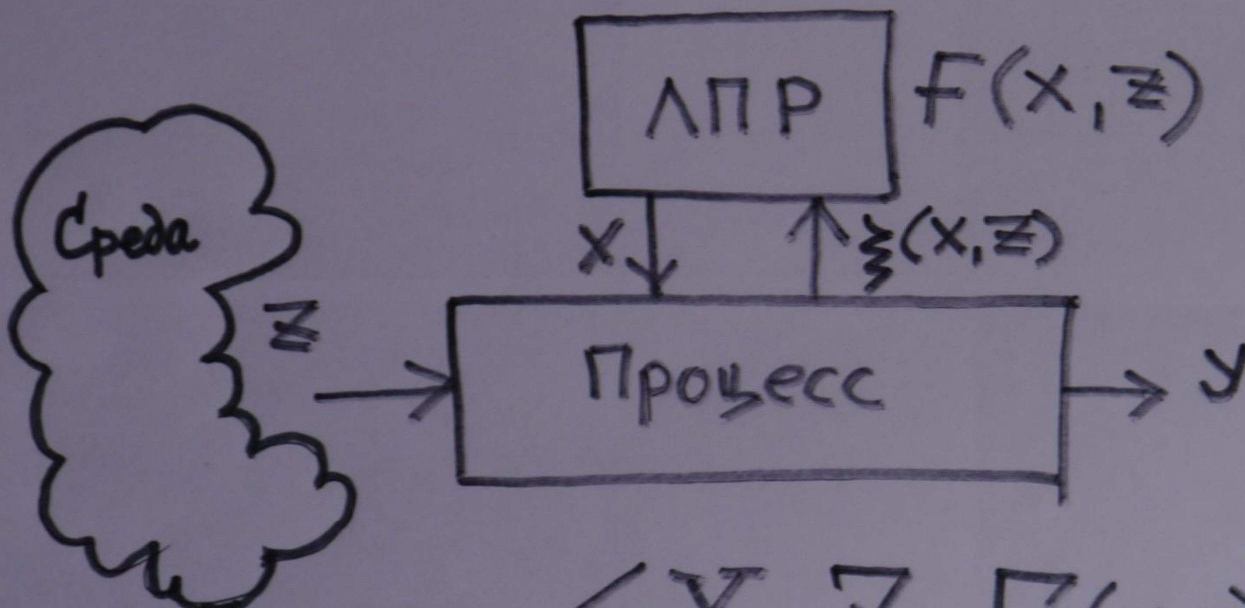
Принятие решений в условиях неопределенности

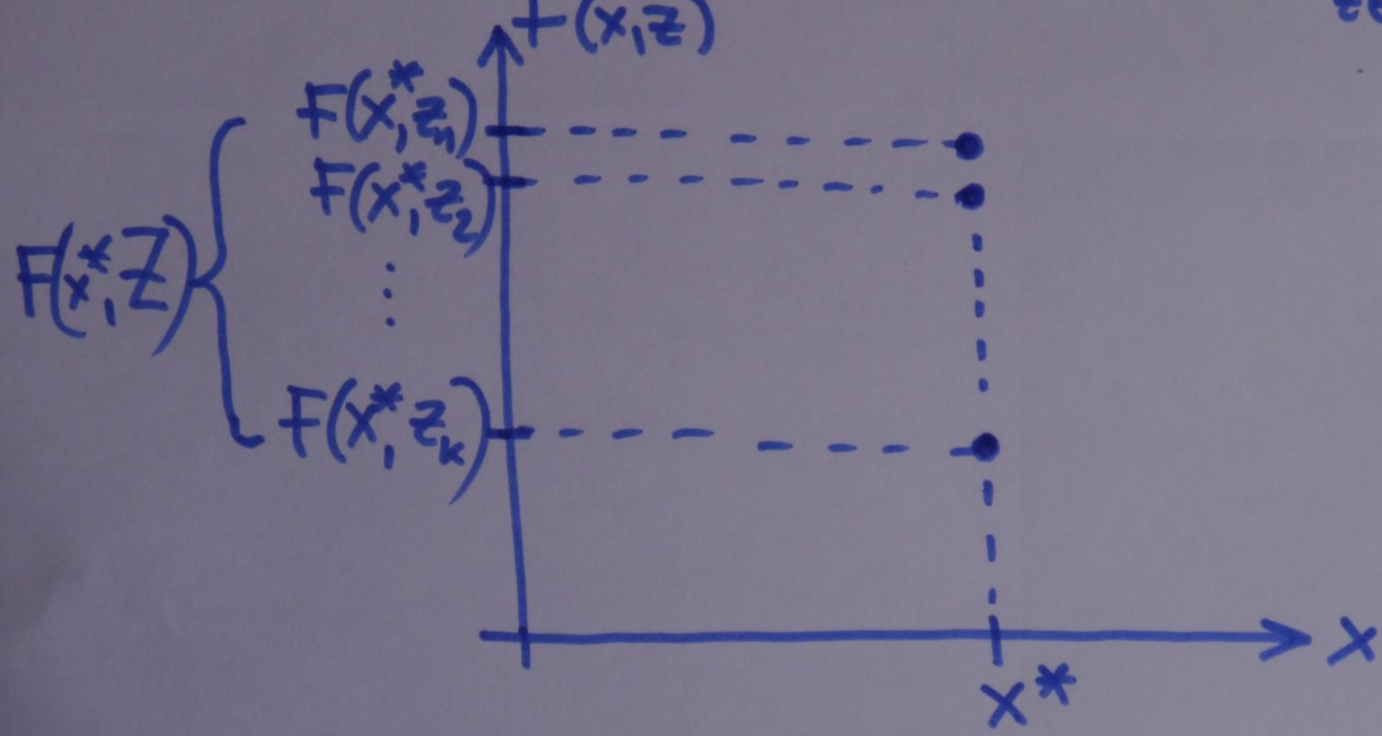


$$\Gamma = \langle X, Z, F(x,z) \rangle \qquad (1)$$

$x \in X$; $z \in Z$; $F(x,z) \to \max$ - выигр.

! Особенность:

При $x = x^*$ значение $F(x, z)$ известно лишь с точностью до множества $F(x^*, Z) = \bigcup\limits_{z \in Z} F(x^*, z)$



Игра с природой

ПР в условиях неопределенности

ПР в условиях риска.

Будем рассматривать задачи:

$X = \{x_i,\ i=\overline{1,m}\}$ ← конечные мн-ва

$Z = \{z_j,\ j=\overline{1,n}\}$

Задача (1) в табличном виде :

Q :

$x_i \backslash z_j$	z_1	....	z_j	...	z_n
x_1	q_{11}	..	q_{1j}		q_{1n}
...	...		...		...
x_i	q_{i1}	...	q_{ij}	..	q_{in}
...					
x_m	q_{m1}	...	q_{mj}	...	q_{mn}
	β_1	...	β_j	...	β_m

$$\beta_j = \max_{k=\overline{1,m}} q_{kj}$$

$Q=\left[q_{ij},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right]$ – матрица выигрышей (последствий).

Матрица рисков (сожалений)

R:

$x_i \backslash z_j$	z_1	…	z_j	…	z_n
x_1	r_{11}	…	. . .	.	r_{1n}
…	…	…	…	..	..
x_i	..		r_{ij}		..
…					
x_m	r_{m1}	.	. . .	.	r_{mn}

$$r_{ij} = \beta_j - q_{ij} = \max_{k=\overline{1,m}} q_{kj} - q_{ij}$$

$$R = [r_{ij},\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}].$$

Пример 1. Пересчитать: $Q \to R$

Q:

$x \backslash z$	z_1	z_2	z_3
x_1	250	200	100
x_2	200	230	120
x_3	100	240	260

R:

$x \backslash z$	z_1	z_2	z_3
x_1	0	40	160
x_2	50	10	140
x_3	150	0	0

$\beta_1 = \max\{250; 200; 100\} = 250$

$\beta_2 = \max\{200; 230; 240\} = 240$

$\beta_3 = \max\{100; 120; 260\} = 260$

$r_{11} = \beta_1 - q_{11} = 0$

$r_{12} = \beta_2 - q_{12} = 40$

$r_{13} = \beta_3 - q_{13} = 160$

и т.д.

Критерии ПР в условиях неопределенности

1. Критерий Вальда (максиминный) (крайний пессимизм)
2. Критерий максимума (крайний оптимизм). (максимаксный)
3. Критерий Сэвиджа (минимальных сожалений).
4. Критерий Гурвица (пессимизма-оптимизма).
5. Критерий Лапласа
6. Критерий Байеса.

(Вероятностные)

1. Критерий Вальда

1) Для $\forall x_i$ вычисляем:

$$a_i = \min_{j=\overline{1,n}} q_{ij}$$

2) Далее, вычислить:

$$a_{i_B} = \max_{i=\overline{1,m}} a_i = a^*$$

$$\Downarrow$$

x_{i_B} – рекомендуемое решение.

2. Критерий максимума.

1) $\forall x_i$ вычислить

$$a_i = \max_{j=\overline{1,n}} q_{ij}.$$

2) Далее вычислить

$$a_{i_M} = \max_{i=\overline{1,m}} a_i = a^*$$

$$\Downarrow$$

x_{i_M} – рекомендуемое решение.

3. Критерий Сэвиджа.

1) $\forall x_i$ вычислить $b_i = \max\limits_{j=\overline{1,n}} r_{ij}$

2). Вычислить: $b_{ic} = \min\limits_{i=\overline{1,n}} b_i = b^*$

$\Downarrow$

x_{ic} – рекомендуемое решение.

4. Критерий Гурвица.

1). Выбирается весовой коэф-т $\lambda \in [0;1]$, характеризующий склонность к пессимизму ($\lambda_1 = 0{,}2$; $\lambda_2 = 0{,}5 \Rightarrow \lambda_2$ отражает бо́льший пессимизм).

2). Вычислить $\forall x_i$:

$$c_i = \lambda \min_{j=\overline{1,n}} q_{ij} + (1-\lambda) \max_{j=\overline{1,n}} q_{ij}$$

3) Вычислить : $c_{ir} = \max_{i=\overline{1,m}} c_i \Rightarrow x_{ir}$ – реком. реш.

*) $\lambda = 1$ - критерий Вальда; $\lambda = 0$ - критерий максимума.

5. Критерий Лапласа

(принцип недостаточного основания)

Полагается, что все состояния $z_j,\ j=\overline{1,n}$ – равновероятны.

1). $\forall z_j \longrightarrow p_j = \frac{1}{n}$

2) $\forall x_i$ вычислить: $d_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ –

– среднее знач. выигрыша при x_i.

3). Вычислить $d_{i_1} = \max\limits_{i=\overline{1,m}} d_i$ (для Q)

(Для R: $d_{i_1} = \min\limits_{i=\overline{1,m}} d_i$,) $d_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$)

6. Критерий Байеса

Используется при известном распределении вероятностей различных сост. среды.

Z	Z_1	…	Z_j	…	Z_n
P	p_1		p_j		p_n

1). $\forall x_i$ вычислить средний выигрыш

$$\bar{q}_i = \sum_{j=1}^{n} p_j q_{ij}$$

2) Вычислить:

$$\bar{q}_{iБ} = \max_{i=\overline{1,n}} \bar{q}_i \Rightarrow x_{iБ}$$ – рекоменд. решение

(Для R: $\bar{r}_i$ – ф. риск x_i; $\bar{r}_{iБ} = \min_{i=\overline{1,m}} \bar{r}_i$).

Пример 2.

Фирма заказывает товар для реализации.
Известно, что спрос колеблется в интервале 6...9 ед.
Возможны варианты:

1. Спрос > Предложение ⇒ придется срочно заказать и завезти товар
2. Спрос < Предложение ⇒ нереализованный товар придется хранить на складе.

Доп. расходы:

1). 2 у.е. за срочный заказ и доставку ед. товара.
2). 1 у.е. расходы на хранение ед. товара на складе

Опр. об'ем заказа: Доп. расх. → min

Постановка задачи в табличном виде

1. Платежная матрица.

$x \backslash z$	$z_1=6$	$z_2=7$	$z_3=8$	$z_4=9$
$x_1=6$	0	2	4	6
$x_2=7$	1	0	2	4
$x_3=8$	2	1	0	2
$x_4=9$	3	2	1	0

$\Rightarrow$

2. Матрица выигрышей

$x \backslash z$	$z_1=6$	$z_2=7$	$z_3=8$	$z_4=9$
$x_1=6$	0	−2	−4	−6
$x_2=7$	−1	0	−2	−4
$x_3=8$	−2	−1	0	−2
$x_4=9$	−3	−2	−1	0

1. Критерий Вальда.

Q:

$x \backslash z$	$z_1=6$	$z_2=7$	$z_3=8$	$z_4=9$	$a_i = \min_j q_{ij}$
$x_1=6$	0	−2	−4	−6	−6
$x_2=7$	−1	0	−2	−4	−4
$x_3=8$	−2	−1	0	−2	−2
$x_4=9$	−3	−2	−1	0	−3

$\Downarrow$

$a^* = \max_i a_i \Rightarrow x_3$ – опт. реш.

2. Критерий Сэвиджа

1) Вычислить $\beta_j = \max\limits_i q_{ij} \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

2) $Q \longrightarrow R$: $r_{ij} = \beta_j - q_{ij} \Longrightarrow \underline{\underline{R = -Q}}$.

R:

$x \backslash z$	$z_1=6$	$z_2=7$	$z_3=8$	$z_4=9$	$b_i = \max\limits_j r_{ij}$
$x_1=6$	0	2	4	6	6
$x_2=7$	1	0	2	4	4
$x_3=8$	2	1	0	2	2
$x_4=9$	3	2	1	0	3

3) $b^* = \min\limits_i b_i \Longrightarrow x_3$ – опт. решение

3. Критерий Гурвица ($\lambda = 0{,}2$)

	z_1	z_2	z_3	z_4			$\lambda = 0{,}2$	$\lambda = 0{,}5$
$x \backslash z$	6	7	8	9	$\min_j q_{ij}$	$\max_j q_{ij}$	c_i	c_i
x_1 6	0	-2	-4	-6	-6	0	-1,2	-3
x_2 7	-1	0	-2	-4	-4	0	-0,8	-2
x_3 8	-2	-1	0	-2	-2	0	-0,4	-1
x_4 9	-3	-2	-1	0	-3	0	-0,6	-1,5

$$c_i = \lambda \min_j q_{ij} + (1-\lambda) \max_j q_{ij} =$$

$$= 0{,}2 \cdot \min_j q_{ij} + 0{,}8 \max_j q_{ij}$$

Вычислить $c_{ir} = \max_i c_i \Longrightarrow$ x_3 – опт. реш.

Пример 3.

Владелец груза должен выбрать одну из 2х альтернатив:

1) Страховать груз;
2) Не страховать груз.

Риск – возможна катастрофа ($p = 0{,}1$).

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Груз будет утрачен}}$

Если застраховаться $\Rightarrow$ в случае утраты владелец получит компенсацию стоимости груза (100'000 у.е).

Стоимость страховки = 5'000 у.е.

?

Матрица выигрышей (последствий)

Q:

$x_i \backslash z_j$	z_1 – катастрофа произойдет	z_2 – катастрофа не произойдет
x_1 – страховать	–5000	–5000
x_2 – не страхов.	–100 000	0

Вероятности состояний среды:

Z	z_1	z_2
P	0,1	0,9

$\Longrightarrow$

Q.

$x_i \backslash z_j$	z_1	z_2	$\bar{q} = M_j(a_{ij})$
x_1	-5000	-5000	$-5{'}000$
x_2	$-100{'}000$	0	$-10{'}000$
p_j	$0{,}1$	$0{,}9$	

x_1 – опт. реш. (в соотв. с крит. Байеса).

$$M(q_1) = (0{,}1)(-5000) + (0{,}9)(-5{'}000) = -5{'}000$$

$$M(q_2) = (0{,}1)(-100{'}000) + (0{,}9)\cdot 0 = -10{'}000$$

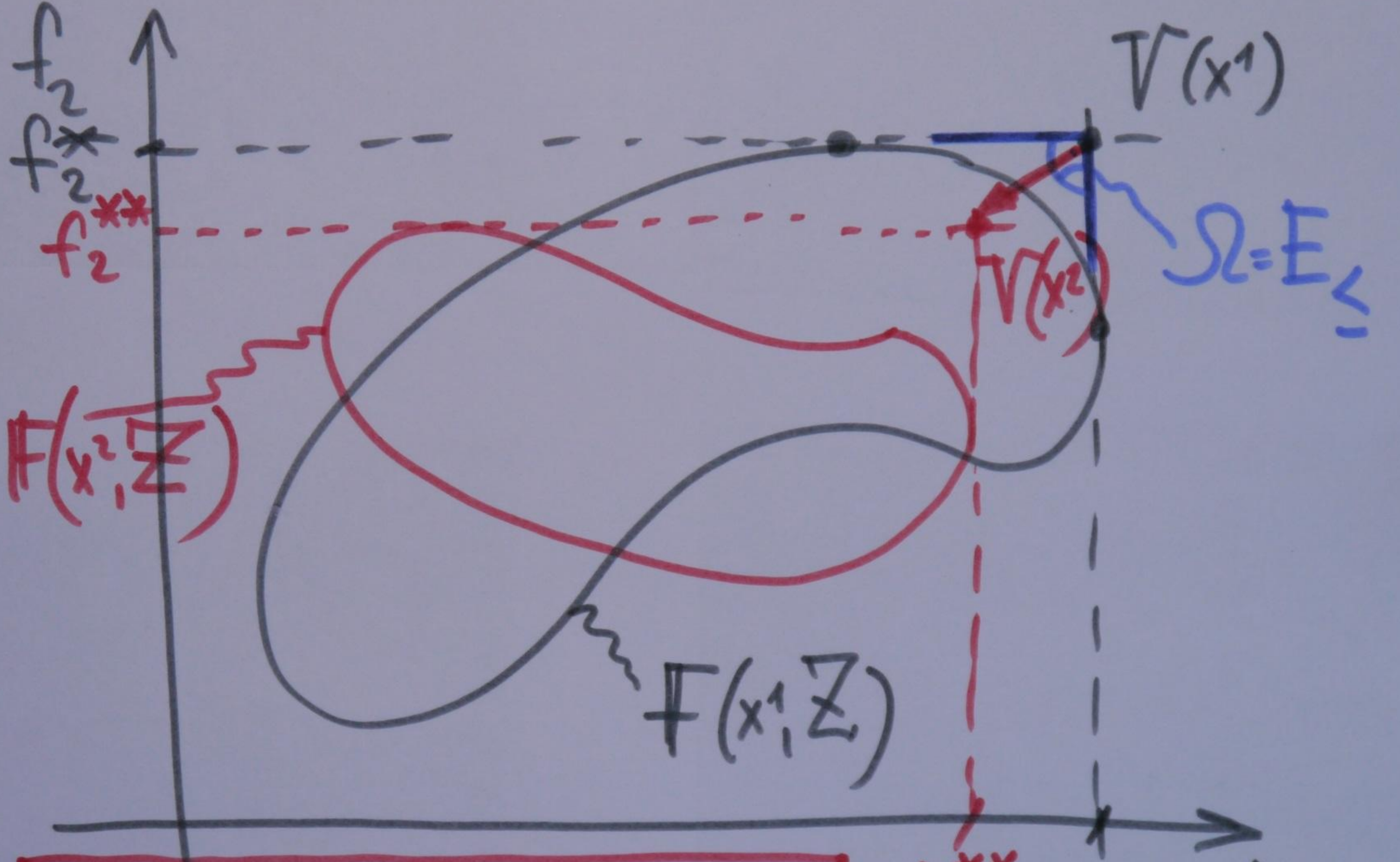
Многокритериальное ПР в условиях неопределенности

Неопр-сть цели

Неопр-сть среды

$$\text{определить} \quad \underset{\substack{x \in D \\ z \in Z}}{\mathrm{Min}(\mathrm{Max})}\, \mathbb{F}(x, z) \qquad (1)$$

Особенность постановки (1) (Min)



$$\boxed{V(x^2) - V(x^1) \in \Omega}$$

11

$$f_1^* = \max_{z \in Z} f_1(x^1, z)$$

$$f_2^* = \max_{z \in Z} f_2(x^1, z)$$

$$\Rightarrow V(x^1) = [f_1^*, f_2^*]^T = [V_1, V_2]$$

виртуальный max

"точка крайнего пессимизма" при $x = x^1$

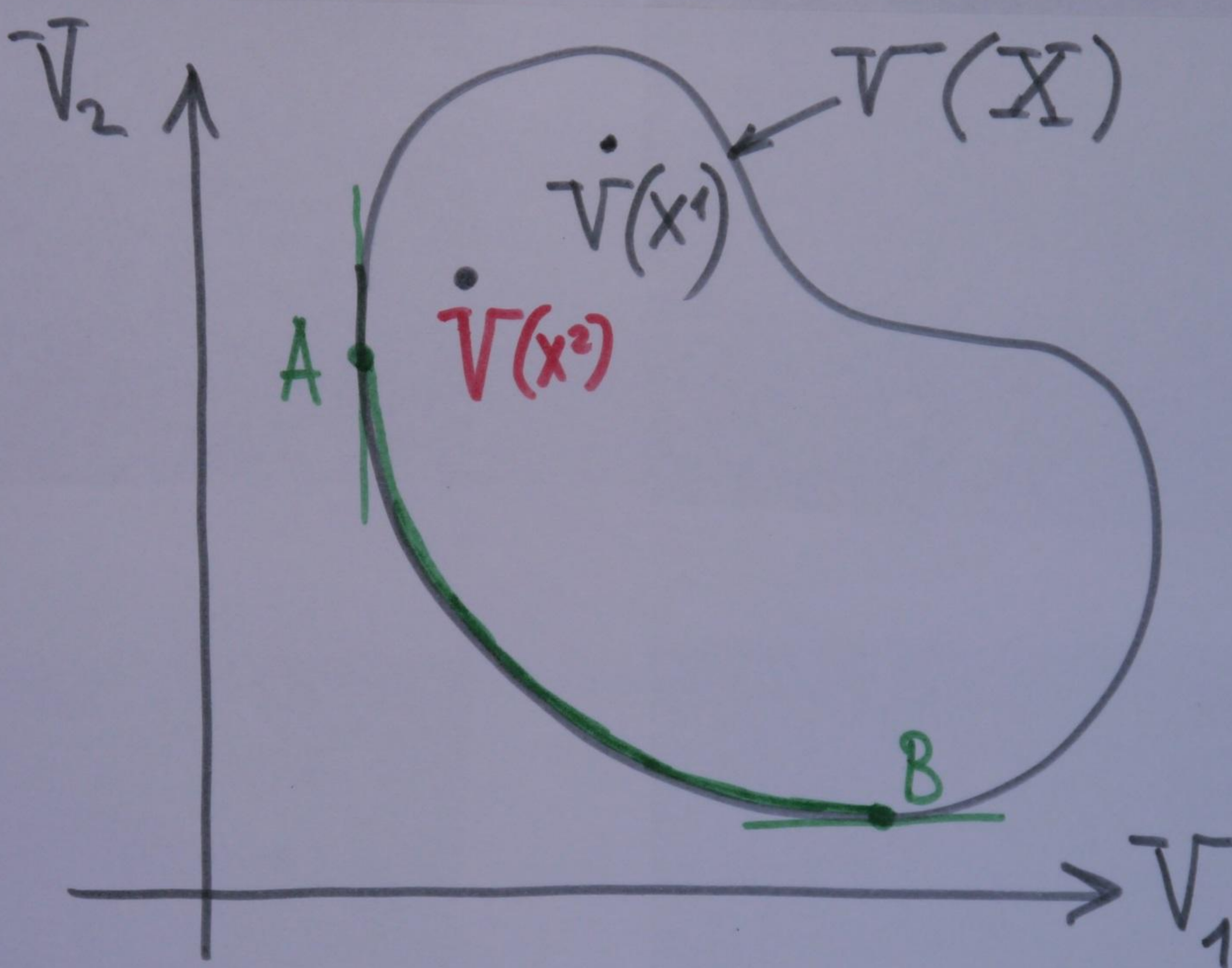
$$f_1^{**} = \max_{z \in Z} f_1(x^2, z)$$

$$f_2^{**} = \max_{z \in Z} f_2(x^2, z)$$

$$\Rightarrow V(x^2) = [V_1, V_2] = [f_1^{**}, f_2^{**}]^T$$

– "точка крайнего пессимизма" при $x = x^2$

L12



∪AB - множество векторных минимаксов в пр-ве виртуальных экстремумов (max)

Пример. Планируется построить предпр. по производству определенной продукции. Необходимо рассчитать мощн. предприятия в условиях неопределенного спроса.

Мощность д.б. такой, чтобы:

f_1 ← 1) максимально удовлетворять спрос;

f_2 ← 2) обеспечить max. прибыль предприятия.

Показатели эффективности

$$f_1(V,S) = \begin{cases} 100\%, & V \geq S, \\ \frac{V}{S} \cdot 100\%, & V < S. \end{cases}$$

$$f_2(V,S) = \begin{cases} Q_1(V-S) + Q_2 \cdot S, & V \geq S, \\ Q_2 \cdot V. \end{cases}$$

V - мощн. предпр. (объем выпускаемой продукции)

S - спрос.

Q_1 - убытки при хранении и уценке ед. продукц.

Q_2 - прибыль от реализации ед. продукции

$Q_1 = 5$; $Q_2 = 15$.

$S = 10$; 20 ; 30 ; 40

$V = 10$; 20 ; 30 ; 40.

Матрица выигрышей по f_1 (%)

Спрос / Мощн		S_1	S_2	S_3	S_4
		10	20	30	40
V_1	10	100	50	33,3	25
V_2	20	100	100	67	50
V_3	30	100	100	100	75
V_4	40	100	100	100	100

Матрица выигрышей по f_2

Мощн. \ Спрос		S_1	S_2	S_3	S_4
		10	20	30	40
V_1	10	150	150	150	150
V_2	20	100	300	300	300
V_3	30	50	250	450	450
V_4	40	0	200	400	600

Схема построения мн-ва векторных минимаксов