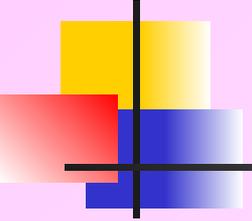


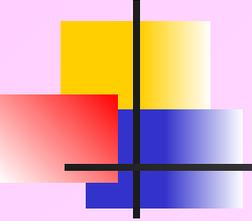
Задачи на разрезание



*Саркисян Роман ,
Шаврова Анастасия
8 класс МБОУ
«Северомуйская СОШ»
представляют.*

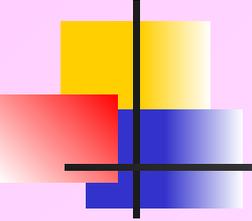
Актуальность

- 
- Математики открывают новые связи между математическими объектами. В результате этой работы находятся общие методы для решения различных задач. И эти задачи получают стандартные методы решения, переходя из разряда творческих в разряд технических, то есть требующих для своего решения применения уже известных методов.
 - Задачи на разрезание помогают как можно раньше формировать геометрические представления у школьников на разнообразном материале. При решении таких задач возникает ощущение красоты, закона и порядка в природе.



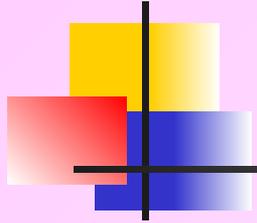
Цели

- изучить, исследовать задачи на разрезание и вывести формулы площадей треугольника, параллелограмма и трапеции с помощью задач, при решении которых нужно разрезать фигуры на части, а потом доказывать что фигуры равносоставные
- расширение знаний о многообразии задач на разрезание.



Задачи

- научиться разрезать геометрические фигуры на части, необходимые для составления той или иной другой геометрической фигуры, используя их свойства и признаки;
- научиться доказывать, что площади фигур равны, разрезая их на определенные части и доказывая, что эти фигуры равноставленные;
- провести геометрическое исследование, конструирование в решении задач различных типов.



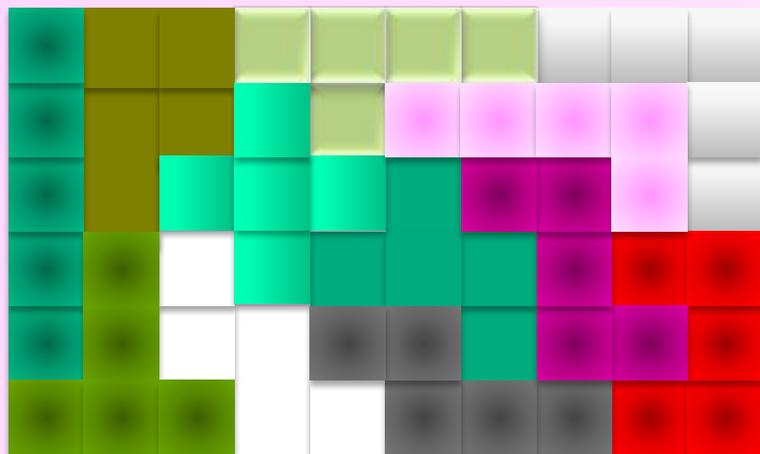
Задачи на разрезание, как один из видов головоломок, привлекали к себе внимание с древнейших времен. Первый трактат, в котором рассматриваются задачи на разрезание, написал знаменитый арабский астроном и математик из Хорасана Абу аль – Вефа (940 – 998). В начале XX века благодаря бурному росту периодических изданий решение задач на разрезание фигур на то или иное число частей и последующее составление из них новой фигуры привлекает внимание как средство развлечения широких слоев общества. Теперь и геометры всерьёз занялись этими задачами, тем более, что в их основе лежит старинная задача о равновеликих и равносоставленных фигурах, которая исходит еще от античных геометрах. Известными специалистами в этом разделе геометрии были знаменитые классики занимательной геометрии и составители головоломок Генри Э. Дьюдени и Гарри Линдгрэн.

Игра «Пентамино»



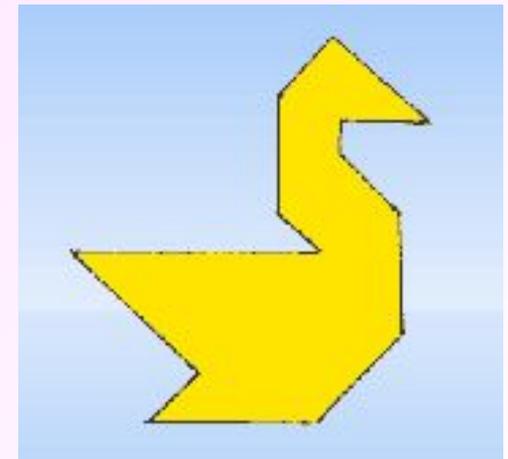
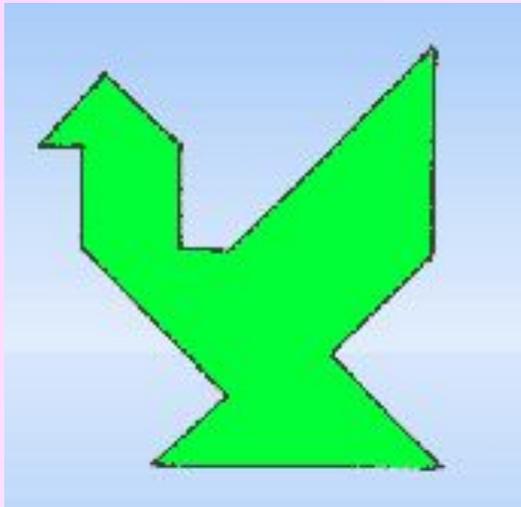
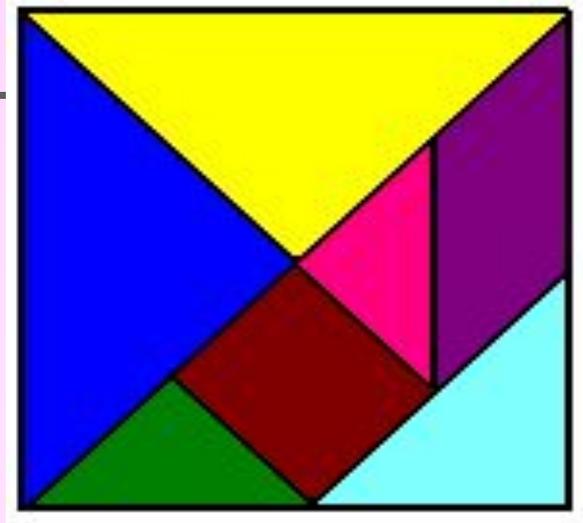
Задача 1.

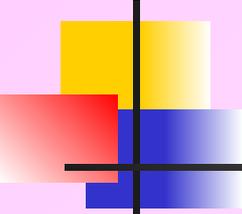
Можно уложить все 12 фигур пентамино в прямоугольник 6×10 . Фигурки можно переворачивать.



Существует ровно 2339 различных укладок пентамино в прямоугольник 6×10 .
Эту задачу впервые решил в 1965 году Джон Флетчер.

Задача 2. Танграм





Торт, украшенный розочками, тремя прямолинейными разрезами разделили на куски так, что на каждом куске оказалось, ровно по одной розочке. Какое наибольшее число розочек могло быть на торте?

Комментарий. В основе решения задачи лежит применение аксиомы: «*Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости*». Следует изобразить всевозможные случаи расположения трех прямых. Из рисунка становится, что наибольшее число частей – 7 – получается, когда прямые пересекаются попарно. Следовательно, на торте могло быть не более 7 розочек.

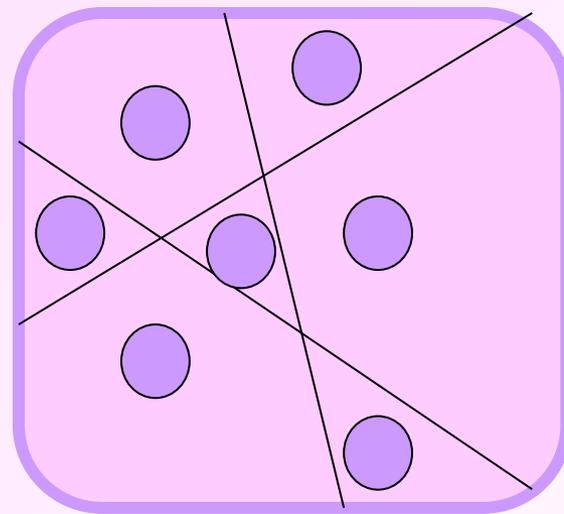
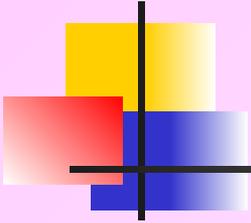


Рис. 1



Разрежьте прямоугольник, $ax2a$ на такие части из них можно было составить равновеликий ему:

- 1) прямоугольный треугольник;
- 2) квадрат.

Решение задачи понятно из рисунков 2 и 3.

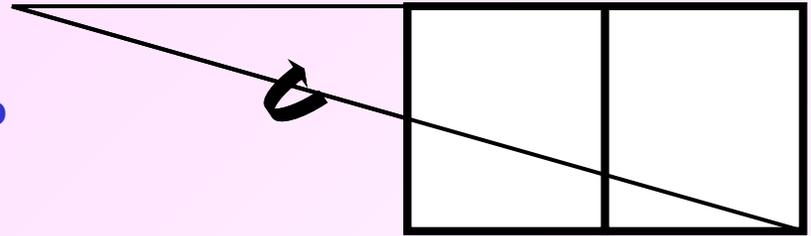


Рис. 2

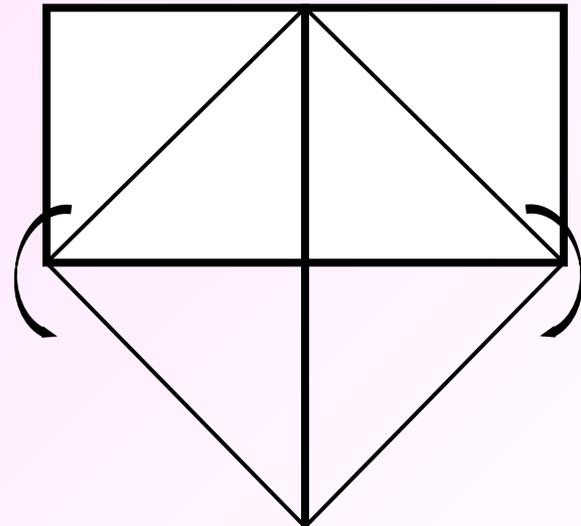
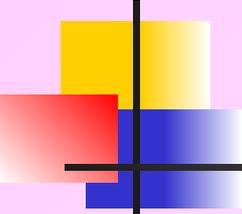


Рис. 3



Разрежьте два квадрата 1×1 и 3×3 на такие части, чтобы из них можно было составить равновеликий им квадрат.

Комментарий. Эта задача – на перекраивание фигуры, состоящий из двух квадратов, в равновеликий ей квадрат. Площадь нового квадрата равна $3^2 + 1^2$, значит, сторона квадрата, равновеликого сумме данных квадратов равна $\sqrt{10}$, т. е. является гипотенузой прямоугольника с катетами 3 и 1. Построение такого квадрата понятно из рисунка 4.

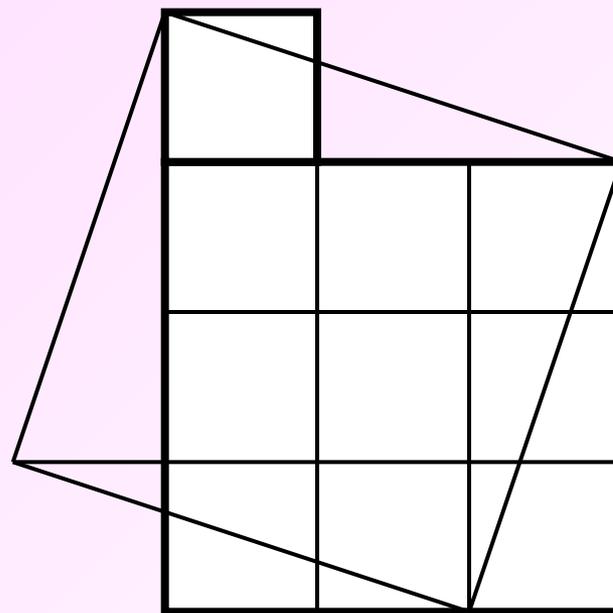
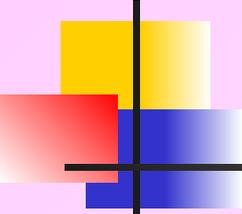


Рис. 4



Разрежьте два произвольных квадрата на такие части, чтобы из них можно было составить равновеликий им квадрат.

Решение задачи понятно из рисунка 5. Площадь нового квадрата равна $a^2 + b^2$, значит, сторона квадрата, равновеликого сумме данных квадратов равна $\sqrt{a^2 + b^2}$, т. е. является гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами a и b .

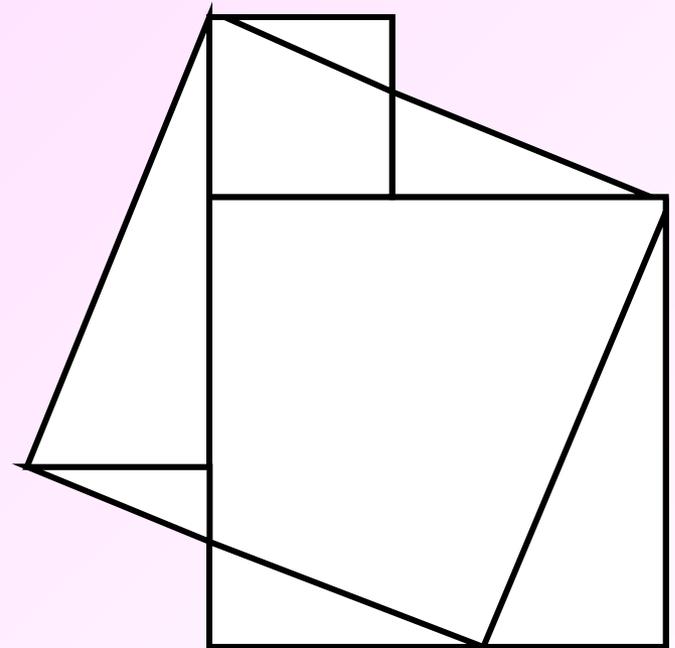
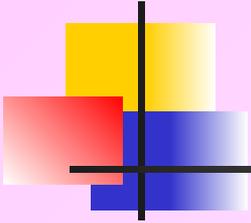


Рис. 5



Крест составлен из пяти квадратов: один квадрат в центре, а остальные четыре прилежат к его сторонам. Разрежьте его на такие части, чтобы из них можно было составить равновеликий ему квадрат.

Решение задачи понятно из рисунка 6.

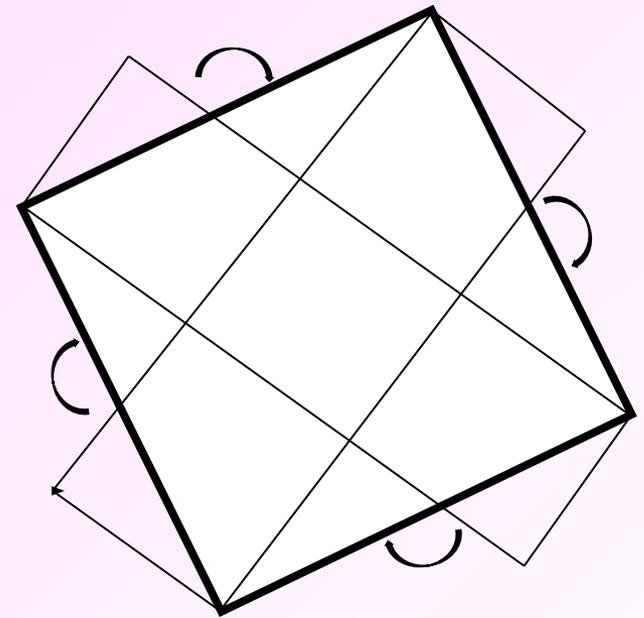
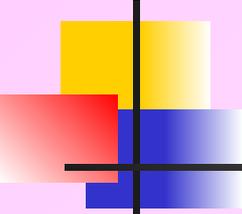


Рис 6.



Крест составлен из пяти квадратов: один квадрат в центре, а остальные четыре прилежат к его сторонам. Как шестью такими крестами оклеить поверхность луба, каждая грань которого равновелика кресту.

Комментарий. Крест накладывается на грань (рис. 7), обрезать и переклеивать «торчащие уши» не надо – они переходят на соседнюю грань и оказываются в нужных местах. Завернув «торчащие уши» на соседние грани, можно таким образом заклеить поверхность куба шестью крестами (рис.8).

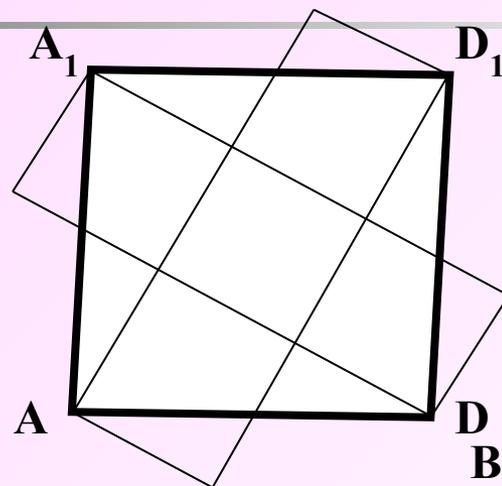


Рис. 7

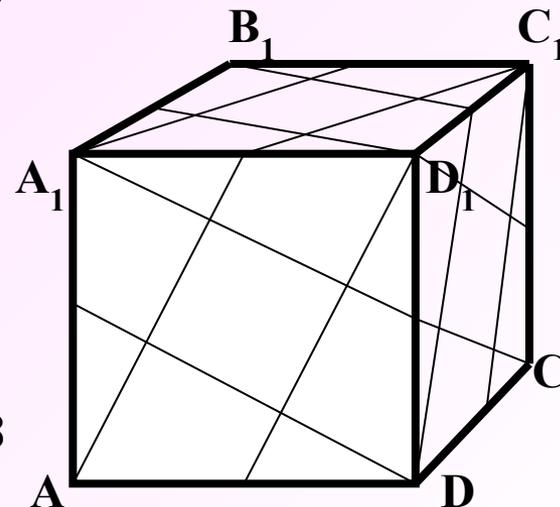
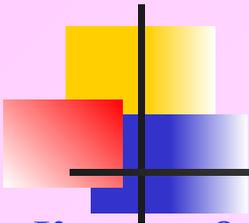


Рис. 8



Квадрат 8x8 разрезан на четыре части, как показано на рисунке 9. Из полученных частей составлен прямоугольник 13x5 (рис. 10). Площадь прямоугольника равна 65, а площадь квадрата – 64. Объясните, где ошибка.

Комментарий. Как следует из рисунка 10, квадрат разрезан на две трапеции (белая и синяя) и два прямоугольных треугольника (белый и серый). Рассмотрим на рисунке 10 большой белый прямоугольный треугольник и найдем значение тангенса угла α : $tg\alpha = 5/13=0,385$. Теперь рассмотрим маленький белый треугольник на рисунке 10 и найдем значение тангенса угла α : $tg\alpha = 3/8=0,375$. Значение тангенсов угла не совпадают. Это означает, что гипотенуза маленького белого прямоугольного треугольника и боковая сторона белой трапеции не лежат на одной прямой, а являются звеньями ломаной. Аналогично доказывается, что гипотенуза маленького голубого прямоугольного треугольника и боковая сторона голубой трапеции не лежат на одной прямой. Следовательно, площадь прямоугольника равна сумме площадей фигуры, составленной из частей квадрата и черной «щели».

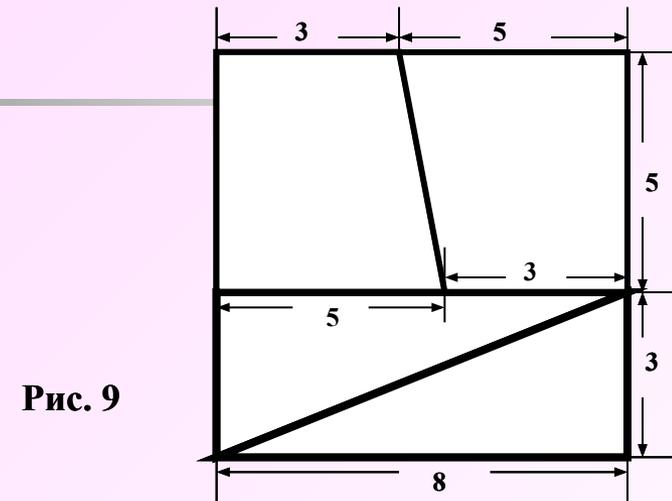


Рис. 9

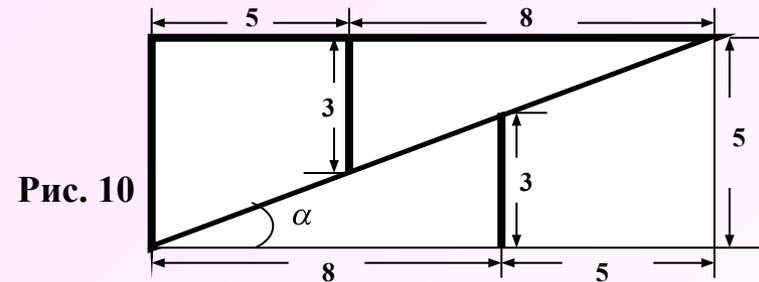


Рис. 10

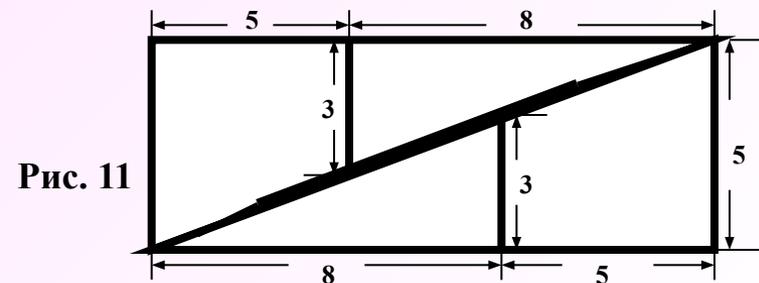
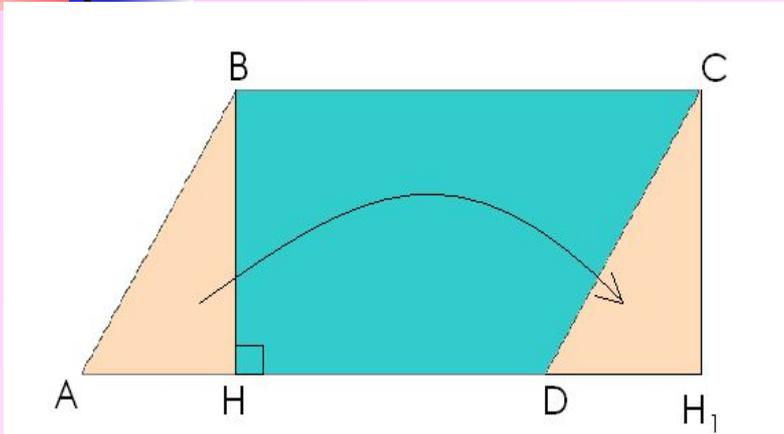


Рис. 11

Задача 10. Площадь параллелограмма.

Теорема

Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту.



Дано:

$ABCD$ -параллелограмм, AD -основание,

BH -высота

Доказать:

$$S_{ABCD} = AD \times BH$$

Доказательство:

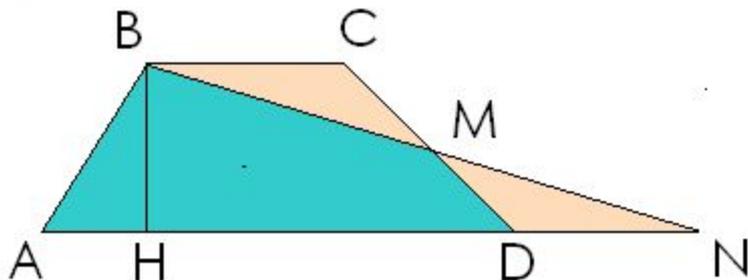
1. *Перекроем параллелограмм в прямоугольник. Для этого разрежем его по высоте BH , и треугольник ABH приложим справа как показано на рисунке. Получим прямоугольник BHC_1H_1 , равноставленный с параллелограммом $ABCD$. Но равноставленные фигуры являются равновеликими, т. е. $S_{BHC_1H_1} = S_{ABCD}$.*
2. $S_{BHC_1H_1} = BC \times BH$. Но $BC = AD$ по свойству параллелограмма.

Тогда $S_{ABCD} = AD \times BH$. Теорема доказана.

Задача 11. Площадь трапеции

Теорема

Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований на высоту.



Дано:

*ABCD-трапеция, AD и BC- основания,
BH-высота*

Доказать:

$$S_{ABCD} = 1/2 (AD + BC) \times BH$$

Доказательство:

Перекроем трапецию в треугольник. Для этого разрежем её по отрезку BM, где M- середина стороны CD. Треугольник BCD приложим к отрезку MD как показано на рисунке. Получим треугольник ABN равносоставленный с трапецией ABCD, а следовательно и равновеликий, т. е. $S_{ABN} = S_{ABCD}$

$$S_{ABN} = 1/2 AN \times BH, (1)$$

Но $AN = AD + DN$, а $DN = BC$.

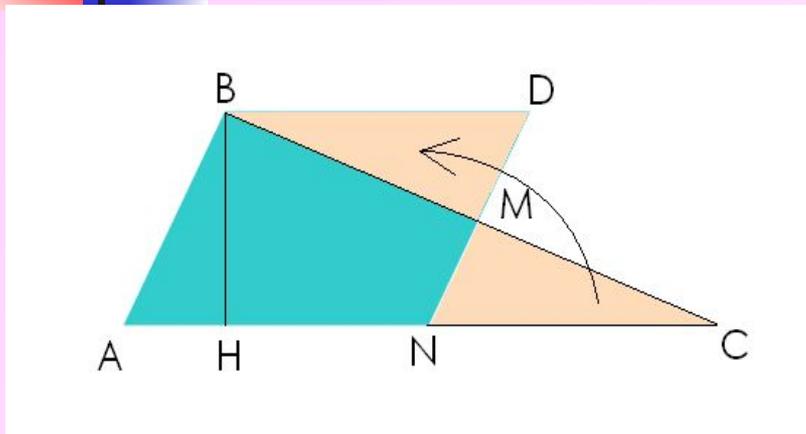
Откуда $AN = AD + BC$.

Подставим в (1), получим $S_{ABCD} = 1/2 (AD + BC) \times BH$. Теорема доказана.

Задача 12. Площадь треугольника

Теорема

Площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту.



Дано:

*ABC-треугольник, AC- основание,
BH- высота.*

Доказать:

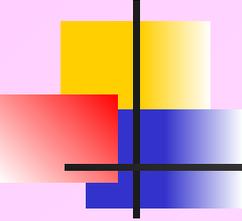
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$$

Доказательство

Перекроем треугольник в параллелограмм. Для этого проведём среднюю линию MN и разрежем треугольник ABC на две части. Треугольник MNC приложим к отрезку BM как показано на рисунке. Получим параллелограмм ABDN, равноставленный с треугольника ABC, а следовательно и равновеликий. Тогда $S_{ABDN} = S_{ABC}$

$S_{ABDN} = AN \times BH$. Но $AN = \frac{1}{2} AC$, т. к. N-середины AC.

Следовательно $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \times BH$. Теорема доказана.



Заключение

- *задачи на разрезание не являются несерьёзными или бесполезными, они не так уж и далеки от серьёзных математических задач*
- *рассмотренные нами задания имеют различный уровень трудности – от простых до олимпиадных.*
- *каждый может найти среди них задачи посильного уровня сложности, отталкиваясь от которых, можно будет переходить к решению более трудных задач и к доказательству теорем.*