

Методы решения СЛДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in R^n, u \in R^l,$$

$$\text{СЛОДУ} \quad \dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Фундаментальная матрица

Рассмотрим n независимых векторов в качестве н. усл.

$$x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} \\ x_{20}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$x^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, T], \quad i = 1, \dots, n, \quad \dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t), \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

$$X(t) = \left(x^{(1)}(t) \mid x^{(2)}(t) \mid \dots \mid x^{(n)}(t) \right) \quad - \text{ фундаментальная матрица}$$

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(t_0) = \left(x_0^{(1)} \mid x_0^{(2)} \mid \dots \mid x_0^{(n)} \right)$$

Теорема: если существует $t_* \in [t_0, T]$ $\det(X(t_*)) \neq 0$

то для любого момента $t \in [t_0, T]$ $\det(X(t)) \neq 0$

$X(t)$ - невырожденная матрица

$$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0), \quad - \text{ переходная матрица}$$

Свойства переходной матрицы

- 1 $\Phi(t_0, t_0) = I.$
- 2 $\det(\Phi(t, t_0)) \neq 0.$
- 3 $\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$
- 4 $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$

Вычисление переходной матрицы

$$\int_{t_0}^t \frac{d\Phi(\tau, t_0)}{d\tau} \cdot d\tau = \int_{t_0}^t A\Phi(\tau, t_0) d\tau$$

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

Численное решение СЛОДУ

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t), & x(t) &= e^{A(t-t_0)} x_0 \\ x(t_0) &= x_0, \quad x \in R^n, t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

Алгоритм численного решения СЛОДУ

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N \quad x(t_{i+1}) = e^{Ah} x(t_i).$$

$$\Phi = I + \sum_{i=1}^N \frac{A_1^i}{i!}, \quad A_1 = Ah$$

Ряд сходится для любого $h!$

Численное решение СЛНДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

u – известно для каждого
момента времени

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, u \in R^l$$

$$z(t) = \Phi(t_0, t)x(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0} e^{-At} Bu(t).$$

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^t e^{A(t_0 - \tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Решение:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Алгоритм численного решения СЛНДУ

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \dots, N \quad u(\tau) = u(t_i) = \text{const}, \quad \tau \in [t_i, t_i + h],$$

$$x(t_1) = e^{Ah} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0+h} e^{A(t_0+h-\tau)} Bu(t_0) d\tau$$

$$x(t_{i+1}) = Px(t_i) + Qu(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

$$\Psi = \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left(I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \dots + \frac{(As)^n}{n!} + \dots \right) ds =$$

$$= h + \frac{Ah^2}{2!} + \dots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \dots.$$

$$P = I + \Psi A,$$

$$Q = \Psi B.$$

[ad,bd]=c2d(a,b,h)

Преобразование линейных моделей

Пространство состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(t_0) &= x_0, \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), & x \in R^n, u \in R^l, y \in R^m, \end{aligned}$$

«Вход-выход»

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) &= \\ = \beta_nu^{(n)}(t) + \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1u^{(1)}(t) + \beta_0u(t), \end{aligned}$$

Операторная форма

$$p = d/dt \quad \alpha(p)y(t) = \beta(p)u(t)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \begin{pmatrix} w_{11}(p) & \dots & w_{1l}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{m1}(p) & \dots & w_{ml}(p) \end{pmatrix}.$$

Оператор Лапласа

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

Следует различать оператор дифференцирования и оператор Лапласа!

Для линейных систем при нулевых начальных условиях

$$s \equiv p$$

Преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} x(s) &= (Is - A)^{-1} Bu(s), \\ y(s) &= \left(C(Is - A)^{-1} B + D \right) u(s), \end{aligned}$$

Канонические формы ДС в пространстве состояний

$$\begin{aligned}
 y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1y^{(1)}(t) + \alpha_0y(t) = \\
 = \beta_n u^{(n)}(t) + \beta_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1u^{(1)}(t) + \beta_0u(t),
 \end{aligned}$$

$$p^n y + \alpha_{n-1}p^{n-1}y + \dots + \alpha_1py + \alpha_0y = \beta_n p^n u + \dots + \beta_1pu + \beta_0u,$$

Введем
переменные:

$$x_n = y - \beta_n u,$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{p} \left(-\alpha_{n-2}y + \beta_{n-2}u + \frac{1}{p} (\dots (-\alpha_0y + \beta_0u) \dots) \right)$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_1 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-2} & \dots \\ 0 & \alpha_0 & \dots & -\alpha_1 & 1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\alpha_{n-1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad B'' = \begin{pmatrix} \beta_0 - \alpha_0\beta_n \\ \beta_1 - \alpha_0\beta_{n-1} \\ \dots \\ \beta_{n-2} - \alpha_0\beta_2 \\ \beta_{n-1} - \alpha_0\beta_1 \end{pmatrix},$$

$$C' = [0 \dots 0], \quad D' = \beta_m u.$$

Многообразие ДС
в пространстве состояния

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\
 y(t) &= Cx(t) + Du(t).
 \end{aligned}$$

Для произвольной невырожденной матрицы $T \quad x' = Tx$

$$\begin{aligned}
 T^{-1}\dot{x}'(t) &= AT^{-1}x'(t) + Bu(t), \\
 y(t) &= CT^{-1}x'(t) + Du(t).
 \end{aligned}$$