



Оглавление

Линейное программирование

Симплекс-метод

Основная теорема линейного программирования

Графический метод решения

Задача на максимум

Геометрический метод решения задач линейного
программирования

Задача с бесконечным множеством оптимальных решений

Усложнённые постановки транспортной задачи

Многоэтапная задача

Двойственные задачи

Закрытая транспортная задача

Метод потенциалов

Линейное программирование



Линейное программирование — математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения экстремальных задач на множествах n -мерного векторного пространства, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств.

Линейное программирование является частным случаем выпуклого программирования, которое в свою очередь является частным случаем математического программирования. Одновременно оно — основа нескольких методов решения задач целочисленного и нелинейного программирования.



Задачи линейного программирования можно решить **аналитическим путем** и **графическим методом**.

В геометрии есть такое понятие, как "симплекс". С учетом этого понятия аналитический метод решения задач линейного программирования называется **симплекс-методом**.



Симплекс-метод

Идея метода симплекс-таблиц заключается в целенаправленном переборе вершин симплекса. Для начала перебора необходимо выбрать опорную вершину с которой начнется перебор.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования основан на переходе от одного опорного плана к другому, (перебирая симплекс вершины) при котором значение целевой функции возрастает (убывает). Указанный переход возможен, если известен какой-нибудь исходный опорный план. Для составления такого плана необходимо произвести векторный анализ, на основе которого определить опорную вершину, с которой начнется перебор.

Задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max (\min, \text{const}) \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ d_j \leq x_j \leq D_j \\ i=1..m; j=1..n \end{array} \right.$$



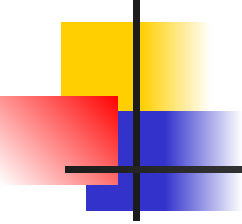
Аналитический метод решения задач ЛП:

1. Найти вершины ОДР.
2. Определить значения целевой функции в вершинах.
3. Вершина, в которой ЦФ приобретает оптимальное (максимальное или минимальное) значение, является оптимальной вершиной.
4. Координаты этой вершины и являются искомыми оптимальными значениями переменных.



Основная теорема линейного программирования

Целевая функция задачи линейного программирования достигает своего экстремума (минимума или максимума) в вершине допустимой области. Если целевая функция достигает экстремального значения более, чем на одной вершине, то она достигает того же значения в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих вершин.



В том случае, когда требуется найти минимум функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

можно перейти к нахождению максимума функции

$$F_1 = -F = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$$

ПОСКОЛЬКУ $\min F = -\max(-F)$:



Графический метод решения

Вид сырья	Нормы расхода сырья (кг) на одно изделие		Общее количество сырья (кг)
	A	B	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль от реализации одного изделия (руб.)	30	40	

Составить такой план их выпуска, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий является максимальной



Будет изготовлено:

x_1 единиц изделий вида А

x_2 единиц изделий вида В

Прибыль от их реализации составит:

$$F = 30x_1 + 40x_2.$$

→ max

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

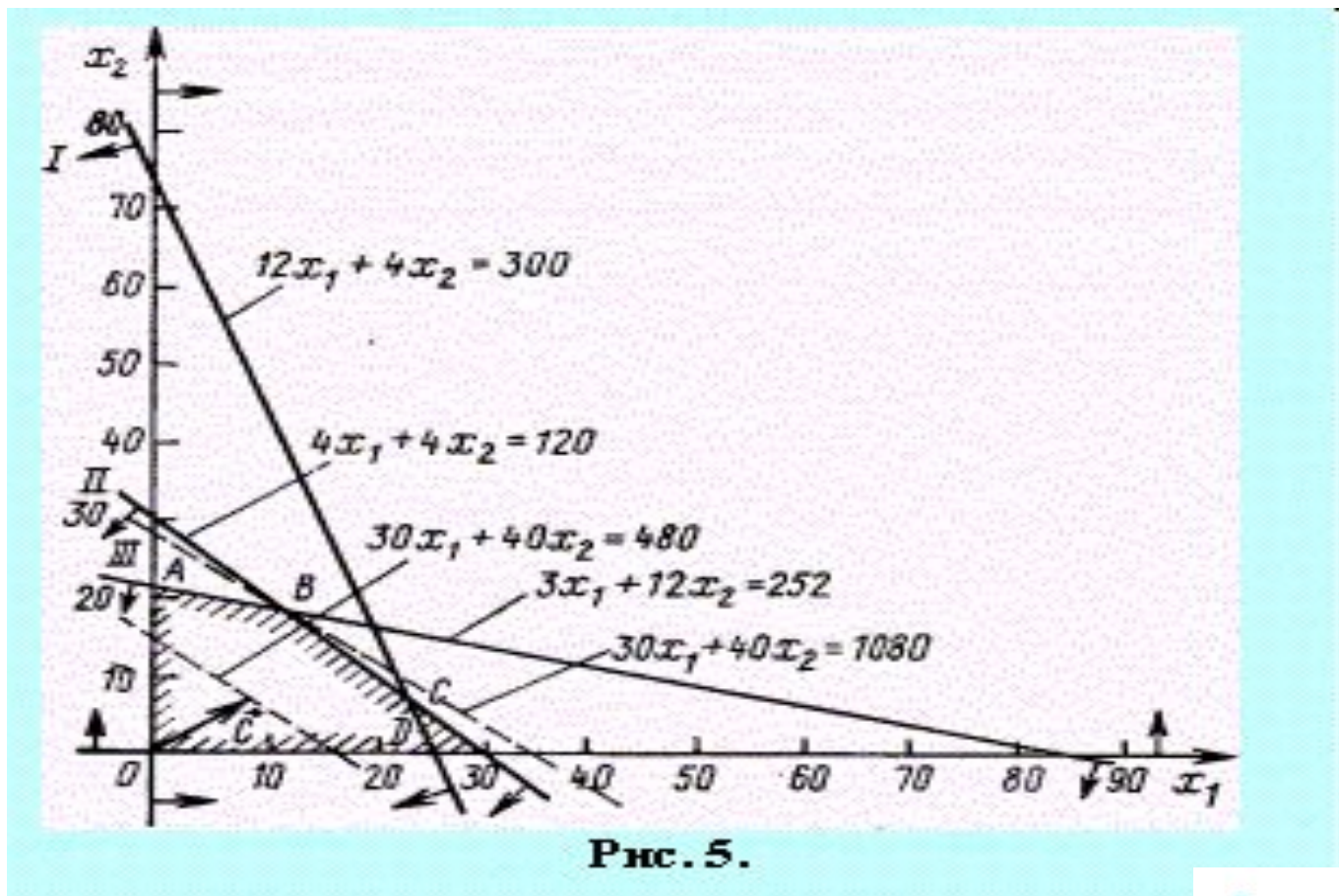
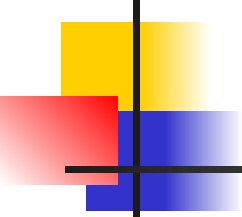


Рис. 5.



Координаты точки B и определяют план выпуска изделий A и B , при котором прибыль от их реализации является **максимальной**.

Найдем координаты точки B как точки пересечения прямых II и III. Следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнениям этих прямых

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, получим:

$$x_1^* = 12, x_2^* = 18.$$

Оптимальный план

$$\begin{aligned} x^* &= (12, 18) \\ f(x^*) &= 1080 \end{aligned}$$



Тип оборудования	Затраты времени (станко-часы) на обработку одного изделия каждого вида			Общий фонд рабочего времени оборудования (часы)
	А	В	С	
Фрезерное	2	4	5	120
Токарное	1	8	6	280
Сварочное	7	4	5	240
Шлифовальное	4	6	7	360
Прибыль (руб.)	10	14	12	



Задача на максимум

Сколько изделий и какого вида следует изготовить предприятию, чтобы прибыль от их реализации была максимальной?

Будет изготовлено:

x_1 единиц изделий вида А

x_2 единиц изделий вида В

x_3 единиц изделий вида С

Прибыль от их реализации составит:

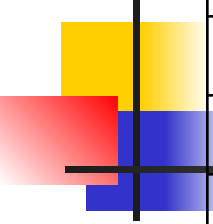
$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3. \quad \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120, \\ x_1 + 8x_2 + 6x_3 \leq 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 240, \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 360 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решим задачу с помощью симплекс-метода

Шаг 0								
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7
x4	120	2	4	5	1	0	0	0
x5	280	1	8	6	0	1	0	0
x6	240	7	4	5	0	0	1	0
x7	360	4	6	7	0	0	0	1
ИС	0	-10	-14	-12	0	0	0	0

Шаг 1								
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7
x2	30	1/2	1	5/4	1/4	0	0	0
x5	40	-3	0	-4	-2	1	0	0
x6	120	5	0	0	-1	0	1	0
x7	180	1	0	-1/2	-3/2	0	0	1
ИС	420	-3	0	11/2	7/2	0	0	0



Шаг 2								
Базис	БП	x 1	x 2	x 3	x 4	x 5	x 6	x 7
x2	18	0	1	5/4	7/20	0	-1/10	0
x5	112	0	0	-4	-13/5	1	3/5	0
x1	24	1	0	0	-1/5	0	1/5	0
x7	156	0	0	-1/2	-13/10	0	-1/5	1
ИС	492	0	0	11/2	29/10	0	3/5	0

Получен оптимальный план

$$x^* = (24, 18, 0)$$

$$f(x^*) = 492$$



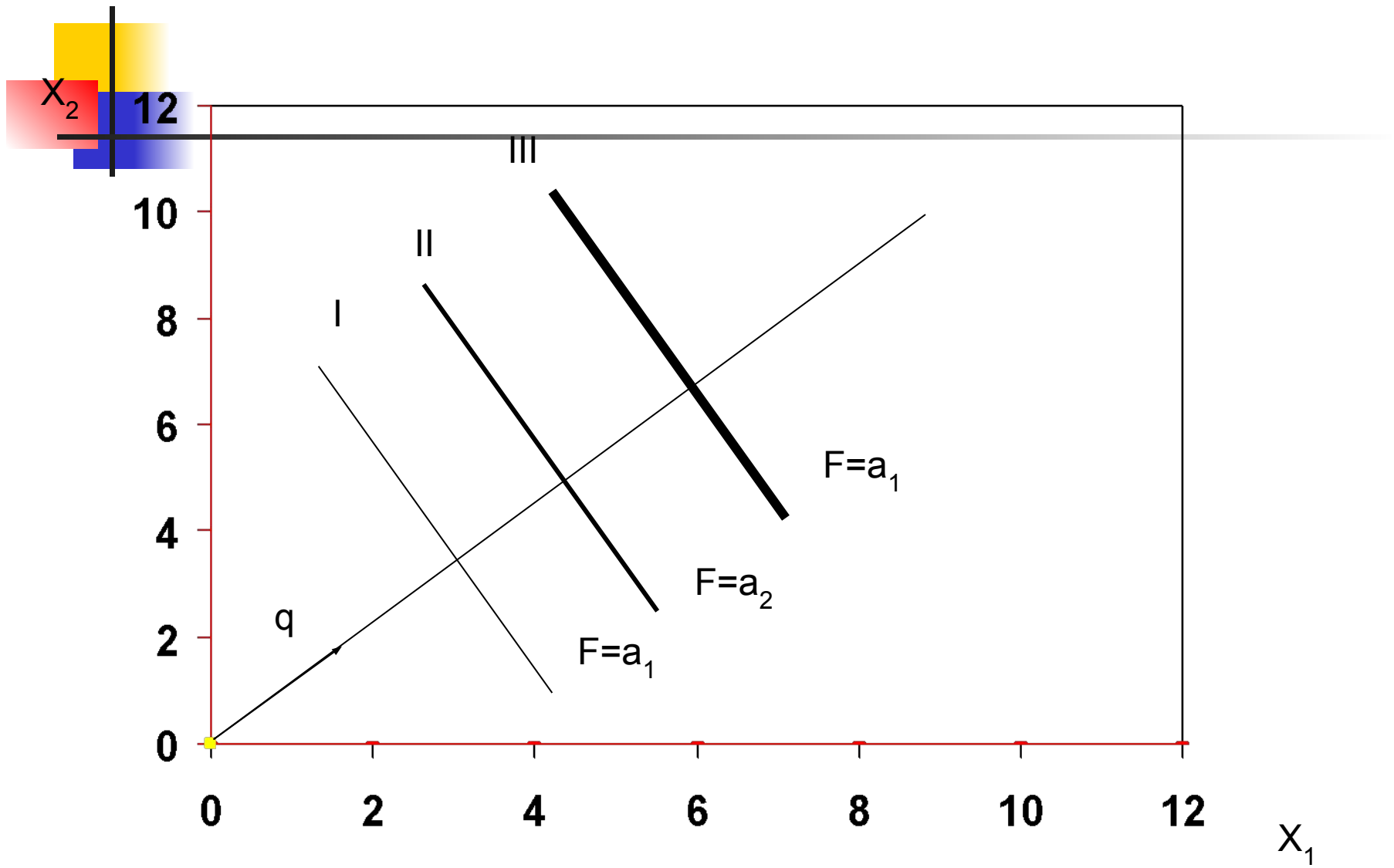
Геометрический метод решения задач линейного программирования

Основные понятия

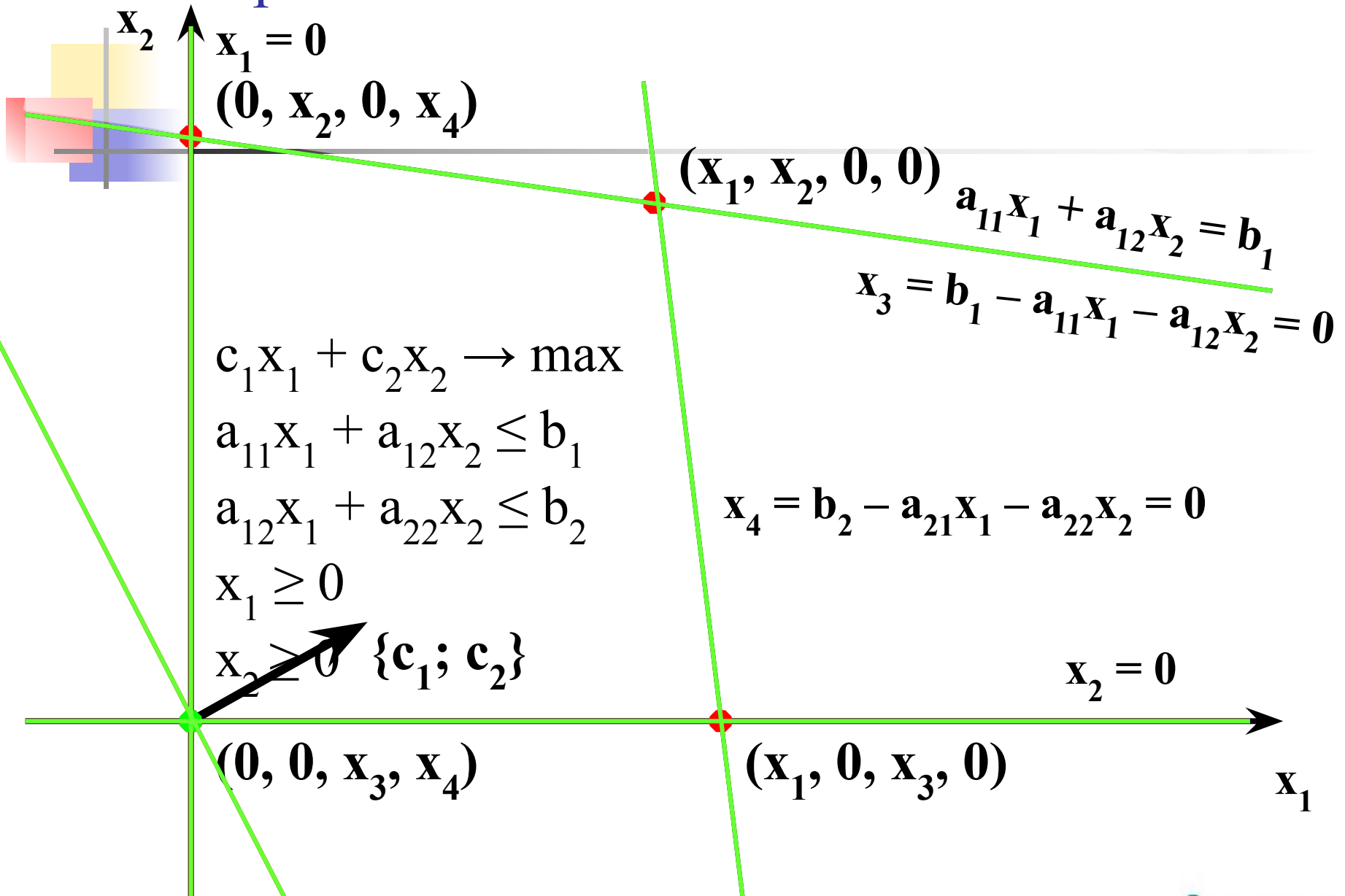


Линия уровня – линия, вдоль которой целевая функция принимает одно и то же фиксированное значение (а).

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 = a$$



Геометрический смысл



Условие задачи

Продукция	Цена (млн. руб./шт.)	ГО-1 (час/ед.)	ГО-2 (час/ед.)	Гос. Заказ (ед./мес.)
1	4	100	50	
2	2	200	50	
Общие		1200 (час/мес.)	400 (час/мес.)	4

$$4x_1 + 2x_2 \square \text{MAX}$$

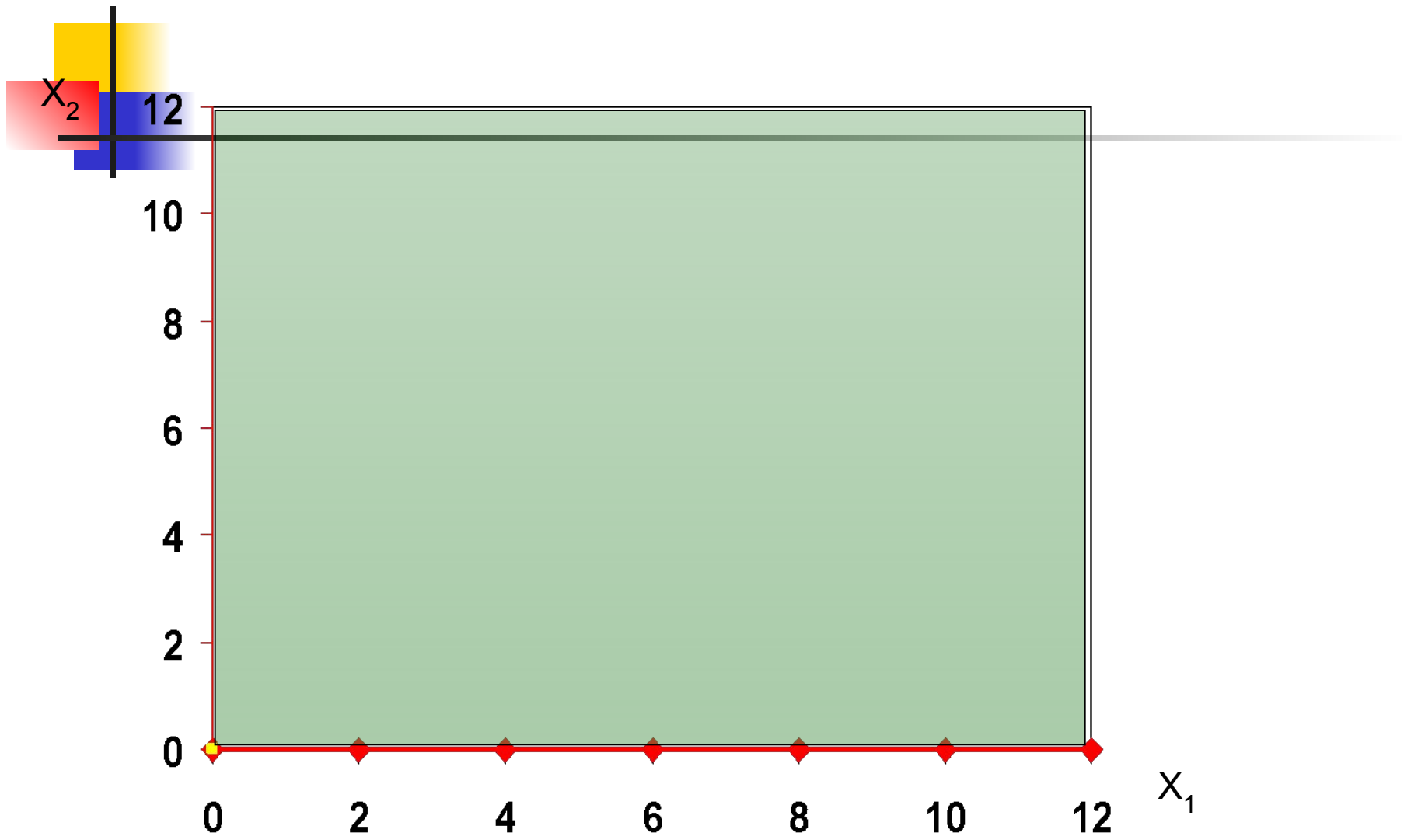
$$100x_1 + 200x_2 \leq 1200$$

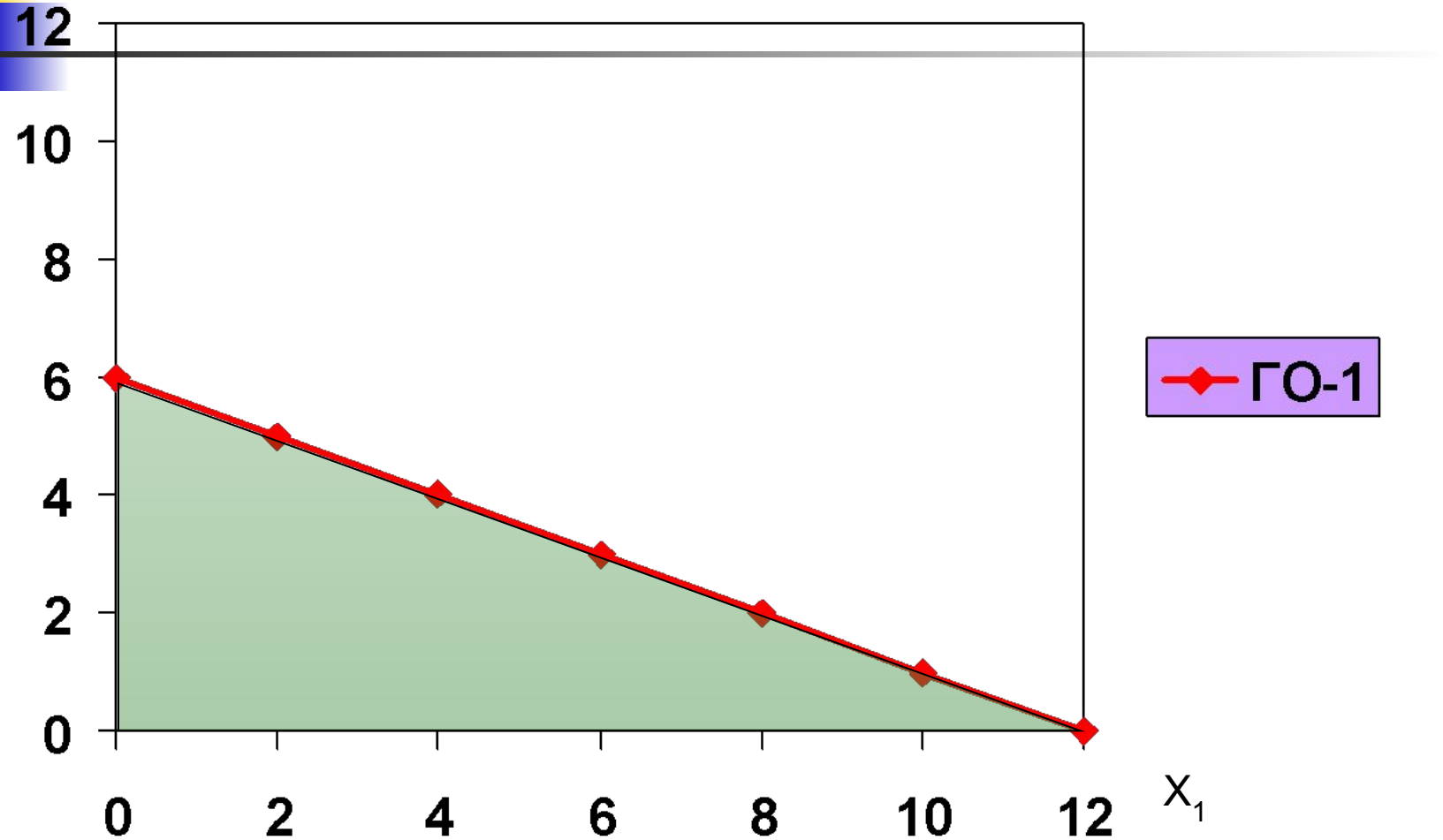
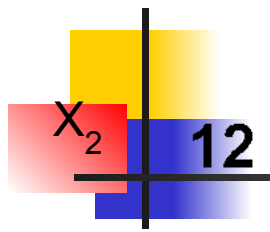
$$50x_1 + 50x_2 \leq 400$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

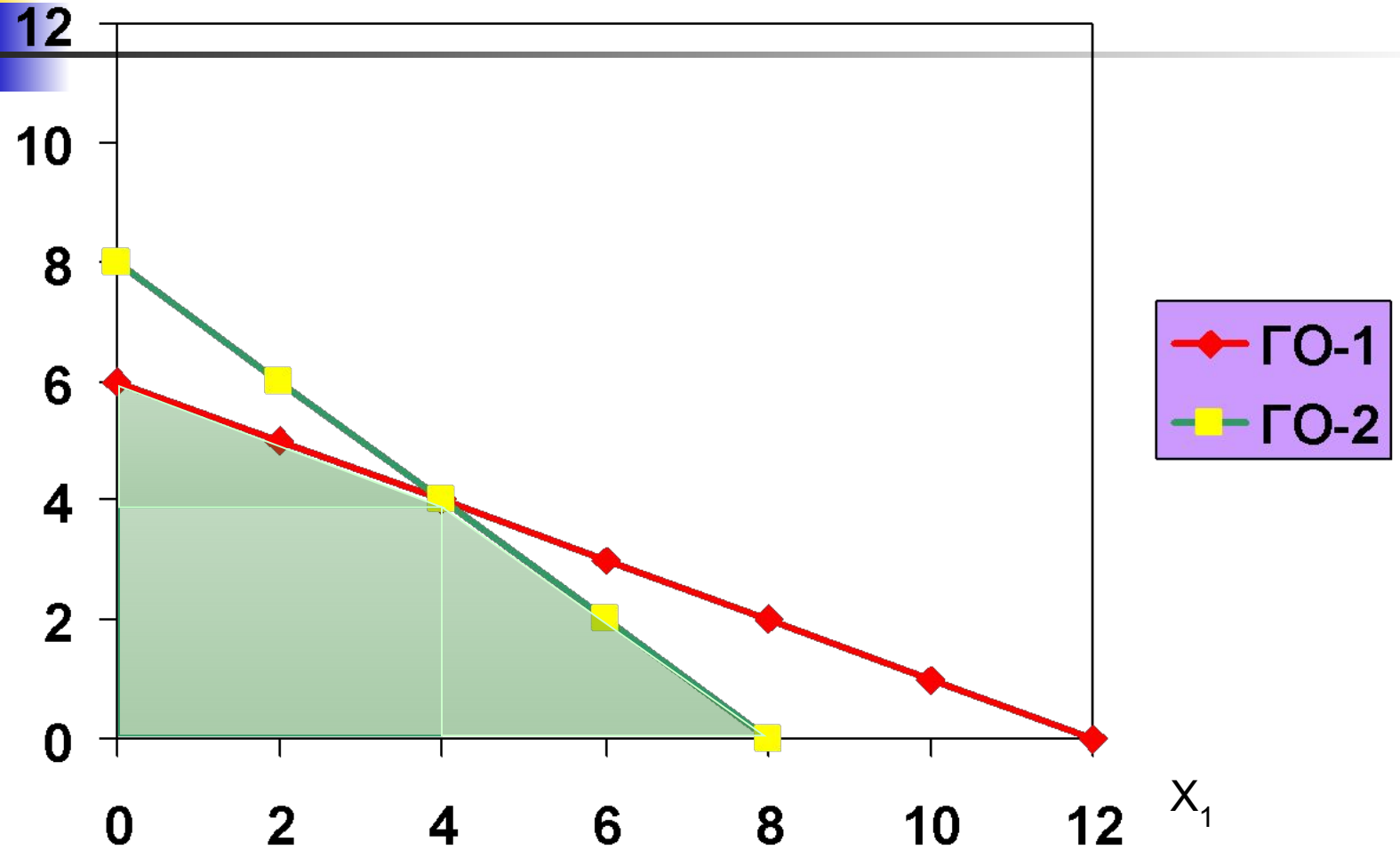
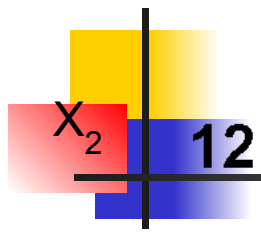
$$x_1 \geq 0$$

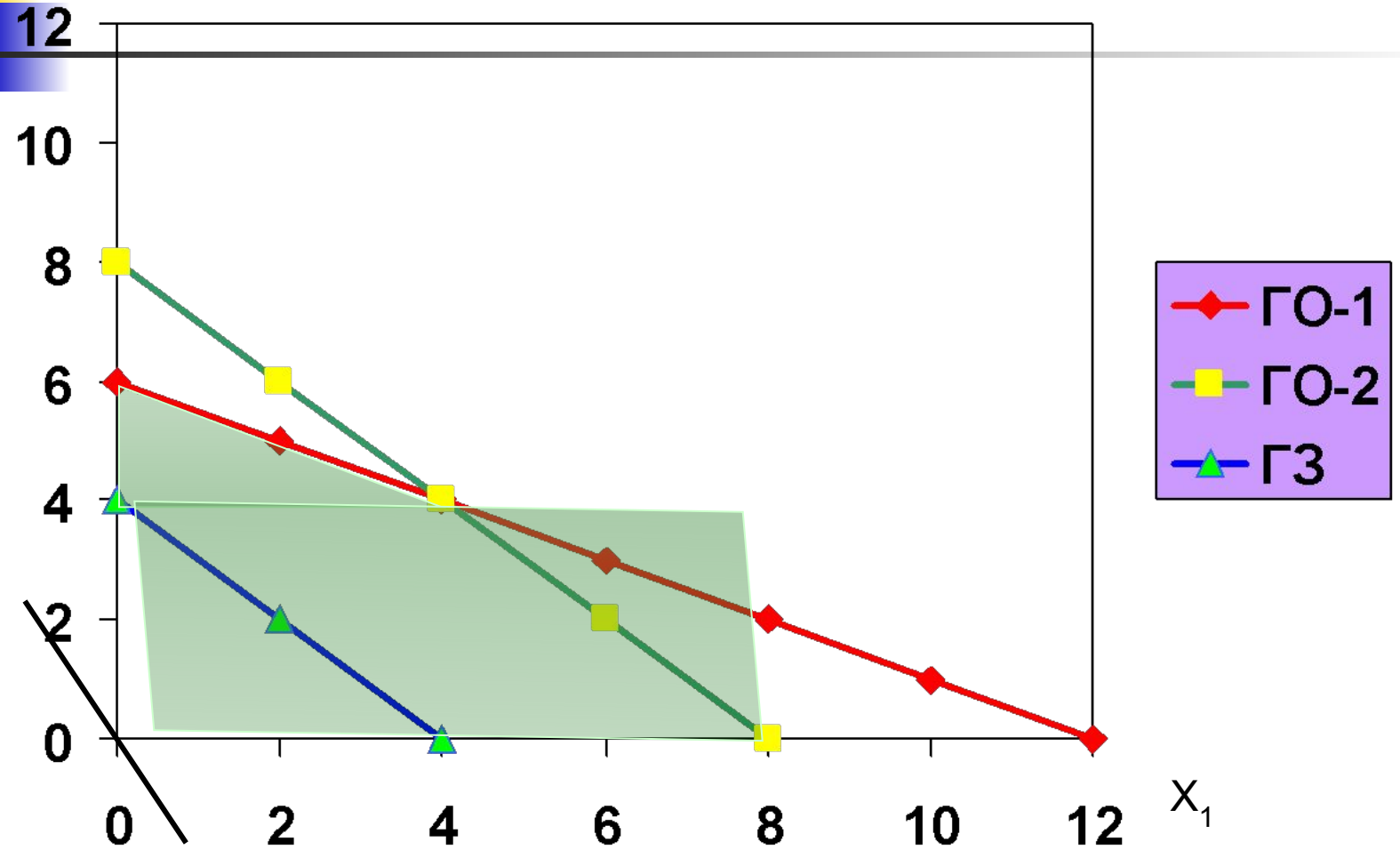
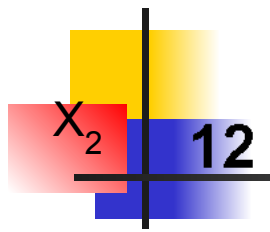
$$x_2 \geq 0$$



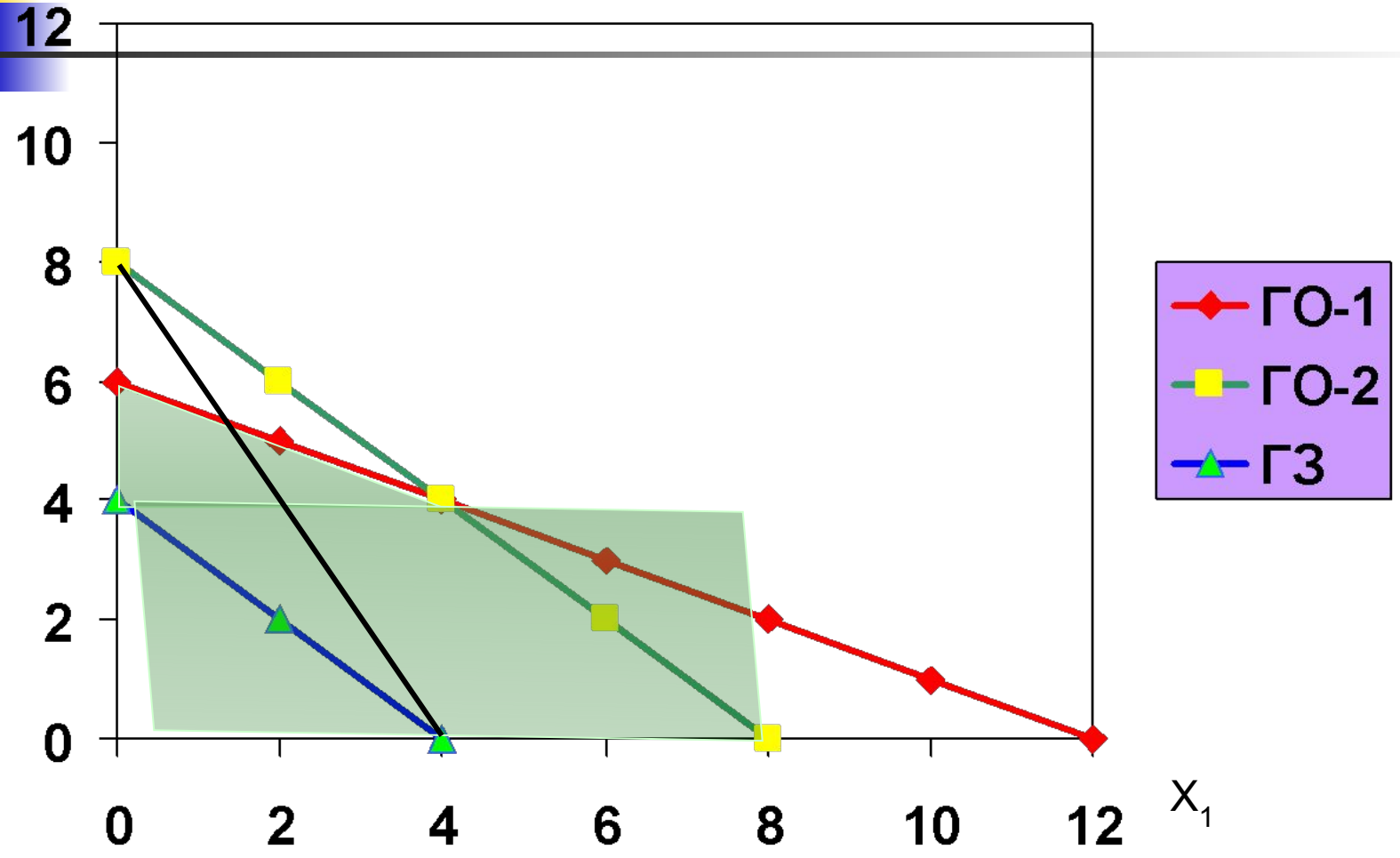
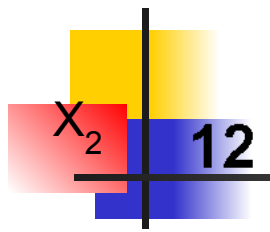


ГО-1





- ГО-1
- ГО-2
- ГЗ





Ответ и проверка

$$4x_1 + 2x_2 \square \text{MAX}$$

$$100x_1 + 200x_2 \leq 1200$$

$$50x_1 + 50x_2 \leq 400$$

$$x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$4*8 + 2*0 \square \text{MAX}$$

$$100*8 + 200*0 \leq 1200$$

$$50*8 + 50*0 \leq 400$$

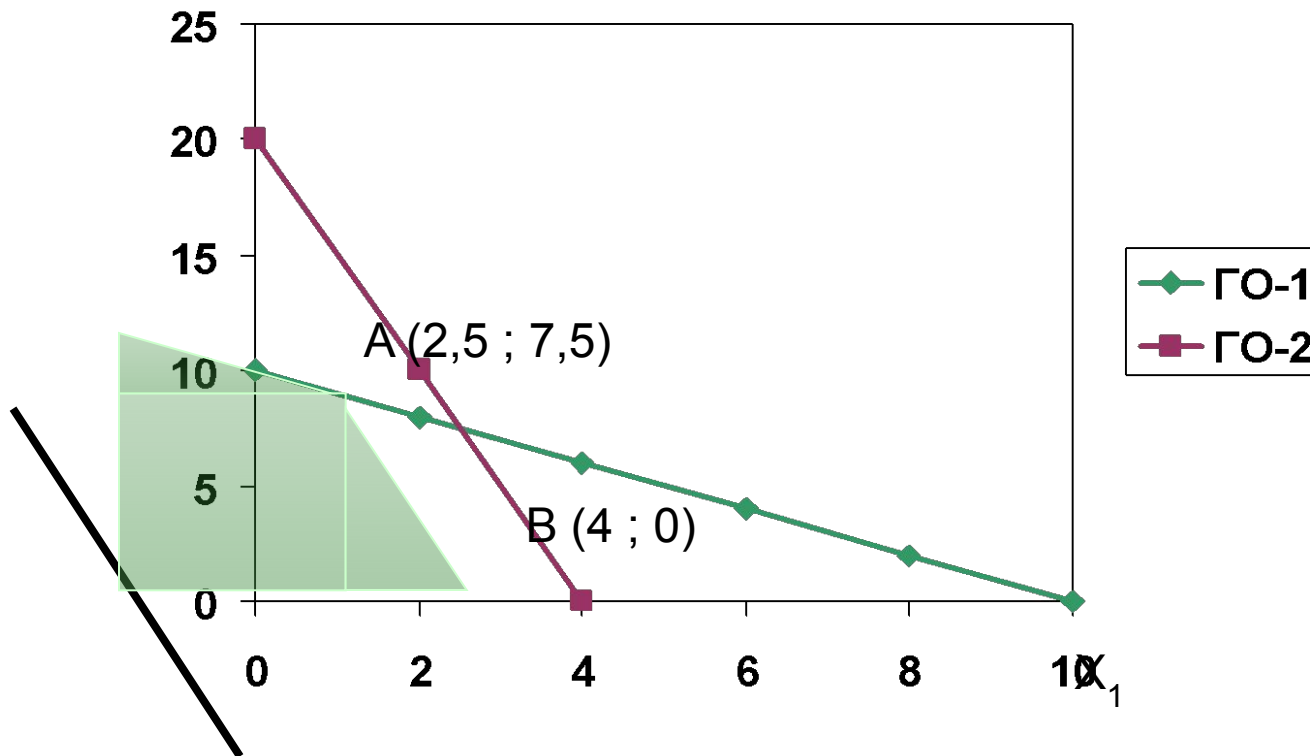
$$8 + 0 \geq 4$$

$$8 \geq 0$$

$$0 \geq 0$$

Задача с бесконечным множеством оптимальных решений

X_2



Координаты точек оптимальных решений

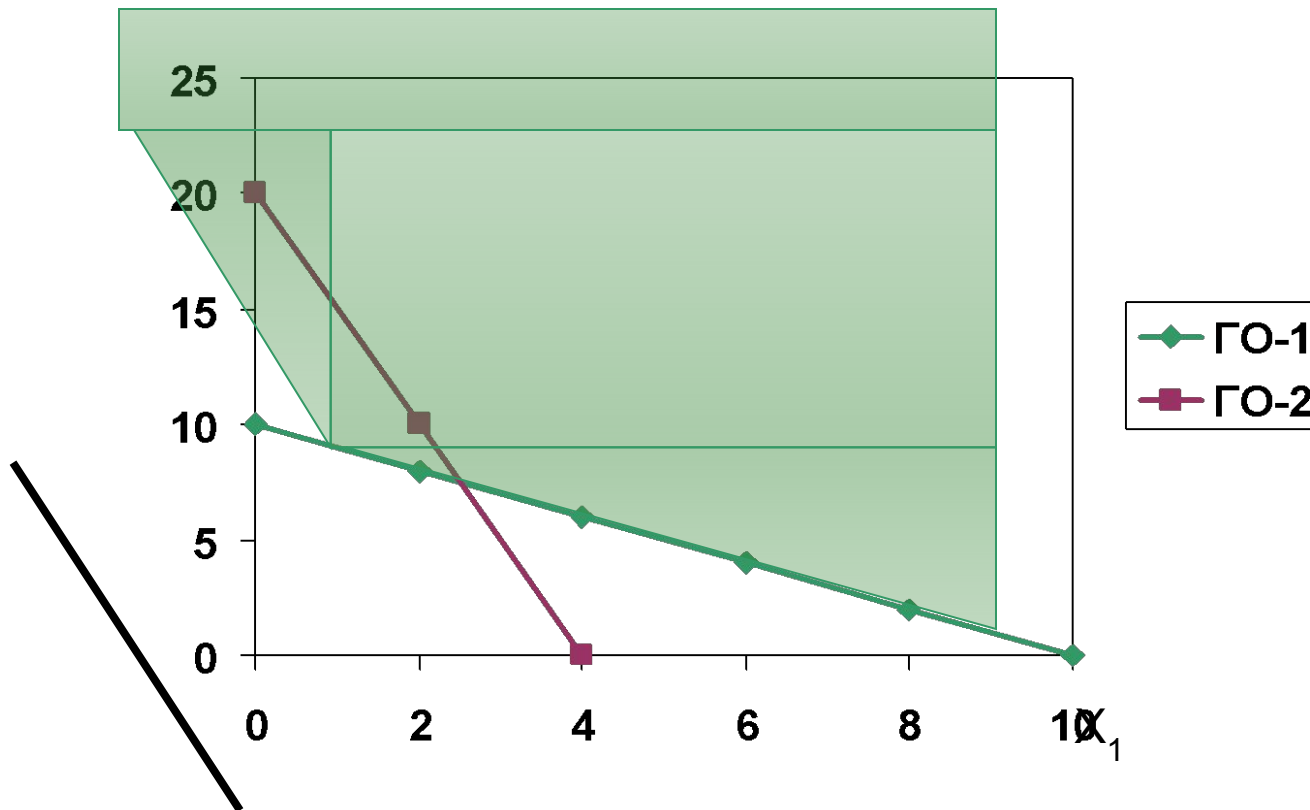
$$\begin{aligned} & a(2,5 ; 7,5) + (1 - a)(4 ; 0) = \\ & = (2,5a ; 7,5a) + (4 - 4a ; 0) = \\ & = (4 - 1,5a ; 7,5a) \end{aligned}$$

$$(4 ; 0), (3 ; 5), (2,5 ; 7,5)$$

$$0 \leq a \leq 1$$

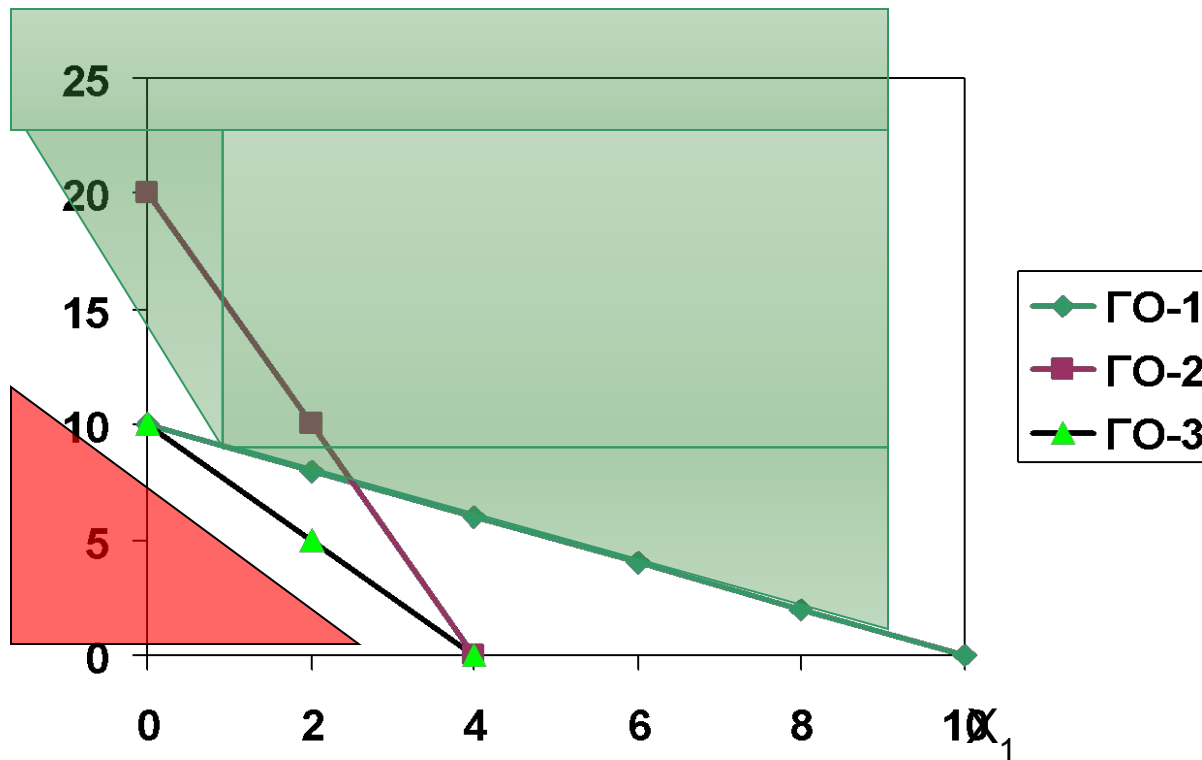
Задача не имеющая оптимального решения

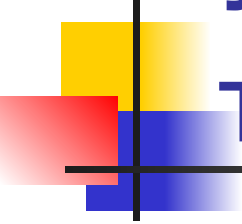
x_2



Задача не имеющая оптимального решения

x_2





Усложнённые постановки транспортной задачи

Ограничения пропускной способности:

- В стандартной постановке транспортной задачи предполагается, что из любого пункта по любой дороге может быть перевезено любое количество груза. Однако в реальных условиях и задачах так бывает далеко не всегда.
- При использовании нескольких видов транспорта может оказаться, что количество транспортных средств определённого вида, используемого на данном направлении, ограничено и т.д.
- Наиболее простой, но самый эффективный способ учёта ограничений по пропускной способности заключается в следующем:

- Известно, что на участке дороги от поставщика A2 до потребителя B1 пропускная способность ограничена и здесь можно провезти не более 15 единиц данного груза.
- Каких-либо ограничений по другим участкам сети дорог нет.

Таблица 1		Потребители и их спрос		
Поставщики и их мощности		B1	B2	B3
		35	25	90
A1	55	6	5	4/ 55
A2	45	1 /35	2/ 10	4
A3	50	3	2/15	3/35

- Дополнительные ограничения, если они существенны, т.е. если их учёт влечёт за собой изменение плана, приводят к ухудшению функционала.
- Понятно, что подобное построение матрицы может быть сделано введением дополнительно строки, а не столбца (Таблица 3)

Таблица 3		Потребители и их спрос		
Поставщики и их мощности		B1	B2	B3
A1	55	6	5	4/ 55
A2	15	1 / 15	2/	4
A2*	30	100	2/25	4/5
A3	50	3/20	2	3/30

Столбец, соответствующий участку с ограниченной пропускной способностью, разбивается на два столбца.

В первом из них спрос принимается равным разности между действительным спросом данного потребителя и размером ограничения пропускной способности, во втором – равным ограничению.

Таблица 2		Потребители и их спрос				
		В1	В1*	В2	В3	
Поставщики и их мощности		20	15	25	90	
A1	55	6	6	5	4/ 55	
A2	45	100	1/15	2/25	4/5	
A3	50	3/20	3	2	3/30	

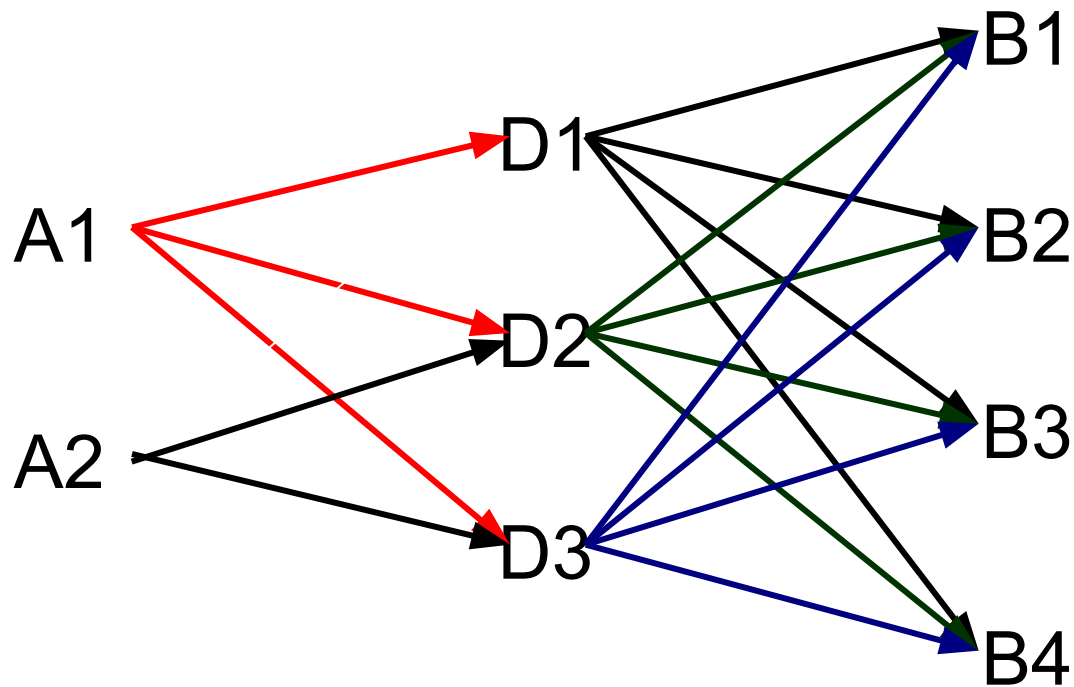
Показатели c_{ij} одинаковы в обоих столбцах, но в первом, в том месте, которое соответствует участку с ограниченной пропускной способностью, вместо истинного показателя c_{ij} ставится число, намного большее, чем все остальные элементы матрицы.

Многоэтапная задача

Поставщики

Склады

Потребители




$$\sum d_k = \sum a_i = \sum b_j$$

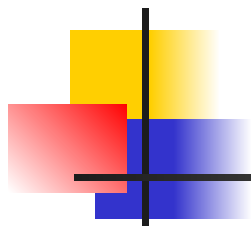
Если суммарная ёмкость складов равна суммарной мощности и суммарному спросу потребителей ёмкость каждого склада будет использоваться полностью и схема перевозок груза со складов к потребителям не зависит от схемы перевозок груза от поставщиков на склады и со складов потребителям.

Способ Ордена-Маша

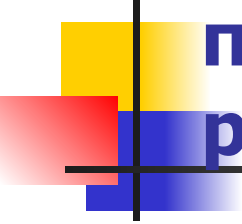
Таблица 1		Потребители и промежут. пункты, спросы						
Поставщики и промежут. пункты	Мощ- ности	D1	D2	D3	B1	B2	B3	B4
		550	550	550	200	300	150	350
A1	400	1	2	3	NE	NE	NE	NE
A2	600	6	4	3	NE	NE	NE	NE
D1	550	0	NE	NE	5	3	1	3
D2	550	NE	0	NE	1	2	3	4
D3	550	NE	NE	0	8	7	6	5

Таблица 2		Потребители и промежут. пункты, спросы							ПОТЕНЦИАЛЫ	ПОТЕН
Поставщики и промежут. пункты	Мощ- ности	D1	D2	D3	B1	B2	B3	B4		
		550	550	550	200	300	150	350		
A1	400	1 400	2	3	NI	NI	NI	NI		1
A2	600	6 100	4 500	3	NI	NI	NI	NI		6
D1	550	0 50	NI	NI	5	3	1 150	3 350		0
D2	550	NI	0 50	NI	1 200	2 300	3	4		2
D3	550	NI	NI	0 550	8	7	6	5		3
Потенциалы		0	-2	-3	-1	0	1	3		

Таблица 3		Потребители и промезут. пункты, спросы							Потенциалы	Потенциалы
Поставщики и промезут. пункты	Мощности	D1	D2	D3	B1	B2	B3	B4		
		550	550	550	200	300	150	350		
A1	400	1 400	2	3	NI	NI	NI	NI	1	
A2	600	6	4 550	3 50	NI	NI	NI	NI	5	
D1	550	0 150	NI	NI	5	3	1 150	3 250	0	
D2	550	NI	0	NI	1 200	2 300	3	4 50	1	
D3	550	NI	NI	0 500	8	7	6	5 50	2	
Потенциалы		0	-1	-2	0	1	1	3		



Двойственные задачи



Любая задача линейного программирования (даже не имеющая решений) имеет двойственную задачу.

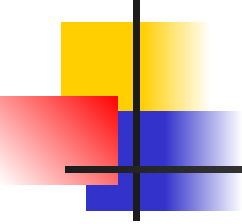
- Прежде чем строить двойственную задачу в задаче на \max все неравенства приводят к знаку \leq , а в задаче на \min – к \geq .
- Т. о. в задаче на \max знаки могут быть либо « \leq », либо « $=$ ».

Правило построения двойственной задачи:

- Если исходная задача на max, то двойственная на min и наоборот.
- В двойственной задаче столько переменных, сколько ограничений в исходной, прием эти переменные соответствуют ограничениям и наоборот.
- Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются правые части ограничений исходной задачи.
- Матрица коэффициентов ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы коэффициентов ограничений исходной задачи.
- Правыми частями ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции исходной.
- Ограничениям неравенствам исходной задачи соответствуют неотрицательные переменные двойственной задачи, а ограничениям равенствам – переменные любого знака и наоборот.

$$\begin{aligned} f(x) = 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 + x_4 &\rightarrow \max \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &\leq 5 \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &\leq 7 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(y) = 5y_1 + 7y_2 &\rightarrow \min \\ y_1 &\geq 0 \\ y_2 &\geq 0 \\ y_1 + 5y_2 &\geq 12 \\ 2y_1 + 4y_2 &\geq 3 \\ y_1 + y_2 &\geq 5 \\ y_1 + 2y_2 &\geq 1 \end{aligned}$$

- 
- $f(x) \leq g(y)$ - основное неравенство двойственности
 - **Теорема 1:** Если исходная задача имеет оптимальный план x^* , то двойственная задача также имеет оптимальный план y^* , причем значения функций на этих планах равны: $f(x^*) = g(y^*)$
 - **Теорема 2:** Если исходная и двойственная задачи имеют планы, то они имеют и оптимальные планы, причем $f(x^*) = g(y^*)$

Признаки оптимальности для двойственных задач

- **Признак1:** Если исходная и двойственная задачи имеют планы X и Y , причем $f(X)=g(Y)$, то эти планы оптимальные.
- **Определение:** Ограничения расположенные на одной строке в схеме пары двойственных задач называют сопряженными.
- **Признак2:** Для того, чтобы планы X и Y исходной и двойственной задач были оптимальны, необходимо и достаточно чтобы на этих планах хотя бы одно из каждой пары сопряженных ограничений являлось равенством.
- **Второй признак** позволяет зная оптимальный план одной из задач найти оптимальный план другой задачи.

Решим исходную задачу симплекс методом:

$$f(x) = 3x_1 + 12x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 5$$

$$5x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 7$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

$$x_4 \geq 0$$

$$g(y) = 5y_1 + 7y_2 \rightarrow \min$$

$$y_1 \geq 0$$

$$y_2 \geq 0$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 3$$

$$2y_1 + 4y_2 \geq 12$$

$$y_1 + y_2 \geq 5$$

$$y_1 + 2y_2 \geq 1$$

Ц	Б	П	x1	x2	x3	x4	x5	x6
			3	12	5	1	0	0
0	x5	5	1	2	1	1	1	0
0	x6	-7	5	4	1	2	0	1
		0	-3	-12	-5	-1	0	0


Ц	Б	П	x1	x2	x3	x4	x5	x6
			3	12	5	1	0	0
5	x3	3	-3	0	1	0	2	0
12	x2	1	2	1	0	1/2	-1/2	1/2
		27	6	0	0	5	4	1

$$X^* = (0, 1, 3, 0)$$

Оптимальные значения переменных двойственной задачи можно найти в последней симплекс таблице в индексной строке под соответствующими добавленными переменными.

$$Y^* = (4, 1)$$

Ц	Б	П	x1	x2	x3	x4	x5	x6
			3	12	5	1	0	0
5	x3	5	1	2	1	1	1	0
0	x6	2	4	2	0	1	-1	1
		25	2	-2	0	4	5	0



*Закрытая транспортная задача.
Метод потенциалов*



Определение

Закрытая транспортная задача – задача о перевозке однородной продукции, когда имеется m поставщиков, для которых известны запасы, и n потребителей, для которых известны потребности, а также известны стоимости перевозки одной единицы продукции от каждого поставщика к каждому потребителю, причем суммарные запасы поставщиков равны суммарным потребностям потреби

[Оглавление](#)



Постановка задачи

Требуется составить план перевозок – указать, какое кол-во продукции нужно перевезти от каждого поставщика каждому потребителю, чтобы:

- Суммарная стоимость перевозок была **минимальна**
- Все поставщики были **разгружены**
- Все потребители были **удовлетворены**



Обозначения

- b_i – множество поставщиков
- a_j – множество потребителей
- c_{ij} – цены перевозок единицы товара от i -го поставщика к j -му потребителю
- x_{ij} – планируемый объем перевозок от i -го поставщика к j -му потребителю



Целевая функция

$$f(X) = \sum \sum c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$



Представление задачи в виде таблицы

	b_1	b_2	b_3
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}

Двойственная задача

$f(X) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23} \rightarrow \min$	$g(U,V) = a_1u_1 + a_2u_2 + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3 \rightarrow \max$
$x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$	$u_1 \in \mathbb{R}$
$x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$	$u_2 \in \mathbb{R}$
$x_{11} + x_{21} = b_1$	$v_1 \in \mathbb{R}$
$x_{12} + x_{22} = b_2$	$v_2 \in \mathbb{R}$
$x_{13} + x_{23} = b_3$	$v_3 \in \mathbb{R}$
$x_{11} \geq 0$	$u_1 + v_1 \leq c_{11}$
$x_{12} \geq 0$	$u_1 + v_2 \leq c_{12}$
$x_{13} \geq 0$	$u_1 + v_3 \leq c_{13}$
$x_{21} \geq 0$	$u_2 + v_1 \leq c_{21}$
$x_{22} \geq 0$	$u_2 + v_2 \leq c_{22}$
$x_{23} \geq 0$	$u_2 + v_3 \leq c_{23}$



Метод потенциалов

	b_1	b_2	b_3	
a_1	c_{11} - x_{11}	c_{12} + x_{12}	c_{13} <	u_1
a_2	c_{21} + >	c_{22} - x_{22}	c_{23} x_{23}	u_2
	v_1	v_2	v_3	

Практический пример

$\Sigma=60$	12	15	17	16
10	14	13	12	15
20	16	17	18	22
30	14	15	16	11

Практический пример

$\Sigma=60$	12	15	17	16
10	14	13	12	15
20	16	17	18	22
30	14	15	16	11
	12	2		16



Практический пример

$\Sigma=60$	12	15	17	16				
10	14	13	10	12	15	-2		
20	16	17	3	18	17	22	2	
30	14	12	15	2	16	11	16	0
	14	15	16	16	11			

Практический пример

$\Sigma=60$	12	15	17	16	
10	14 <	13 10	- 12 +	15 <	-2
20	16 =	17 + 3	18 - 17	22 <	2
30	14 12	15 2	16 =	11 16	0
	14	15	16	11	

Практический пример

$\Sigma = 60$	12	15	17	16	
10	14 <	13 =	12 10	15 <	-2
20	16 =	17 13	18 7	22 <	2
30	14 12	15 2	16 =	11 16	0
	14	15	16	11	



Практический пример

$X^* =$	0	0	10	0
	0	13	7	0
	12	2	0	16

$$f(X^*) = 120 + 221 + 126 + 168 + 30 + 176 = 841$$