2. Теорема. (Интегрирование суммы неотрицательных измеримых функций). *Пусть* $C \in \Sigma$ *и функции* f, $g : C \to [0, +\infty]$ *измеримы. Тогда*

$$\int_C (f + g)\, d\mu = \int_C f\, d\mu + \int_C g\, d\mu . \tag{4}$$

Доказательство. Функция $f + g$ на множестве C также неотрицательна. Множества $f^{-1}(+\infty)$ и $g^{-1}(+\infty)$ согласно следствию теоремы 3 §3 гл.1 измеримы. Функция $f + g$ на множестве $B = f^{-1}(+\infty) \cup g^{-1}(+\infty)$ постоянна (равна $+\infty$) и поэтому измерима. На множестве $C \setminus B$ функция $f + g$ измерима по свойству (d) §3 гл.1. Применяя еще свойство (b) §3 гл.1, заключаем, что функция $f + g : C \to [0, +\infty]$ измерима.

Если один из интегралов правой части равенства (4) равен $+\infty$, то левый интеграл также равен $+\infty$, по свойству (d) §2 и, значит в этом случае равенство (4) верно.

Допустим, что конечны оба интеграла правой части равенства (4). В этом случае нам потребуется следующая лемма

3. Лемма. *Пусть функция* $f : C \to [0, +\infty]$ *измерима и* $\int\limits_C f \, d\mu < +\infty$. *Тогда существует возрастающая последовательность* (φ_n) *неотрицательных простых функций такая, что*

$$f(t) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) \text{ для всех } t \in C. \tag{5}$$

Итак, пусть $\int\limits_C f \, d\mu < +\infty$ и $\int\limits_C g \, d\mu < +\infty$.

По лемме 3 существуют возрастающие последовательности (φ_n) и (ψ_n) простых функций, такие, что для каждого $t \in C$

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) = f(t) \text{ и } \lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = g(t).$$

Тогда последовательность $(\varphi_n + \psi_n)$ также возрастает и

$$\lim_{n \to \infty} \left[\varphi_n(t) + \psi_n(t) \right] = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t) + \lim_{n \to \infty} \psi_n(t) = f(t) + g(t).$$

для всех $t \in C$.

По части (*) теоремы 6 §1 для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int\limits_C (\varphi_n + \psi_n) \, d\mu = \int\limits_C \varphi_n \, d\mu + \int\limits_C \psi_n \, d\mu .$$

Переходя здесь к пределу (и применяя при этом теорему 1 о монотонной сходимости) получим искомое равенство (1).

4. Теорема. (О почленном интегрировании функционального ряда из неотрицательных измеримых функций). *Пусть* (f_n) – *последовательность неотрицательных измеримых функций на множестве* $C \in \Sigma$. *Тогда функция* $f : C \to [0, +\infty]$, *действующая по формуле* $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ *для каждого* $t \in C$, *измерима и справедливо равенство*

$$\int\limits_C f \, d\mu = \int\limits_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_C f_n \, d\mu .$$

Доказательство. Обозначим $g_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$. Функции g_n измеримы, неотрицательны, образуют возрастающую последовательность и $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) = \lim\limits_{n \to \infty} g_n(t)$ для каждого $t \in C$.

По **теореме 2** функция для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_C g_n \, d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k \, d\mu .$$

Применяя еще теорему Б. Леви о монотонной сходимости, получим

$$\int_C f \, d\mu = \int_C \left(\lim_{n \to \infty} g_n \right) d\mu =$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_C g_n \, d\mu = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \int_C f_k \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k \, d\mu . \square$$

5. Теорема. (О нулевом интеграле). *Пусть* $C \in \Sigma$. *Для измеримой функции* $f : C \to [0, +\infty]$ *равносильны равенства*:

(*) $\int_C f \, d\mu = 0$, (**) $\mu B = 0$, где $B = \{ t \in C \; ; \; f(t) > 0 \}$.

Доказательство. Пусть $\int_C f \, d\mu = 0$. Обозначим

$$B = \{ t \in C \; ; \; f(t) > 0 \}, \; B_n = \{ t \in C \; ; \; f(t) > 1/n \}, \; n \in \mathbb{N} .$$

Тогда $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Согласно свойству (g) §2 $\mu B_n < +\infty$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Значит, функции $\varphi_n = \frac{1}{n} \chi_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, – простые. Очевидно $0 \leqslant \varphi_n \leqslant f$ на C и поэтому

$$0 = \int_C f \, d\mu \geqslant \int_C \varphi_n \, d\mu = \frac{\mu B_n}{n}.$$

Отсюда следует, что $\mu B_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, и $\mu B = 0$.

С другой стороны, пусть $\mu B = 0$ и φ – простая функция такая, что $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ на C. Поскольку $f = 0$ на $C \setminus B$, то и $\varphi = 0$ на $C \setminus B$. Поэтому $\int_{C \setminus B} \varphi \, d\mu = 0$. Из равенства $\mu B = 0$ согласно свойству 1(c) следует, что $\int_B \varphi \, d\mu = 0$. По части (*) теоремы 6 §1

$$\int_C \varphi \, d\mu = \int_{C \setminus B} \varphi \, d\mu + \int_B \varphi \, d\mu = 0.$$

Следовательно,

$$\int_C f\,d\mu \;=\; \sup_{0\leqslant\varphi\leqslant f}\int_C \varphi\,d\mu \;=\; 0. \qquad \square$$

6. Теорема (О счетной аддитивности интеграла от неотрицательной измеримой функции). *Пусть* $C\in\Sigma$ *и функция* $f : C\to[0,+\infty]$ *измерима. Если множества* $A_n\in\Sigma$, $n\in\mathbb{N}$, *попарно не пересекаются, содержатся во множестве* $C\in\Sigma$ *и* $A = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, *то справедливо равенство*

$$\int_A f\,d\mu \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\,d\mu. \tag{*}$$

Доказательство. Для всех $n\in\mathbb{N}$ введем функции

$$g_n : C\to[0,+\infty],\quad g_n(t) \;=\; \begin{cases} f(t), & \text{если} \quad t\in A_n, \\ 0, & \text{если} \quad t\in C\setminus A_n, \end{cases}$$

и еще одну функцию

$$g_n : C \to [0, +\infty], \quad g(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если} \quad t \in A, \\ 0, & \text{если} \quad t \in C \setminus A. \end{cases}$$

По условию функция f измерима. Отсюда согласно свойствам (a) и (b) § 3 гл.1 следует, что функции g и g_n, $n \in \mathbb{N}$, измеримы. Из равенства $A = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ следует, что $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ для каждого $t \in C$.

Применяя к данному ряду теорему 4, получим $\int_C g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C g_n\, d\mu$.

Из определения функций g и g_n по свойству (h) §2 следует, что

$$\int_C g\, d\mu = \int_A g\, d\mu = \int_A f\, d\mu, \quad \int_C g_n\, d\mu = \int_{A_n} g_n\, d\mu = \int_{A_n} f\, d\mu.$$

Поэтому предыдущее равенство совпадает с требуемым равенством (*). □

§4. Суммируемые функции

Пусть функция $f : C \to [-\infty, +\infty]$ измерима. По следствию 2 § 3 гл.1 неотрицательные функции $f^+ = \max(0, f)$ и $f^- = \max(0, -f)$ измеримы и справедливы равенства

$$f = f^+ - f^-, \ |f| = f^+ + f^-.$$

Эти функции применяются для определения интеграла $\int\limits_C f\, d\mu$.

1. Определение. Пусть $C \in \Sigma$ и функция $f : C \to [-\infty, +\infty]$ измерима. Интегралы

$$\int\limits_C f^+\, d\mu, \quad \int\limits_C f^-\, d\mu, \qquad (1)$$

конечные или равные $+\infty$, определены, так как функции f^+ и f^- измеримы и неотрицательны. Если хотя бы один из этих интегралов конечен, то имеет смысл их разность и в этом случае *интеграл от функции* f *по множеству* C и *по мере* μ определяется равенством

$$\int_C f\, d\mu = \int_C f^+\, d\mu - \int_C f^-\, d\mu . \qquad (2)$$

Если оба интеграла (1) конечны, то говорят, что функция f на множестве C *суммируема* (или *интегрируема в смысле Лебега*) *по мере* μ. Множество всех функций $f : C \to [-\infty, +\infty]$, суммируемых по мере μ, обозначается символом $L(\mu, C)$.

Замечания. 1) Для неотрицательной измеримой функции новое определение интеграл дает прежний результат.

2) Неотрицательная измеримая функция суммируема на множестве C тогда и только тогда, когда $\int_C f\, d\mu < +\infty$.

Установим основные свойства интеграла от произвольной измеримой функции.

2. Теорема. (Об абсолютной интегрируемости). *Для измеримой функции* $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *равносильны условия*

$$(*)\ f \in L(\mu, C),$$

$$(**)\ |f| \in L(\mu, C).$$

Доказательство. Если $|f| \in L(\mu, C)$, т.е. $\int\limits_C |f|\, d\mu < +\infty$, то по свойству (d) §2 $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$ и $\int\limits_C f^- d\mu < +\infty$, так как $0 \leqslant f^+ \leqslant |f|$ и $0 \leqslant f^- \leqslant |f|$. Поэтому интеграл (2) конечен, т.е. $f \in L(\mu, C)$.

3. Теорема. (Об оценке интеграла). *Если функция* $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *измерима и интеграл* (2), *конечный или равный* $\pm\infty$, *существует, то* $\left| \int\limits_C f\, d\mu \right| \leqslant \int\limits_C |f|\, d\mu$.

Доказательство. По условию конечен по крайней мере один из интегралов (1). Поэтому

$$\left|\int\limits_C f\,d\mu\right| = \left|\int\limits_C f^+ d\mu - \int\limits_C f^- d\mu\right| \leqslant \left|\int\limits_C f^+ d\mu\right| + \left|\int\limits_C f^- d\mu\right| = \int\limits_C |f|\,d\mu\ .\square$$

4. Теорема. (О монотонности интеграла). *Пусть функции* $f,\ g,\ h : C \to [-\infty, +\infty]$ *измеримы и*

$$f(t) \leqslant g(t) \leqslant h(t) \text{ для всех } t \in C. \quad (*)$$

Если $g \in L(\mu, C)$, *то интегралы* $\int\limits_C f\,d\mu$ *и* $\int\limits_C h\,d\mu$ *существуют и справедливы неравенства* $-\infty \leqslant \int\limits_C f\,d\mu \leqslant \int\limits_C g\,d\mu \leqslant \int\limits_C h\,d\mu \leqslant +\infty$.

Доказательство. Если $\varphi \leqslant \psi$, то

$$\varphi^+ = \max(0, \varphi) \leqslant \max(0, \psi) = \psi^+,\ \varphi^- = \max(0, -\varphi) \geqslant \max(0, -\psi) = \psi^-.$$

Поэтому из неравенств (*) следует, что

$$f^+ \leqslant g^+ \leqslant h^+, \quad f^- \geqslant g^- \geqslant h^-.$$

Из соотношений $f^+ \leqslant g^+,\ h^- \leqslant g^-$ и $g \in L(\mu, C)$ следует, что

$$\int_C f^+ d\mu \leqslant \int_C g^+ d\mu < +\infty, \quad \int_C h^- d\mu \leqslant \int_C g^- d\mu < +\infty.$$

Поэтому интегралы $\int_C f\, d\mu$, $\int_C h\, d\mu$ существуют и по свойству (d) §2.

$$-\infty \leqslant \int_C f\, d\mu = \int_C f^+ d\mu - \int_C f^- d\mu \leqslant \int_C g^+ d\mu - \int_C g^- d\mu = \int_C g\, d\mu$$

$$\int_C g\, d\mu = \int_C g^+ d\mu - \int_C g^- d\mu \leqslant \int_C h^+ d\mu - \int_C h^- d\mu = \int_C h\, d\mu \leqslant +\infty. \quad \square$$

5. Теорема. (Об интегрировании по подмножеству). *Пусть* $A,\ C \in \Sigma,\ A \subset C$ *и* $f \in L(\mu, C)$. *Тогда* $f \in L(\mu, A)$.

Доказательство. Из условия $f \in L(\mu, C)$ следует, что $\int\limits_C f^+ \, d\mu < +\infty$ и $\int\limits_C f^+ \, d\mu < +\infty$. По свойству (с) §2 $\int\limits_A f^+ \, d\mu \leqslant \int\limits_C f^+ \, d\mu$ и $\int\limits_A f^- \, d\mu \leqslant \int\limits_C f^- \, d\mu$. Следовательно, $\int\limits_A f^+ \, d\mu < +\infty$ и $\int\limits_A f^+ \, d\mu < +\infty$ и поэтому $f \in L(\mu, A)$. $\square$

6. Теорема. (О мажоранте). *Пусть* $C \in \Sigma$, *функция* $g \in L(\mu, C)$ *неотрицательна, функция* $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *измерима и* $|f(t)| \leqslant g(t)$ *для всех* $t \in C$. *Тогда* $f \in L(\mu, C)$ *и*

$$-\infty < -\int\limits_C g \, d\mu \leqslant \int\limits_C f \, d\mu \leqslant \int\limits_C |f| \, d\mu \leqslant \int\limits_C g \, d\mu < +\infty. \quad (*)$$

Доказательство. По условию $|f| \leqslant g$ на множестве C. Следовательно,

$$-g \leqslant -|f| \leqslant f \leqslant |f| \leqslant g \qquad (**)$$

на C. По условию еще $g \geqslant 0$ и $g \in L(\mu, C)$. Поэтому $0 \leqslant \int\limits_C g\, d\mu < +\infty$. Отсюда имеем

$$\int\limits_C (-g)\, d\mu = \int\limits_C (-g)^+ d\mu - \int\limits_C (-g)^- d\mu = \int\limits_C 0\, d\mu - \int\limits_C g\, d\mu = -\int\limits_C g\, d\mu$$

и, значит, $-\infty < \int\limits_C (-g)\, d\mu = -\int\limits_C g\, d\mu \leqslant 0$.

Применяя теперь теорему 4 о монотонности интеграла (и неравенства (**)), получим

$$-\infty < -\int\limits_C g\, d\mu = \int\limits_C (-g)\, d\mu \leqslant \int\limits_C f\, d\mu \leqslant \int\limits_C |f|\, d\mu \leqslant \int\limits_C g\, d\mu .$$

Неравенства (*) доказаны. Из них следует, что $\int\limits_C f\, d\mu \in \mathbb{R}$, т.е. $f \in L(\mu, C)$. □

7. Теорема. (О счетной аддитивности интеграла Лебега). *Пусть* $C \in \Sigma$ *и измеримая функция* $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *такова, что существует интеграл* $\int\limits_C f\, d\mu \in [-\infty, +\infty]$.

Пусть множества $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, *попарно не пересекаются, содержатся во множестве* C *и* $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. *Тогда интегралы* $\int\limits_A f\, d\mu$ *и* $\int\limits_{A_k} f\, d\mu$, $k \in \mathbb{N}$, *существуют и справедливо равенство*

$$\int\limits_A f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f\, d\mu. \quad (*)$$

Доказательство. По условию хотя бы один из интегралов $\int\limits_C f^+\, d\mu$ и $\int\limits_C f^-\, d\mu$ конечен. Допустим для определенности, что $\int\limits_C f^+\, d\mu < +\infty$.

По свойству (c) §2 тогда

$$\int_A f^+ d\mu \leqslant \int_C f^+ d\mu < +\infty \text{ и все } \int_{A_k} f^+ d\mu \leqslant \int_C f^+ d\mu < +\infty .$$

Поэтому в равенстве (*) существуют все интегралы. По теореме 6 §3 имеем

$$\int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- d\mu , \int_A f^+ d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ d\mu .$$

Отсюда

$$\int_A f\, d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^- d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^+ d\mu - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^- d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^+ d\mu - \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^- d\mu \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{A_k} f^+ d\mu - \int_{A_k} f^- d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\, d\mu . \square$$

Следствие. *Если* $f \in L(\mu, C)$, *то формула* $\mu_f(A) = \int\limits_A f\, d\mu$ *определяет конечную вещественную меру на* σ-*алгебре* $\Sigma_C = \{A \subset C\ ;\ A \in \Sigma\}$ *измеримых подмножеств множества* C.