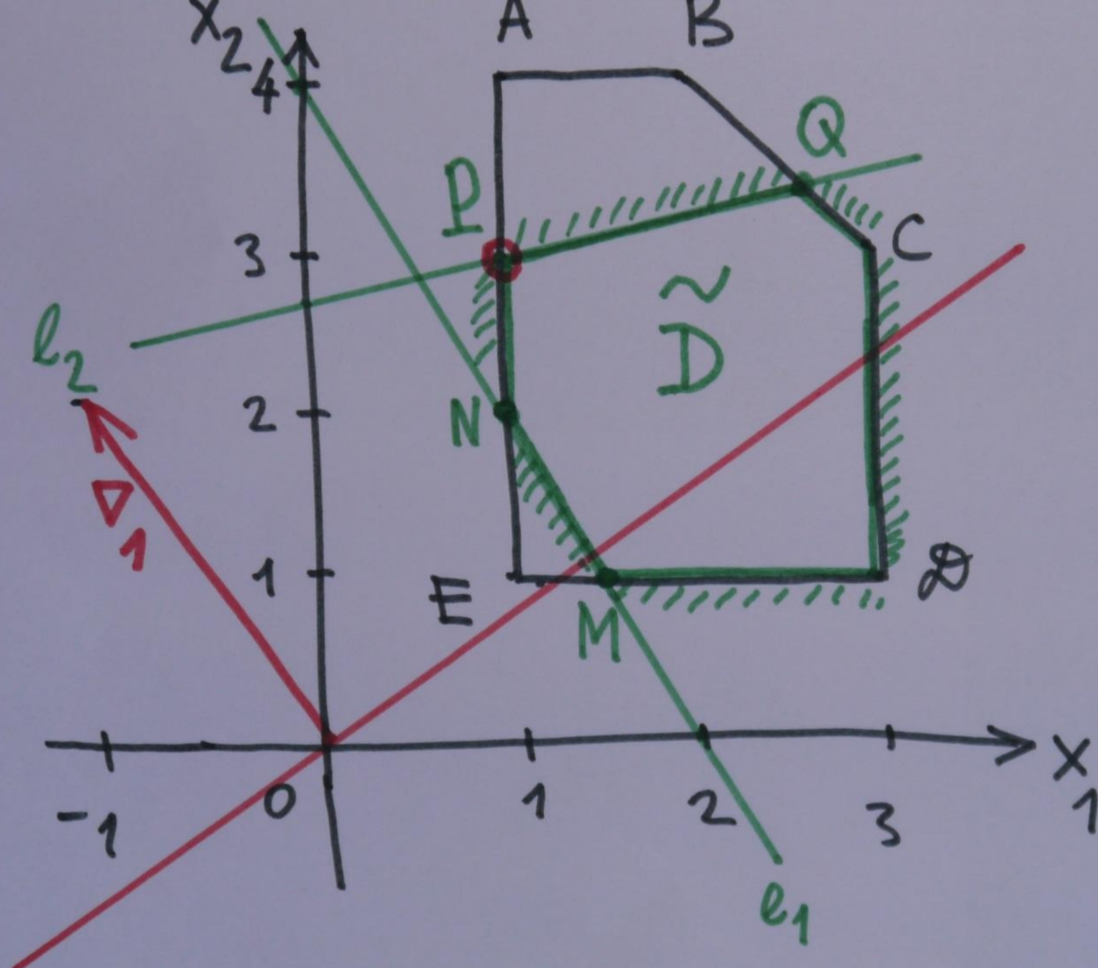
$\left.\begin{aligned} &1).\ f_1 \to \max \\ &f_2 \geq \gamma_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$ т. C

$\smile$AB – мн-во Парето

Пример 2. Решить задачу 1 методом пороговой оптимизации: $f_1(X)$ - основной критерий; $\gamma_2 = 4$; $\gamma_3 = -8$.

$$f_1(X) = -x_1 + 2x_2 \longrightarrow \max$$

$$\tilde{D}: \begin{cases} x_1 + x_2 \le 6 \\ 1 \le x_1 \le 3 \\ 1 \le x_2 \le 4 \\ 2x_1 + x_2 \ge 4 \longrightarrow \ell_1: \ x_2 \ge 4 - 2x_1 \\ x_1 - 3x_2 \ge -8 \longrightarrow \ell_2: \ x_2 \le \frac{1}{3}x_1 + \frac{8}{3} \end{cases}$$



$\nabla_1 = [-1; 2]$

$\tilde{\mathcal{D}} = MNPQC\mathcal{D}$

т. $P(1;3)$ – опт. реш.

$$\left.\begin{aligned} f_1(P) &= 5 \\ f_2(P) &= 5 \\ f_3(P) &= -8 \end{aligned}\right\}.$$

2. Метод "идеальной" точки

А. $\left\{\begin{array}{l} f_1(\underline{X}) \to \max\limits_{\underline{X} \in D} \Rightarrow f_1^* \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_m(\underline{X}) \to \max\limits_{\underline{X} \in D} \Rightarrow f_m^* \end{array}\right\} \Rightarrow F^* = [f_1^*, \ldots, f_m^*]$ –

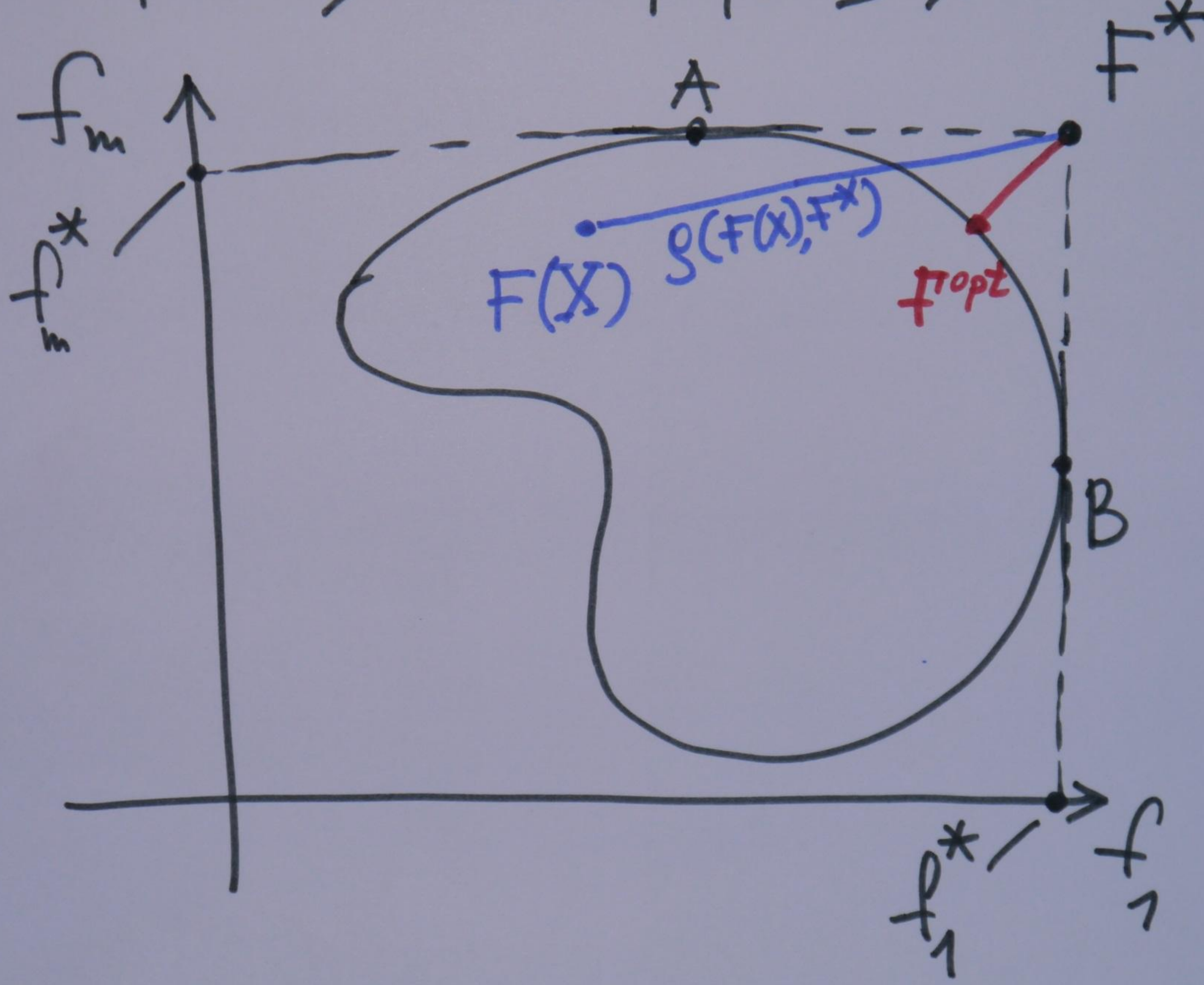
– "идеальная" точка.

Б. Вводим метрику:

$$\rho(F(\underline{X}), F^*) = \sum_{i=1}^{m} \left(f_i(\underline{X}) - f_i^*(\underline{X})\right)^2$$

В. $$\rho(F(\underline{X}), F^*) \longrightarrow \min_{\underline{X} \in D} \Rightarrow F^{opt}$$

Геометрическая интерпретация



<u>Пример 3</u>. Решить задачу 1 методом "идеальной" точки.

А) $f_1(X) \to \max_{X \in D} \Rightarrow$ т. $A(1;4) \Rightarrow f_1^*(A) = 7$

$f_2(X) \to \max_{X \in D} \Rightarrow$ т. $C(3;3) \Rightarrow f_2^* = 9$

$f_3(X) \to \max_{X \in D} \Rightarrow$ т. $D(3;1) \Rightarrow f_3^* = 0$

$\left.\right\} F^* = [7; 9; 0]^T$

Б). $\rho(F(X), F^*) = (f_1(X) - 7)^2 + (f_2(X) - 9)^2 + (f_3(X))^2 =$

$= (-x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 9)^2 + (x_1 - 3x_2)^2$

В). $\rho(F(X), F^*) \longrightarrow \min_{X \in D}$

Используем метод Франка–Вулфа: $X^{opt} = [2,97; 2,28]^T$; $F^* = \begin{bmatrix} 1,59 \\ 8,22 \\ -3,87 \end{bmatrix}$

$\rho_{\min} = 44,85$.

III. Лексикографические методы МО

$$f_1(X) \succ f_2(X) \succ \dots \succ f_m(X)$$

1. Метод последовательных уступок.

1). $f_1(X) \xrightarrow[X \in D]{} \max \Longrightarrow f_1^* = f_1(X^{*1})$

2). Назнач. уступка δ_1 по $f_1(X)$

$$f_2(X) \xrightarrow[X \in D_2]{} \max \Longrightarrow f_2^* = f_2(X^{*2})$$

$$D_2: \begin{cases} X \in D \\ f_1(X) \geq f_1^* - \delta_1 \end{cases}$$

3). Назнач. уступка δ_2 по $f_2(\underline{X})$.

$$f_3(\underline{X}) \xrightarrow[\underline{X} \in D_3]{} \max \Longrightarrow f_3^* = f_3(\underline{X}^{*3})$$

$$D_3: \begin{cases} \underline{X} \in D \\ f_1(\underline{X}) \geqslant f_1^* - \delta_1 \\ f_2(\underline{X}) \geqslant f_2^* - \delta_2 \end{cases}$$

и т.д. ...

m). Назнач. уступка δ_{m-1} по $f_{m-1}(\underline{X})$.

$$f_m(\underline{X}) \to \max_{\underline{X} \in D_m} \Rightarrow f_m^* = f_m(\underline{X}^{*m}) \quad (14)$$

$$D_m: \begin{cases} \underline{X} \in D \\ f_1(\underline{X}) \geq f_1^* - \delta_1 \\ \cdots\cdots \\ f_{m-1}(\underline{X}) \geq f_{m-1}^* - \delta_{m-1} \end{cases}$$

Полученное решение $\underline{X}^{*m}$ считается оптимальным.

Пример 4. Решить задачу 1 методом последовательных уступок.

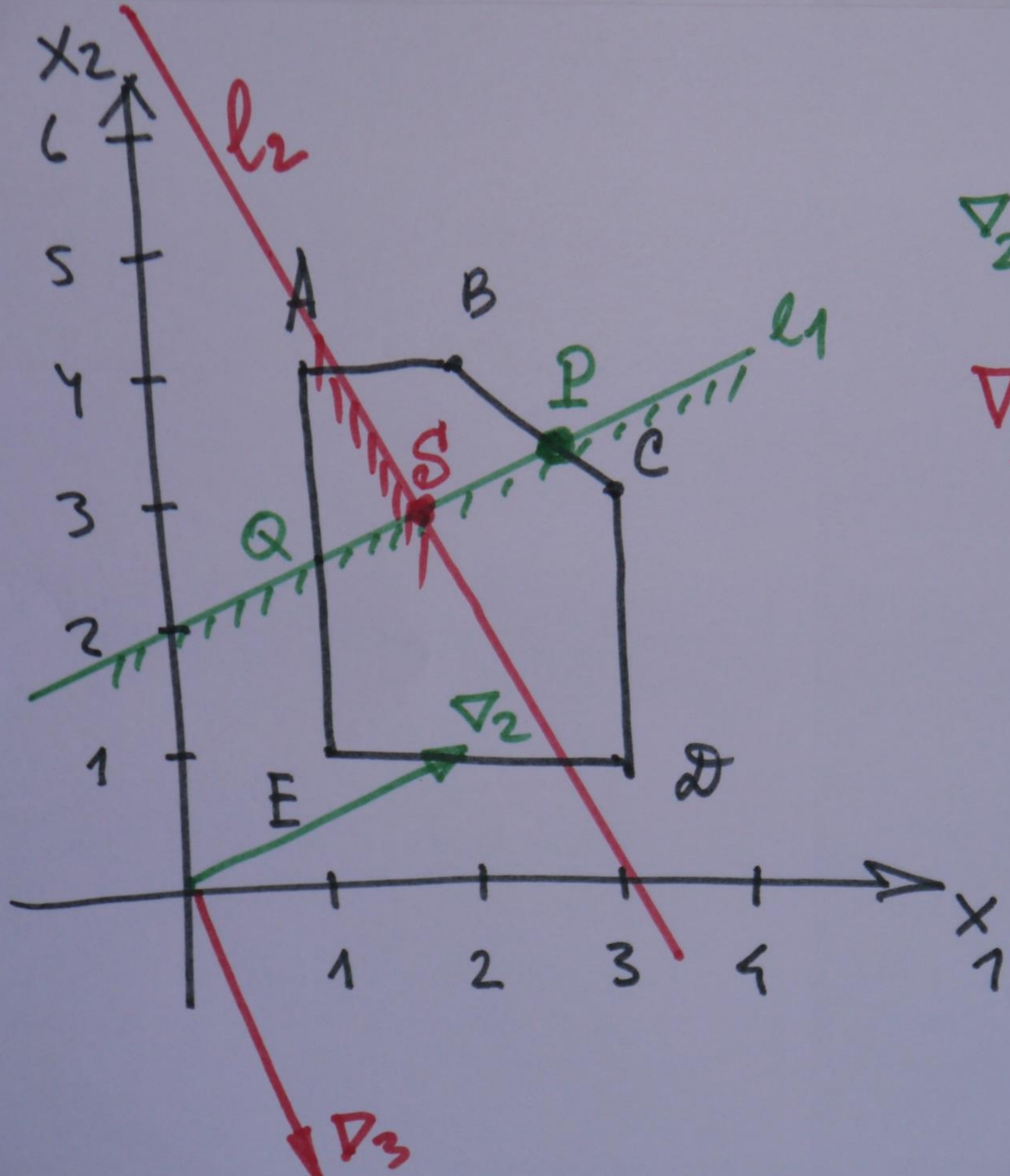
$$f_1 \succ f_2 \succ f_3\,; \quad \delta_1 = 3\,; \quad \delta_2 = 5/3$$

1). $\begin{matrix} f_1(\bar{X}) \to \max \\ \bar{X} \in D \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{т. } A(1;4) = \bar{X}^{*1} \\ f_1^* = 7. \end{cases}$

2). $\begin{matrix} f_2(\bar{X}) \to \max \\ \bar{X} \in D_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{т. } P\left(\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right) = \bar{X}^{*2} \\ f_2^* = \frac{26}{3} \end{cases}$

$$D_2 : \begin{cases} \bar{X} \in D \\ f_1(\bar{X}) \geq 7 - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{X} \in D \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$\ell_1 : x_2 \geq 2 + \frac{1}{2}x_1$$



$\nabla_2 = [2;1]$

$\nabla_3 = [1;-3]$

3). $f_3(\underline{X}) \to \max\limits_{\underline{X} \in D_2} \Longrightarrow$ т. $S(2;3) = \underline{X}^{*3}$

$f_3^* = -7$

$$D_3: \begin{cases} \underline{X} \in D \\ f_1(X) \geqslant 4 \\ f_2(X) \geqslant \frac{26}{3} - \frac{5}{3} = 7 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{X} \in D \\ -x_1 + 2x_2 \geqslant 4 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 7 \end{cases}$$

$l_2: x_2 \geqslant 7 - 2x_1$

Оптимальное решение:

$\underline{X}^{opt} = [2;3]^T$; $f_1 = 4$; $f_2 = 7$; $f_3 = -7$.