Список литературы

1. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер и др. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Высш. шк., 1993. – 336 с.
3. Соловьев В.И. Методы оптимальных решений: Учебное пособие. – М.: Финансовый университет, 2012. - 364 с.

Составляющие постановки задачи оптимизации

- Решение (план) задачи - вектор $\boldsymbol{X} = [x_1, x_2, \ldots. x_n]^T$.
- Целевая функция (функция цели, показатель эффективности) $F(\boldsymbol{X})$.
- Условия $\boldsymbol{D}$ (система ограничений), налагаемые на компоненты вектора $\boldsymbol{X}$.

Формальная постановка задачи оптимизации

$$\textit{определить} \quad min(max)\, F(\boldsymbol{X}) \quad , \qquad (1)$$
$$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}$$

где

$$\boldsymbol{D}: \begin{cases} h_i(\boldsymbol{X}) = 0, & i = \overline{1,k} \\ g_j(\boldsymbol{X}) \le 0, & j = \overline{1,l} \end{cases} \qquad (2)$$

Допустимый план $\boldsymbol{X}^*$, доставляющий функции цели экстремальное значение (min или max), называется **оптимальным.**

Краткая классификация оптимизационных задач

№	Признак	Классы задач		
1	Наличие ограничений	Условной оптимизации	Безусловной оптимизации	
2	По виду целевой функции и ограничений X	Линейного программирования	Нелинейного программирования	
3	По виду вектора	Непрерывной оптимизации	Дискретной оптимизации	Динамического программирования
4	По размерности целевой функции	Скалярной оптимизации	Многокритериальной оптимизации	
5	По наличию и виду неопределенных факторов	Детерминиро-ванной оптимизации	Стохастичес-кой оптимизации	Оптимизации в условиях неопределенности .

Задача линейного программирования (ЛП)

1. Общая задача ЛП

определить $$\min_{X \in D}(\max) F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (3)$$

где

$$D: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqq b_i, & i = \overline{1,k} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = \overline{(k+1),m} \\ x_j \geqq 0, & j = \overline{1,l} \end{cases} \qquad (4)$$

Матричная форма общей задачи ЛП

$$\textit{определить} \quad \min_{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{D}}(\max) F(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{X}, \qquad (5)$$

где

$$\boldsymbol{D}: \begin{cases} \boldsymbol{A_1 X \leqq B_1} \\ \boldsymbol{A_2 X = B_2} \\ x_j \geqq 0, \quad j = \overline{1,l} \end{cases} \qquad (6)$$

В постановке (5), (6):

$$\dim \mathbf{C}^T = [l \times n] \qquad \dim \mathbf{X} = [n \times 1]$$

$$\dim \mathbf{A}_1 = [k \times n] \qquad \dim \mathbf{B}_1 = [k \times 1]$$

$$\dim \mathbf{A}_2 = [s \times n] \qquad \dim \mathbf{B}_2 = [s \times 1]$$

$$k + s = m; \qquad l \le n.$$

2. Стандартная задача ЛП

определить $$\min_{X \in D}(\max) F(X) = C^T X, \tag{7}$$

где

$$D: \begin{cases} AX \leqq B \\ X \geqq 0_n \end{cases} \tag{8}$$

3. Каноническая задача ЛП

определить $\underset{X \in D}{min(max)} \, F(X) = C^T X$, (9)

где

$$G: \begin{cases} AX = B \\ X \geqq 0_n \end{cases} \quad (10)$$

<u>**!!! Замечание.**</u> Любая задача ЛП может быть представлена в виде *канонической, стандартной или общей задачи ЛП.*

Экономические интерпретации задачи ЛП

I. Задача планирования производства

Вид ресурса	Запас ресурса	Стоимость единицы ресурса	Количество единиц ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции					
			P_1	P_2	…	P_j	…	P_n
R_1	b_1	d_1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1j}	…	a_{1n}
R_2	b_2	d_2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2j}	…	a_{2n}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
R_i	b_i	d_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{in}
…	…	…						
R_m	b_m	d_m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mj}	…	a_{mn}
Цена продукта			c_1	c_2	…	c_j	…	c_n

Какое количество единиц каждого продукта необходимо произвести, чтобы получить максимальную прибыль?

Постановка задачи.

1. План производства: $\boldsymbol{X} = \left[x_1, \ \dots \ , x_n\right]^T$
2. Ограничения.

- Физический смысл:

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n} \ ; \qquad (11)$$

- Условие ограниченного спроса:

$$x_j \leq k_j \, , \ j = \overline{1, n} \ ; \qquad (12)$$

- Ресурсов должно хватить:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \qquad i = \overline{1, m} \ ; \qquad (13)$$

3. Целевая функция: чистая прибыль от реализации всего плана производства

- Себестоимость s_j единицы продукции P_j :

$$s_j = \sum_{i=1}^{m} d_i a_{ij} \qquad j = \overline{1,n}$$

- Чистая прибыль от реализации единицы продукции P_j :

$$q_j = c_j - s_j \qquad j = \overline{1,n}$$

- Чистая прибыль от реализации всего плана производства:

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \,, \; j = \overline{1,n} \qquad (14)$$

Формальная постановка задачи планирования производства

Требуется определить план производства $\boldsymbol{X}^* = \left[x_1^*, \; \dots \; , x_n^* \right]^T$, обеспечивающий максимальное значение целевой функции $F\left(\boldsymbol{X}\right)$ вида (14) при соблюдении ограничений на вектор $\boldsymbol{X}$ вида (11), (12), (13).

Замечание. Постановка (11)-(14) является ***стандартной задачей ЛП.***

II. Транспортная задача (ТЗ)

Потребители \\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\\ Источники	Π_1	…	Π_j	…	Π_n	**Кол-во ресурсов**
$И_1$	c_{11}	…	c_{1j}	…	c_{1n}	a_1
…	…	…	…	…	…	…
$И_i$	c_{i1}		c_{ij}	…	c_{in}	a_i
…	…	…	…	…	…	…
$И_m$	c_{m1}	…	c_{mj}	…	c_{mn}	a_m
Заявки на товары от потребителей	b_1	…	b_j	…	b_m	$\sum_i a_i = \sum_j b_j$

II.1. ТЗ по критерию стоимости

Предполагаем, что

- c_{ij} - стоимость перевозки единицы ресурса $И_i$ со склада в пункт потребления $П_j$;
- $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, т.е. ТЗ с правильным балансом.

Постановка задачи.

1. План производства: $\boldsymbol{X} = \left[x_{ij},\, i = \overline{1, m};\, j = \overline{1, n} \right]^T.$

2. Ограничения.

- физический смысл:

$$x_{ij} \geqq 0,\, i = \overline{1, n};\; j = \overline{1, n} \quad . \qquad (15)$$

- Емкости складов д.б. израсходованы полностью:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = \overline{1,m} \quad . \tag{16}$$

- Заявки, поданные потребителями, д.б. удовлетворены:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = \overline{1,n} \ . \tag{17}$$

3. Общая стоимость перевозок:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad . \tag{18}$$

Формальная постановка ТЗ по критерию стоимости

Требуется определить план перевозок X^*, обеспечивающий минимальное значение целевой функции $F(X)$ вида (18) при соблюдении ограничений на вектор вида (15), (16), (17).

<u>Замечание.</u> Постановка (15)-(18) является ***канонической задачей ЛП***.

II.2. ТЗ по критерию времени

Предполагаем, что

- $c_{ij}\left(x_{ij}\right)$ - время перевозки ресурса со склада $И_i$ в пункт потребления $П_j$ (зависит, вообще говоря, от объема перевозки);
- $\sum_i a_i = \sum_j b_j$, т.е. ТЗ с правильным балансом.

Постановка задачи.

1. План производства: $\boldsymbol{X} = \left[x_{ij},\, i = \overline{1, m};\, j = \overline{1, n}\right]^T.$
2. Ограничения:– (15)-(17).

3. Общее время всех перевозок T – все перевозки заканчиваются, в момент, когда заканчивается самая длительная из всех перевозок:

$$T = F\left(\boldsymbol{X}\right) = \max_{\substack{i=\overline{1,m},\\ j=\overline{1,n},\\ x_{ij}>0}} \left(c_{ij}\left(x_{ij}\right)\right) \qquad (19)$$

Формальная постановка ТЗ по критерию времени

Требуется определить план перевозок X^*, обеспечивающий минимальное значение целевой функции $F(X)$ вида (19) при соблюдении ограничений на вектор вида (15), (16), (17).

<u>Замечание.</u> Постановка (15), (16), (17), (19) является задачей ***нелинейного программирования.***

Пример 1.

Сформулировать постановку задачи планирования производства в виде задачи ЛП.

Дана таблица.

Вид ресурса	Запас ресурса	Кол-во единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукта	
		P_1	P_2
S_1	180	6	8
S_2	160	7	6
S_3	50	4	1
S_4	210	3	2

Прибыль от реализации единицы продукции P_1 и P_2 составляет 20 и 30 тыс. рублей соответственно.

Требуется найти план производства продукции, при котором Прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. $\boldsymbol{X} = \left[x_1, x_2\right]^T$ - план производства продукции P_1 и P_2 соответственно.

Для реализации плана производства $\boldsymbol{X}$ потребуется ресурсов

$$S_1 : \ 6x_1 + 8x_2 \ ; \quad S_2 : \ 7x_1 + 6x_2 \ ;$$
$$S_3 : \ 4x_1 + 1x_2 \ ; \quad S_4 : \ 3x_1 + 2x_2 \ .$$

Потребление ресурсов не должно превышать их запасы:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 8x_2 &\leqq 180 \\ 7x_1 + 6x_2 &\leqq 160 \\ 4x_1 + 1x_2 &\leqq 50 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqq 21 \end{aligned} \qquad (20)$$

Исходя из физического смысла:

$$x_1 \geqq 0 \;, \; x_2 \geqq 0 \;. \qquad (21)$$

Суммарная прибыль:

$$F(\mathbf{X}) = 20x_1 + 30x_2 \;\rightarrow\; max \qquad (22)$$

Пример 2.

Привести стандартную задачу ЛП к канонической форме.

$$F(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqq 1 \\ x_1 - x_2 &\leqq 0 \\ x_1 \geqq 0\ ,\ \ x_2 &\geqq 0. \end{aligned}$$

Решение. Введем новые переменные по правилу:

$$2x_1 + x_2 - 1 = x_3$$
$$-x_1 + x_2 = x_4$$

Каноническая форма:

$$F(\boldsymbol{X}) = x_1 + x_2 \quad \rightarrow \quad max$$

при ограничениях

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 - x_4 = 0$$

$$x_1 \geqq 0\ ,\ \ x_2 \geqq 0\ ,\ x_3 \geqq 0\ ,\ x_4 \geqq 0.$$