

Производная в окружающем мире.

Творческое название

Гимн производной

Флюксия! Слово прекрасное, может,
волшебное?

Флюксия! Петь даже хочется что-то
душевное.

Флюксия! Точки экстремума: минимум,
максимум.

Флюксия! Флюксия! Флюксия!

Цель проекта:

- Повторить понятие производной;
- Выявить сферы применения производной;
- Умение самостоятельно находить, изучать и обобщать учебный материал.
- Умение применять полученные знания в нестандартных и жизненных ситуациях.
- Научиться составлять и решать задачи с применением производной.

Основополагающий вопрос

Значит

изучать

производную

нам нужно?

Типология проекта:

обобщающий, с элементами
исследования

Категория учащихся:

10 класс

Предметные области:

алгебра и начала анализа,
геометрия, физика, химия,
география, экономика, биология,
история.

ПРОБЛЕМНЫЕ ВОПРОСЫ

- История возникновения производной.
- Задачи, приводящие к применению производной.
- Понятие производной.
- Геометрический смысл производной.
- Физический смысл производной.
- Уравнение касательной к графику функции.

Математика в школе - это достаточно сложный предмет, и самое

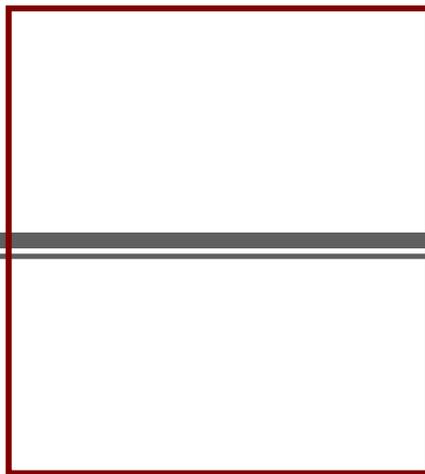
главное для учащихся – понять, зачем она нужна.

Мы изучаем производную. А так ли это важно в жизни?

«Дифференциальное исчисление- это описание окружающего нас мира, выполненное на математическом языке. Производная помогает нам успешно решать не только математические задачи, но и задачи практического характера в разных областях науки и техники.»



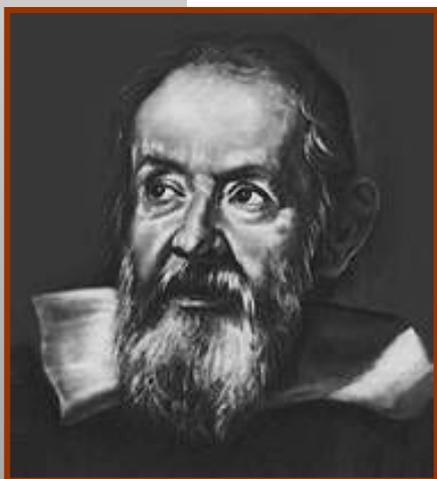
Г. Лейбниц



И. Ньютон



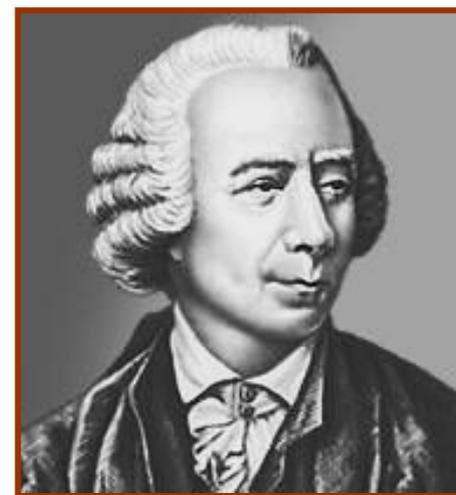
Р. Декарт



Г. Галилей



Ж. Лагранж

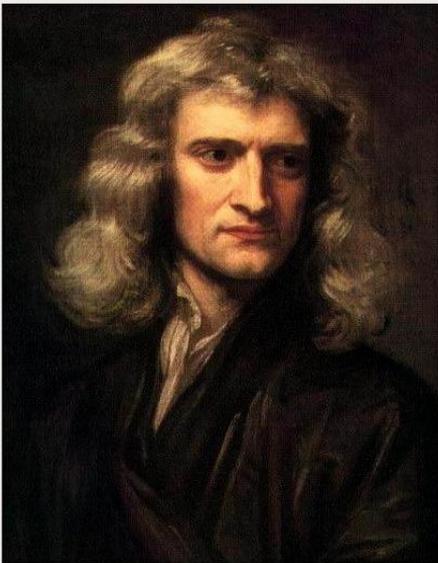


Л. Эйлер

Начнём...

- Производная – одно из фундаментальных понятий математики. Оно возникло в 18 веке. Независимо друг от друга И. Ньютон и Г. Лейбниц разработали теорию дифференциального исчисления.

История появления производной



Это открытие
Ньютона стало
поворотным пунктом в
истории
естествознания.

История появления производной



К этим законам Лейбниц пришел, решая задачу проведения касательной к произвольной кривой, т.е. сформулировал геометрический смысл производной, что значение производной в точке касания есть угловой коэффициент касательной или tg угла наклона касательной с

положительным направлением оси Ox .

История появления производной

Термин
производная и
современные
обозначения y' , f'
ввёл Ж.Лагранж в
1797г.



Ж. ЛАГРАНЖ

А кстати



Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс, Коши.

Необходимо сказать, что ни Ньютон ни Лагранж не дали четкого определения производной.

Впервые определение производной было сформулировано Коши, и именно это определение стало общепринятым и в настоящее время используется почти во всех курсах анализа.

САМОПРОВЕРКА!!!

Примеры применения

Найдите производные функций.

① $f(x) = 3 \cos x - x^3$

Проверяем

$$f'(x) = (3 \cos x - x^3)' = 3(\cos x)' - (x^3)' =$$
$$= -3 \sin x - 3x^2$$

Формулы:

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f'$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

САМОПРОВЕРКА!!!

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{5}{4}x^2 - x - 2$$

Проверяем

$$f'(x) = \frac{4}{5} \cdot 5x^4 - 2 \cdot 4x^3 + \frac{5}{4} \cdot 2x - 1 - 0 =$$

$$= 4x^4 - 8x^3 + \frac{5}{2}x - 1$$

Формулы:

$$x' = 1$$

$$c' = 0$$

САМОПРОВЕРКА!!!

$$\textcircled{3} \quad f(x) = 2 \sin 3x$$

Проверяем

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = \\ &= 2 \cdot \cos 3x \cdot 3 = \underline{6 \cos 3x} \end{aligned}$$

Производная сложной функции:

$$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$$

САМОПРОВЕРКА!!!

Преобразуем:

$$④ f(x) = \frac{5}{(1-2x)^3} = 5(1-2x)^{-3}$$

Проверяем

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot (-3) \cdot (1-2x)^{-3-1} \cdot (1-2x)' = \\ &= -15 \cdot (1-2x)^{-4} \cdot (-2) = \underline{30 \cdot (1-2x)^{-4}} \end{aligned}$$

Производная сложной функции:

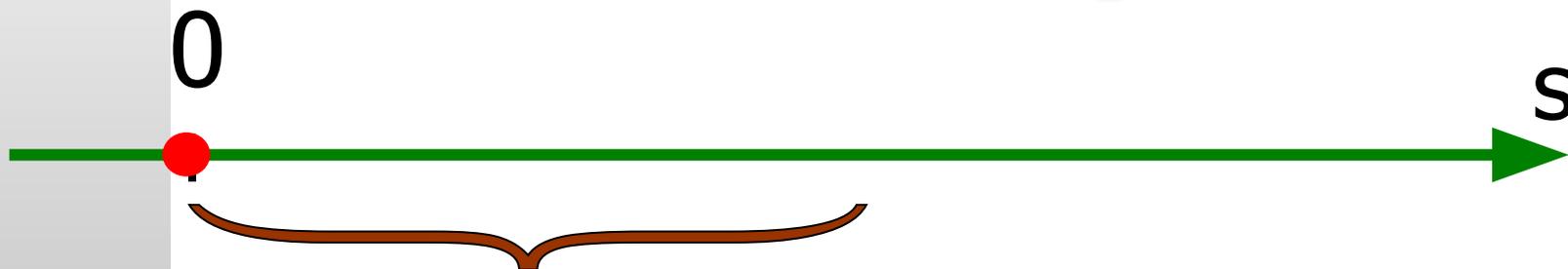
$$(U^n)' = U^{n-1} \cdot U'$$



ЗНАНИЕ ТЕОРИИ ОБЯЗАТЕЛЬНО!!!

8

Механический смысл производной



$S(t)$ за время t

$$S(t) = V(t) \quad V'(t) = a(t)$$

$S(t)$ - перемещение точки за время

$V(t)$ – скорость точки в момент t

$a(t)$ – ускорение точки в момент t

ЗНАНИЕ ТЕОРИИ ОБЯЗАТЕЛЬНО!!!

8

Геометрический смысл производной

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$



значение
производной в
точке x_0

угловой
коэффициент
касательной

тангенс угла наклона
касательной к
положительному
направлению оси Ox

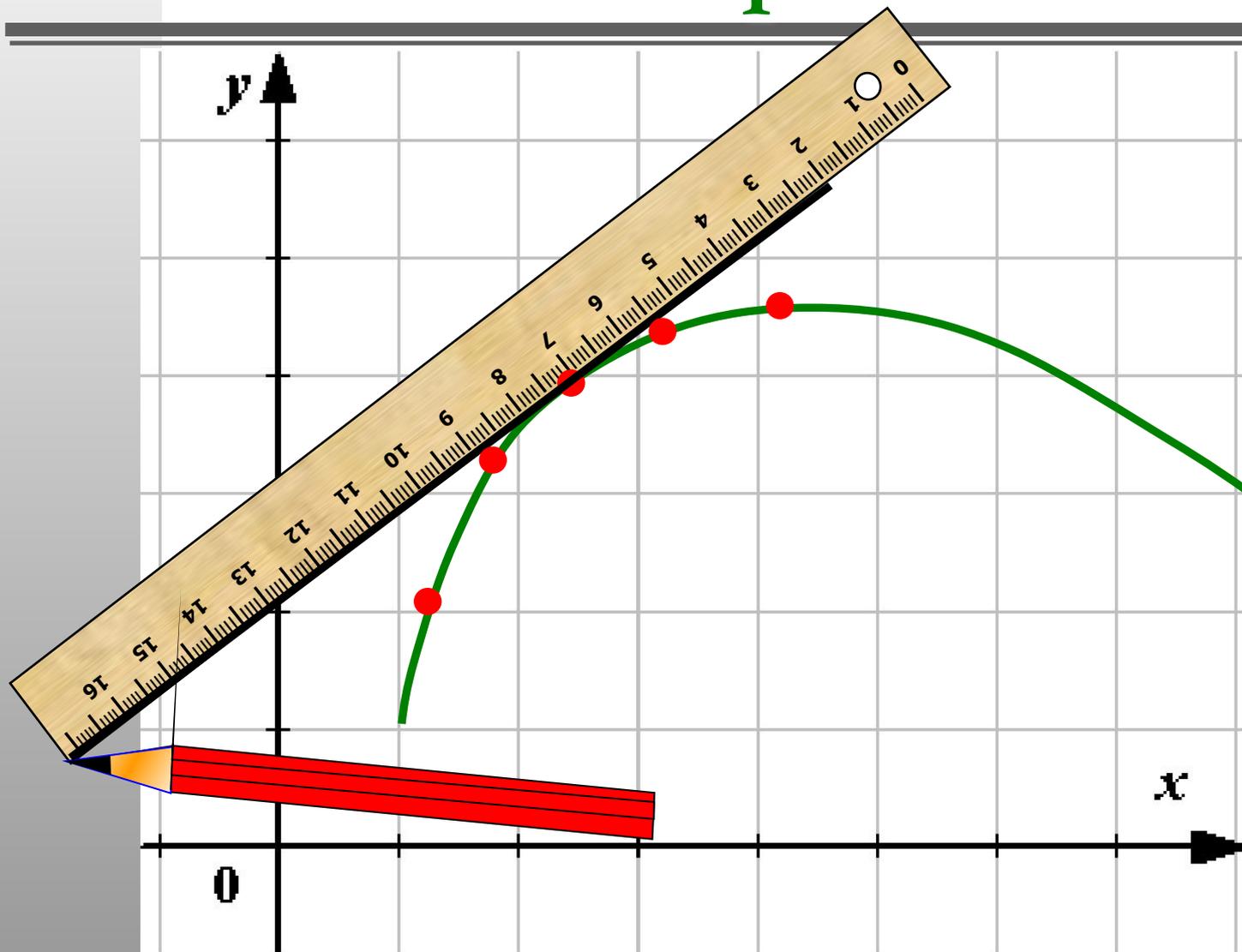
Производная в математике

1. Геометрический смысл производной.



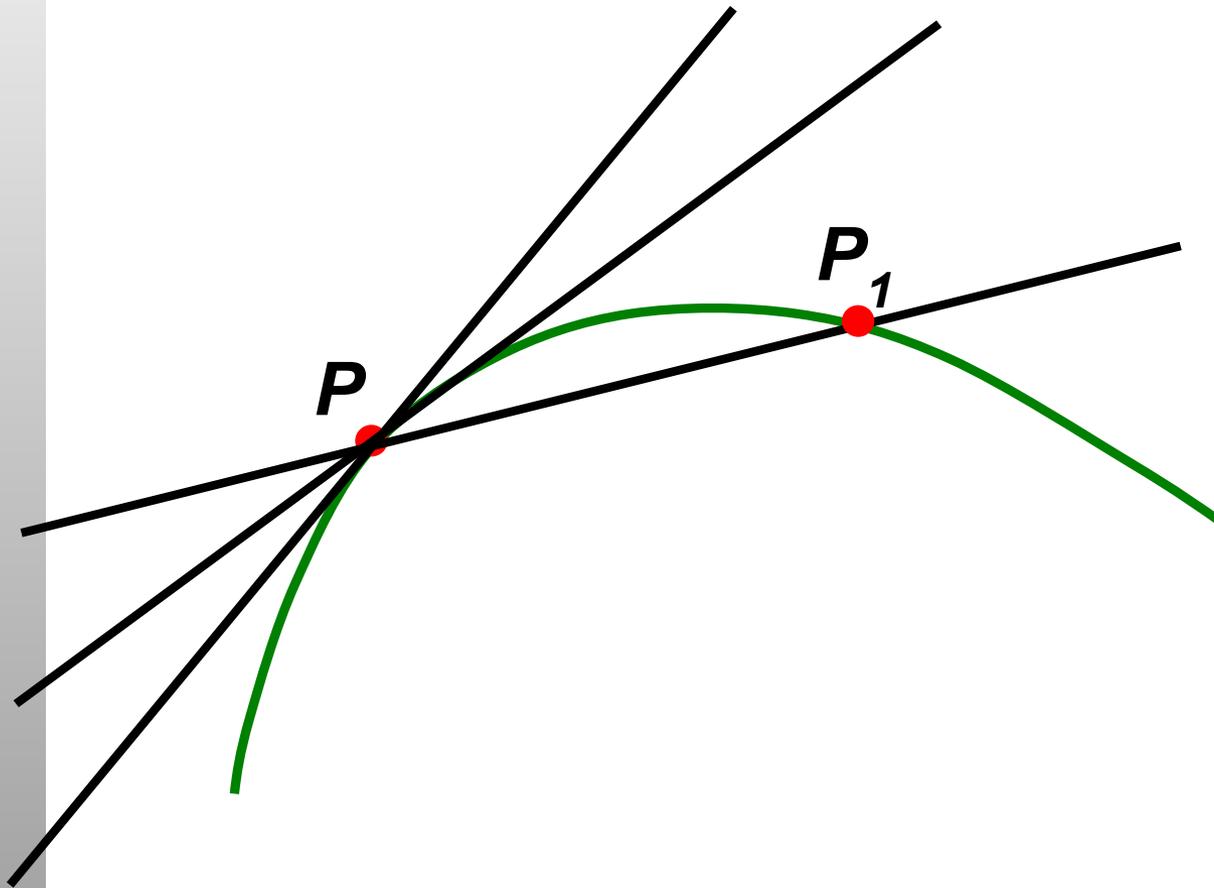
«Если продолжить одно из маленьких звеньев ломаной, составляющей кривую линию, то эта продолженная таким образом сторона будет называться касательной к кривой.»

Касательная к кривой.



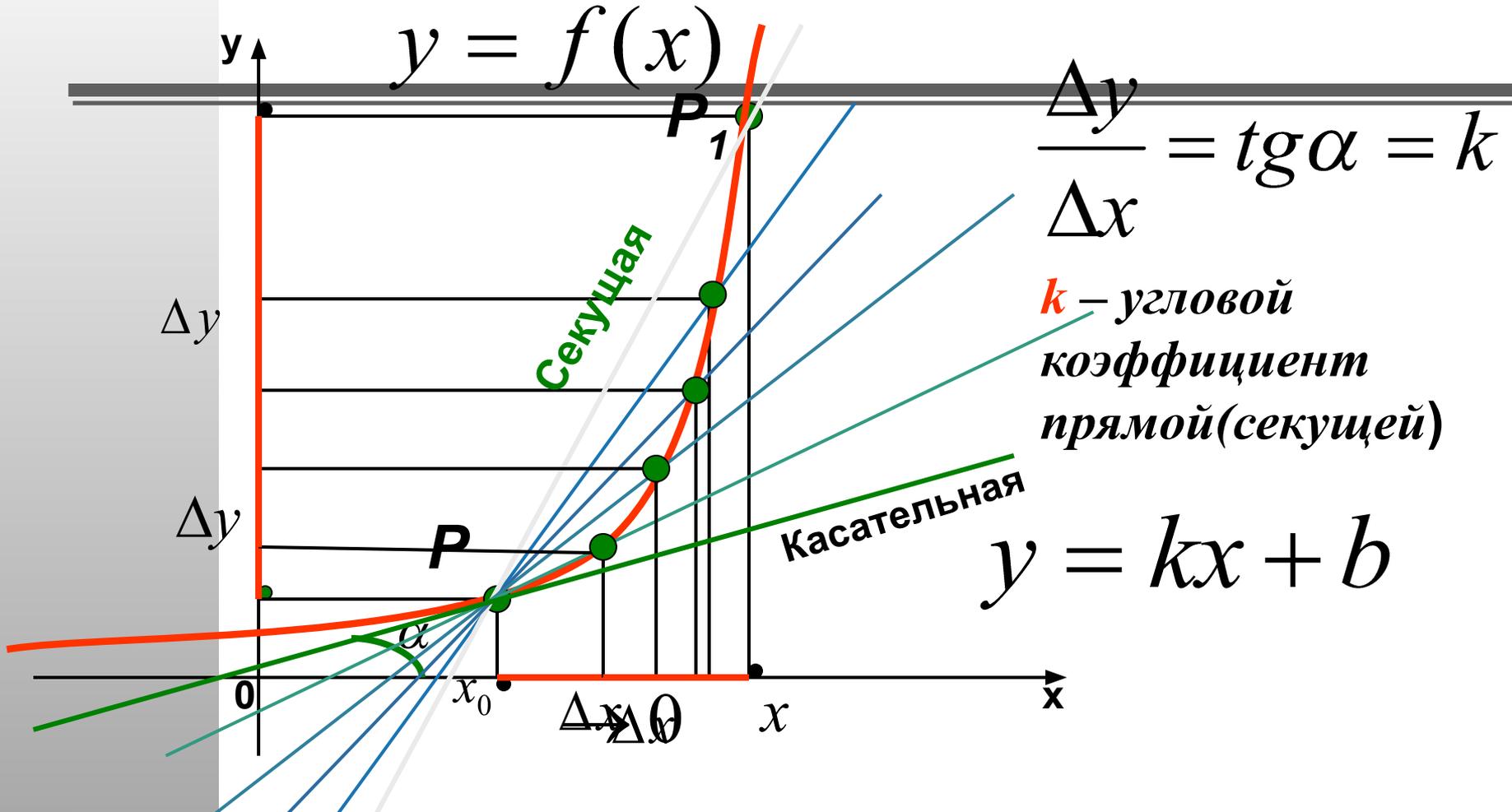
Производная

- это угловой коэффициент касательной.



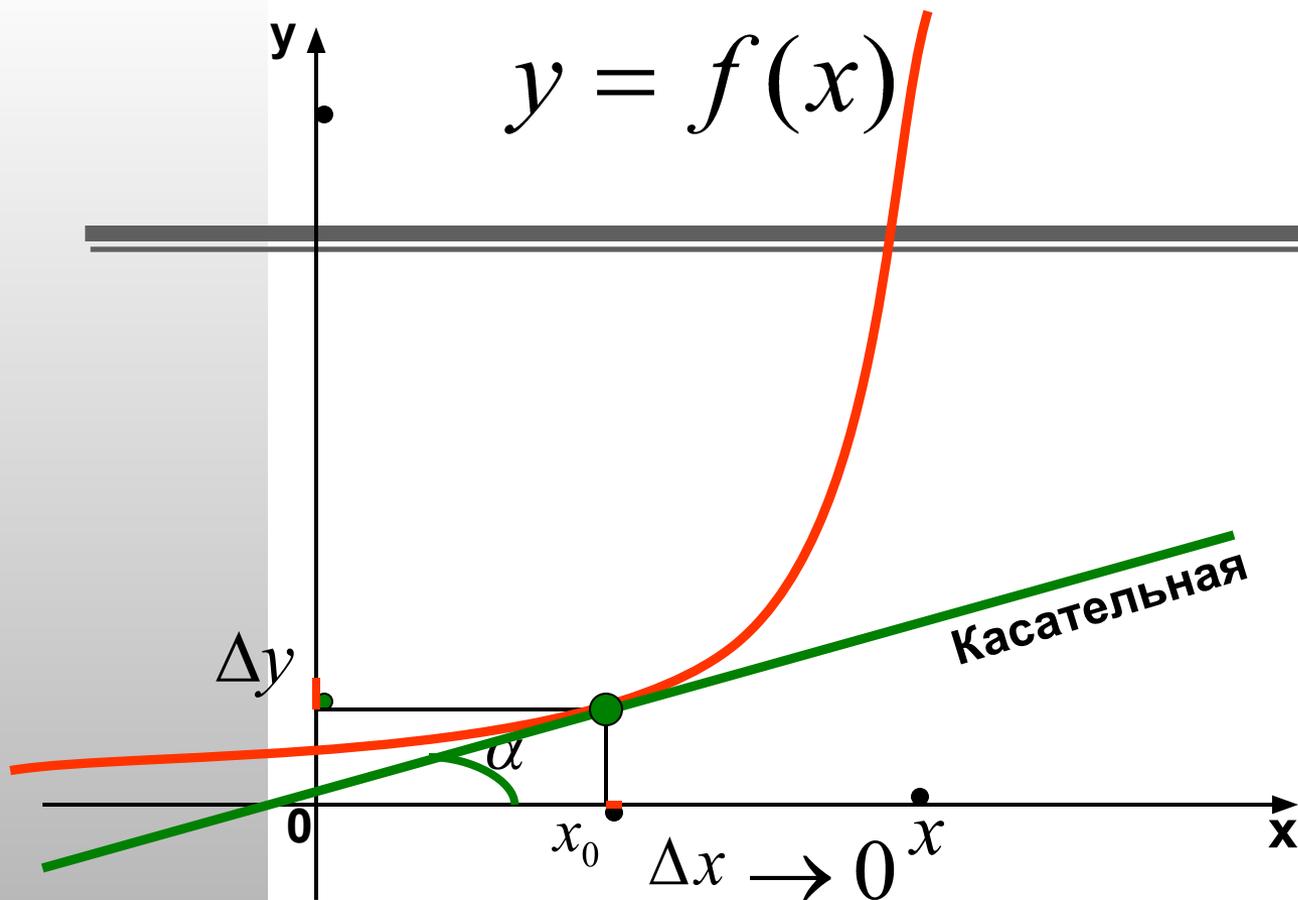
1. Геометрический смысл производной.

Коэффициенту касательной.



Секущая стремится занять положение касательной.

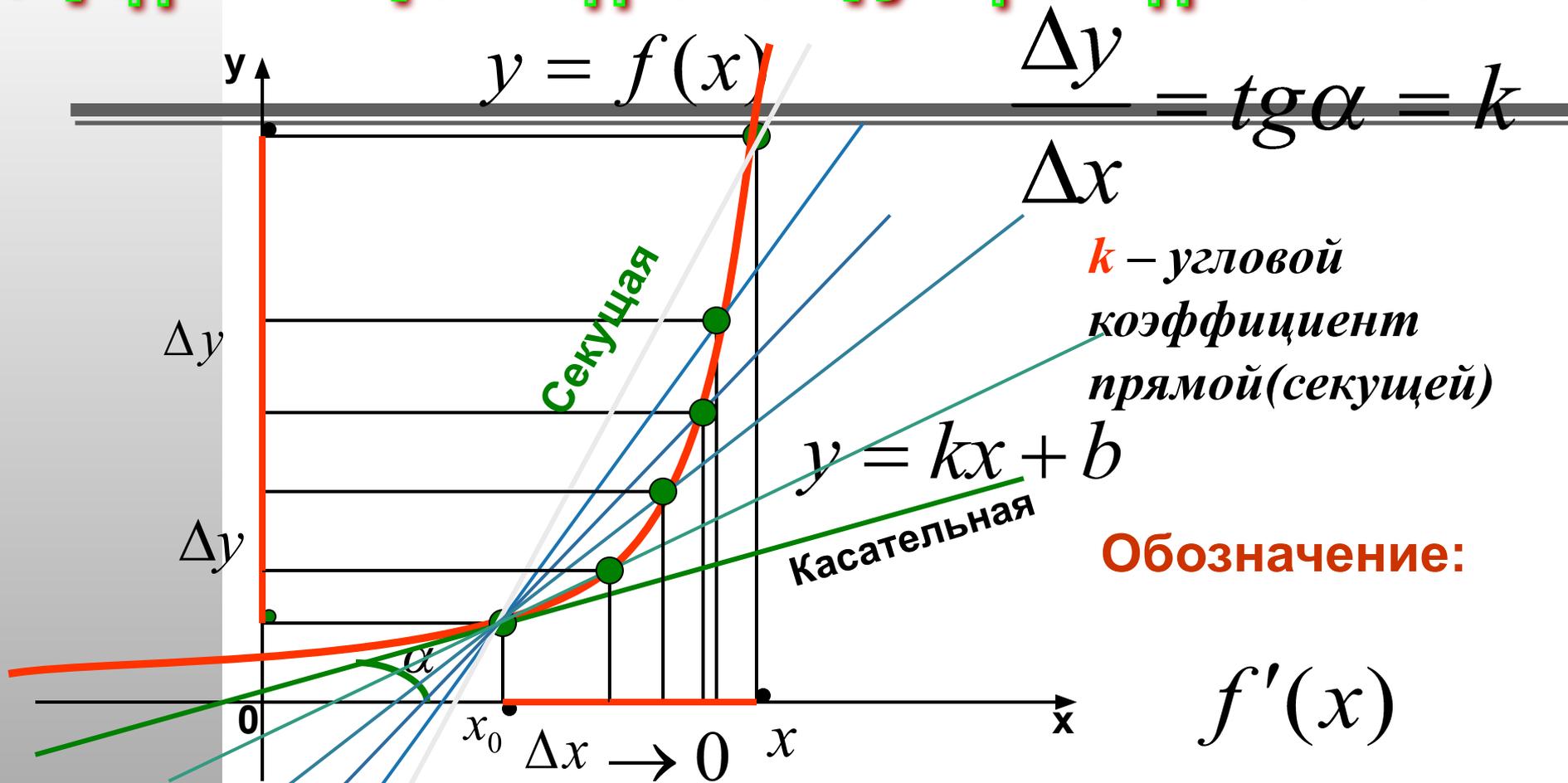
То есть, касательная есть предельное положение секущей.



Угловым коэффициентом касательной можно найти как предел выражения:

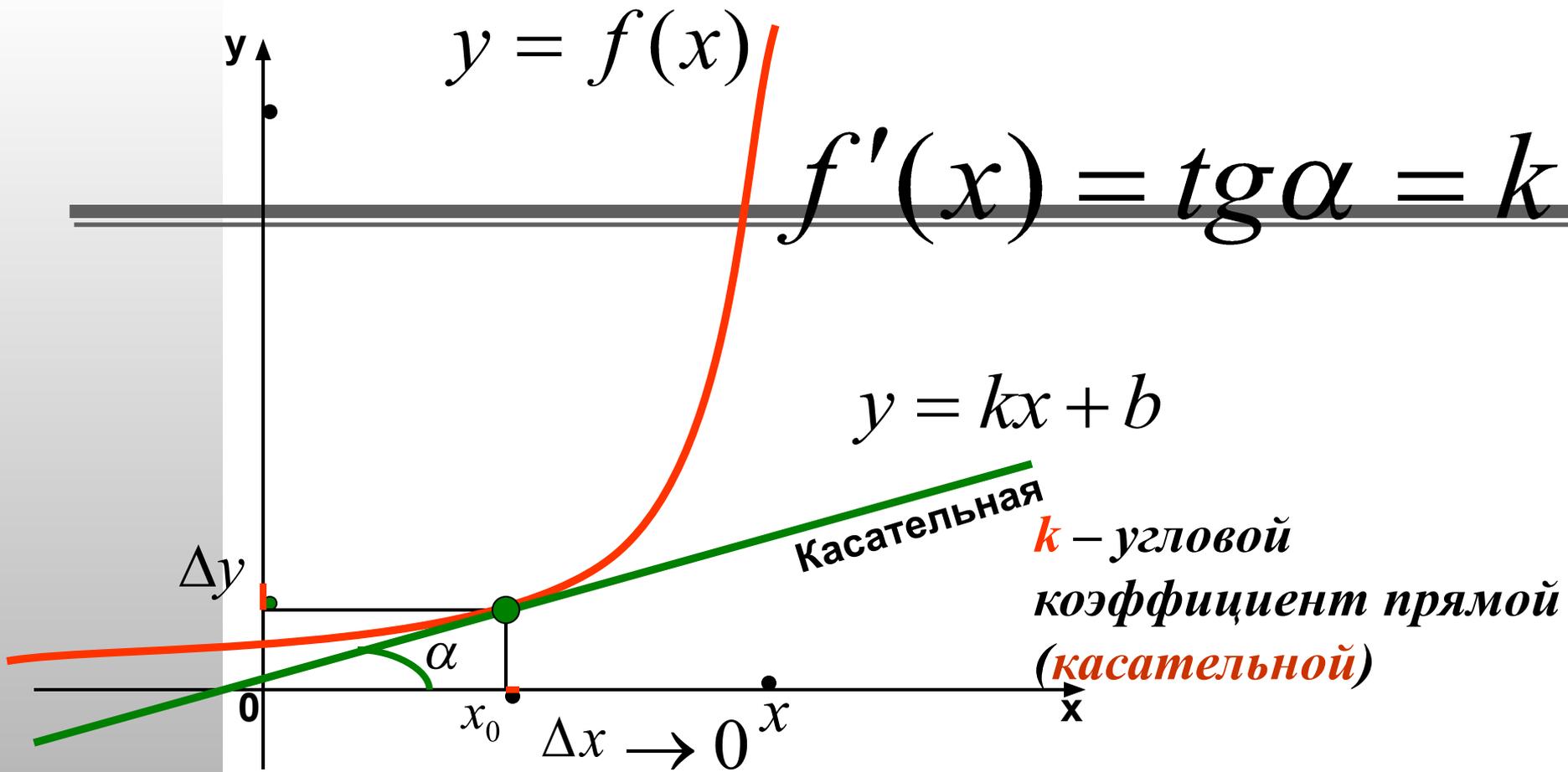
$$k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Определение производной от функции в данной точке.



Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется

число, к которому стремится отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ при $\Delta x \rightarrow 0$.



Геометрический смысл производной

Производная от функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в этой точке.

Найдите **угловой коэффициент касательной**, проведенной к графику функции в точке с абсциссой.

$$y = \cos 2x \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \quad \text{Решение.}$$

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$$

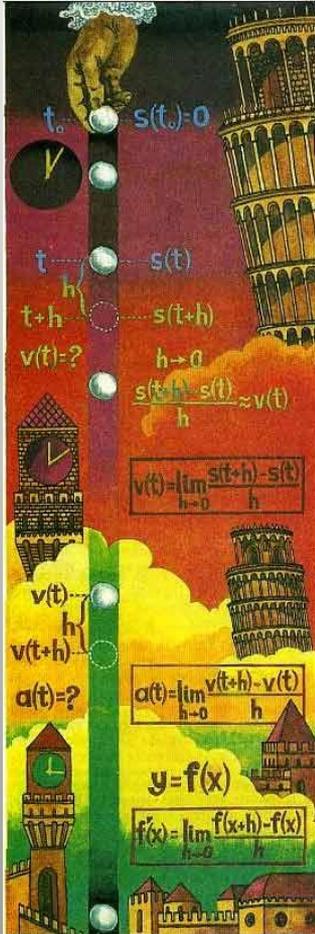
$$y' = (\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$$

$$k = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -2$$

Угловой коэффициент касательной
равен -2.

Производная в физике

УЧЁНЫЕ ФИЗИКИ



Будем вслед за итальянским учёным Г.Галилеем изучать закон свободного падения тел. Поднимем камешек и затем из состояния покоя отпустим его. Движение свободно падающего тела явно неравномерное. Скорость v постепенно возрастает. Но как именно выглядит зависимость $v(t)$?

Фиксируем момент t , в который мы хотим знать значение скорости $v(t)$. Пусть h – небольшой промежуток времени, прошедший от момента t . За это время падающее тело пройдёт путь, равный $s(t+h)-s(t)$.

Если промежуток времени h очень мал, то приближённо $s(t+h)-s(t) \approx v(t) \cdot h$, или $\frac{s(t+h) - s(t)}{h} \approx v(t)$, причём

последнее приближённое равенство тем точнее, чем меньше h . Значит величину $v(t)$ скорости в момент t можно рассматривать как *предел*, к которому стремится отношение, выражающее среднюю скорость на интервале времени от момента t до момента $t+h$.

Сказанное записывают в виде

$$v(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

Задача о теплоёмкости тела

Если температура тела с массой в 1 кг повышается от $t_1 = 0$ до $t_2 = \tau$, то это происходит за счёт того, что телу сообщается определённое количество тепла Q ; значит Q есть функция температуры τ , до которой тело нагревается: $Q = Q(\tau)$.

Пусть температура повысилась с τ до $\tau + \Delta\tau$.

Количество тепла ΔQ , затраченное для этого нагревания равно: $\Delta Q = Q(\tau + \Delta\tau) - Q(\tau)$.

Отношение $\frac{\Delta Q}{\Delta\tau}$ есть количество тепла,

которое необходимо «в среднем» для нагревания тела на 1° . Это отношение называется средней теплоёмкостью, которая не даёт представления о теплоёмкости для любого значения температуры τ .

Теплоёмкостью при температуре τ называется предел отношения приращения количества тепла ΔQ к приращению температуры $\Delta\tau$. (при $\Delta\tau \rightarrow 0$)





Задача. Вычислить количество теплоты, которое необходимо для того, чтобы нагреть 1 кг вещества от 0 градусов до t градусов (по Цельсию).



Решение

Пусть $Q=Q(t)$.

Рассмотрим малый отрезок $[t; t+\Delta t]$,
на этом отрезке

$$\Delta Q = c(t) \cdot \Delta t$$

$$c(t) = \Delta Q / \Delta t$$

$$\text{При } \Delta t \rightarrow 0 \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta Q / \Delta t = Q'(t)$$

$$c(t) = Q'(t)$$

Задача о мгновенной величине тока

Обозначим через $q = q(t)$ количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t .

Пусть Δt – некоторый промежуток времени, $\Delta q = q(t + \Delta t) - q(t)$ – количество электричества, протекающее через указанное сечение за промежуток времени от момента t до момента $t + \Delta t$. Тогда отношение $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ называют средней силой тока.

Мгновенной силой тока в момент времени t называется предел отношения приращения количества электричества Δq ко времени Δt , при условии, что $\Delta t \rightarrow 0$.

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$$



Механический смысл производной.

Исаак Ньютон
(1643 – 1727)



«Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад.»

Механический смысл производной.

Используя слово «предел», можно сказать, что **мгновенная скорость** в точке **t** – это **предел средней скорости** при стягивании отрезка, на котором она изменяется, в точку **t** или в символической записи

$$v(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{S(t_1) - S(t)}{t_1 - t}$$

Производная - это скорость

Механический смысл производной.

$$v_{\text{ср.}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δx – перемещение тела
 Δt – промежуток времени
в течение которого выполнялось
движение

При $\Delta t \rightarrow 0$ $v_{\text{ср.}}$ \rightarrow к мгновенной скорости $v(t)$,
следовательно, $v(t) = S'(t)$.

$$S'(t) = v(t) \quad \text{или} \quad x'(t) = v(t)$$

$$v'(t) = a(t)$$

1. Материальная точка движется по



закону $S(t) = \frac{9}{2}t^2 - 7t + 6$ (м).

В какой **момент времени** (с) скорость точки будет равна 12,8 м/с?

Найти

Найти

Решение. $S'(t) = V(t)$

$$S'(t) = 9t - 7 = V(t)$$

$$V(t) = 12,8 \Rightarrow 9t - 7 = 12,8$$

$$9t = 19,8 \quad \mathbf{t = 2,2 \text{ (с).}}$$

2. Материальная точка движется по

закону $S(t) = \frac{2}{3}t^3 - 5t + 6$ (м).

Чему равно ускорение (м/с²) в момент времени $t=2$ с ?

Решение.

$$S'(t) = V(t) \quad S'(t) = 2t^2 - 5 = V(t)$$

$$V'(t) = a(t) \quad V'(t) = 4t = a(t)$$

$$t = 2 \quad \rightarrow \quad V'(2) = 4 \cdot 2 = 8 = a(2)$$

Ускорение равно 8 (м/с²).



Примеры использования в формулах

- 1) $V(t) = X'(t)$ - скорость
- 2) $a(t) = V'(t)$ - ускорение
- 3) $I(t) = q'(t)$ - сила тока
- 4) $c(t) = Q'(t)$ - теплоёмкость
- 5) $N(t) = A'(t)$ - мощность

Производная в химии

Определение производной

Производная – основное понятие в математике, характеризующее скорость изменения функции в данной точке.

Задача о скорости химической реакции

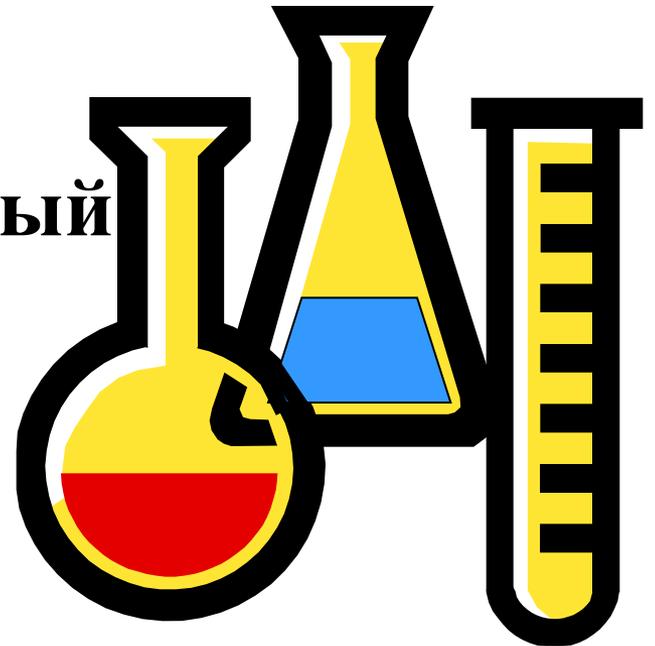
Средняя скорость растворения соли в воде за промежуток времени $[t_0; t_1]$ (масса соли, растворившейся в воде изменяется по закону

$x = f(t)$ определяется по формуле

$$\bullet v_{cp} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$$

Скорость растворения в данный момент времени

$$v(t_0) = f'(t_0)$$



Определение скорости химической реакции.

Скоростью химической реакции называется изменение концентрации реагирующих веществ в единицу времени.

Зачем нужна производная в реакциях?

Так как скорость химической реакции V непрерывно изменяется в ходе процесса, её обычно выражают производной концентрации реагирующих веществ по времени.

Формула производной в ХИМИИ.

Если $C(t)$ - закон изменения количества вещества, вступившего в химическую реакцию, то скорость $V(t)$ химической реакции в момент времени t равна производной:

$$V(t) = C'(t)$$

Понятие производной.

<u>Понятие на языке химии</u>	<u>Обозначение</u>	<u>Понятие на языке математики</u>
Количество в-ва в момент времени t_0	$C = C(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение количества в-ва	$\Delta c = c(t + \Delta t) - c(t)$	Приращение функции
Средняя скорость химической реакции	$\Delta c / \Delta t$	Отношение приращённой функции к приращённому аргументу.

Определение скорости реакции.

Предел отношения
приращённой функции к
приращённому аргументу
при стремлении Δt к нулю-
есть скорость химической
реакции в данный момент
времени

Пояснение к определению.

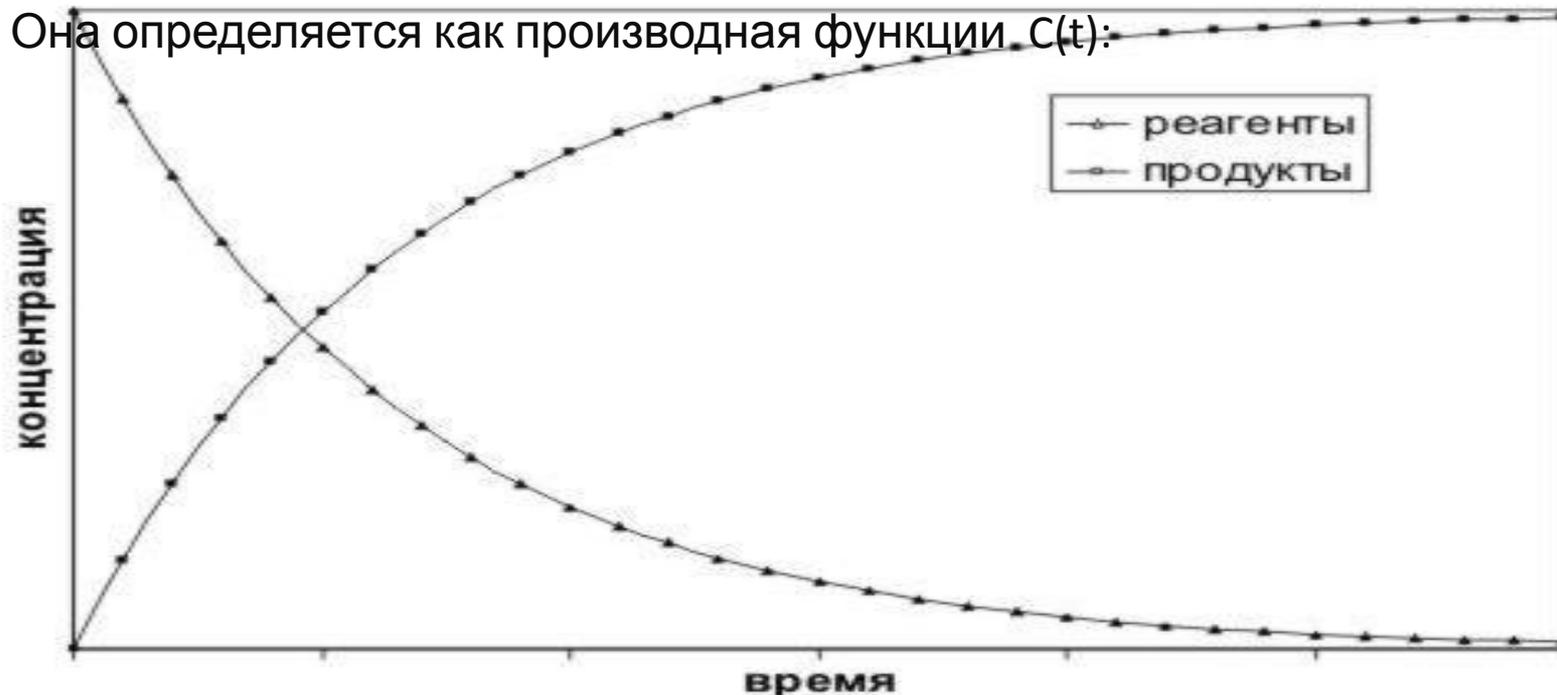
Выражение $V=c/t$

Позволяет определить лишь среднюю скорость реакции за выбранный отрезок

времени. Учёных же, как правило, интересует скорость в выбранный момент

времени, т.е. Так называемая мгновенная скорость химической реакции.

Она определяется как производная функции $C(t)$:



Задача

С системе $\text{CO} + \text{Cl}_2 \rightleftharpoons \text{COCl}_2$ концентрацию CO увеличили от 0,03 до 0,12 моль/л, а концентрацию Cl_2 – от 0,02 до 0,06 моль/л. Во сколько раз возросла скорость прямой реакции?

Дано:

$$C_1(\text{CO}) = 0,03 \text{ моль/л}$$

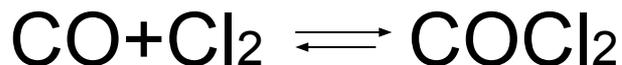
$$C_2(\text{CO}) = 0,12 \text{ моль/л}$$

$$C_1(\text{Cl}_2) = 0,02 \text{ моль/л}$$

$$C_2(\text{Cl}_2) = 0,06 \text{ моль/л}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = ?$$

Решение:



$$V_{\text{реакции}} = K_1 * C_{\text{CO}} * C_{\text{Cl}_2}$$

K – константа скорости

C - концентрация

$$V_1 = K_1 * 0,03 * 0,02 = K_1 * 0,0006 \text{ моль/л}$$

$$V_2 = K_1 * 0,12 * 0,06 = K_1 * 0,0072 \text{ моль/л}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{K_1 * 0,0072}{K_1 * 0,0006} = 12$$

Ответ: Скорость прямой реакции возросла в 12 раз

Заключение.

Понятие производной очень важно в химии, особенно при определении скорости течения реакции.

Производная в биологии

Задача :

По известной зависимости численности популяции $x(t)$ определить относительный прирост в момент времени t .



Популяция –

это совокупность особей данного вида, занимающих определённый участок территории внутри ареала вида, свободно скрещивающихся между собой и частично или полностью изолированных от других популяций, а также является элементарной единицей эволюции.



Решение:

Понятие на языке биологии	Обозначение	Понятие на языке математики
Численность в момент времени t_1	$x = x(t)$	Функция
Интервал времени	$\Delta t = t_2 - t_1$	Приращение аргумента
Изменение численности популяции	$\Delta x = x(t_2) - x(t_1)$	Приращение функции
Скорость изменения численности популяции	$\Delta x / \Delta t$	Отношение приращения функции к приращению аргумента
Относительный прирост в данный момент	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t$	Производная

$$P = x'(t)$$

Производная в ЭКОНОМИКЕ

Экономические задачи

Рассмотрим ситуацию: пусть y - издержки производства, а x - количество продукции, тогда Δx - прирост продукции, а Δy - приращение издержек производства.

В этом случае производная $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает предельные

издержки производства и характеризует приблизительно дополнительные затраты на производство дополнительной

единицы продукции $MC = \frac{dTC}{dQ}$, где MC – предельные

издержки (marginal costs); TC – общие издержки (total costs); Q - количество. $C(t)$ CC

Экономические задачи

Аналогичным образом могут быть определены и многие другие экономические величины, имеющие предельный характер.

Другой пример - категория предельной выручки (MR— marginal revenue) — это дополнительный доход, полученный при переходе от производства n -ной к $(n+1)$ -ой единице продукта.

Она представляет собой первую производную от выручки:

$$MR = \frac{dR}{dQ}$$

При этом $R = PQ$, где R —выручка (revenue); P —цена (price).

Таким образом $\frac{d(PQ)}{dQ} = P, \Rightarrow MR = P$.

Экономические задачи

Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t . Найдем производительность труда в момент t_0 .

За период от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество продукции изменится от $u(t_0)$ до $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период $z = \frac{\Delta u}{\Delta t}$ поэтому производительность труда в момент t_0

$$z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

Экономика

Задание.

Оборот предприятия за истекший год описывается через функцию $U(t)=0,15t^3 - 2t^2 + 200$, где t – месяцы, U -миллионы. Исследуйте оборот предприятия за 9 и 10 месяцы.

Решение. Исследуем оборот предприятия с помощью производной: $U'(t)=0,45t^2 - 4t$

Меньший оборот был на девятом месяце- 0,45. На 10 месяце -5.

Экономика

$\Pi(t) = v'(t)$ - производительность труда,
где $v(t)$ - объем продукции

$J(x) = y'(x)$ - предельные издержки
производства,

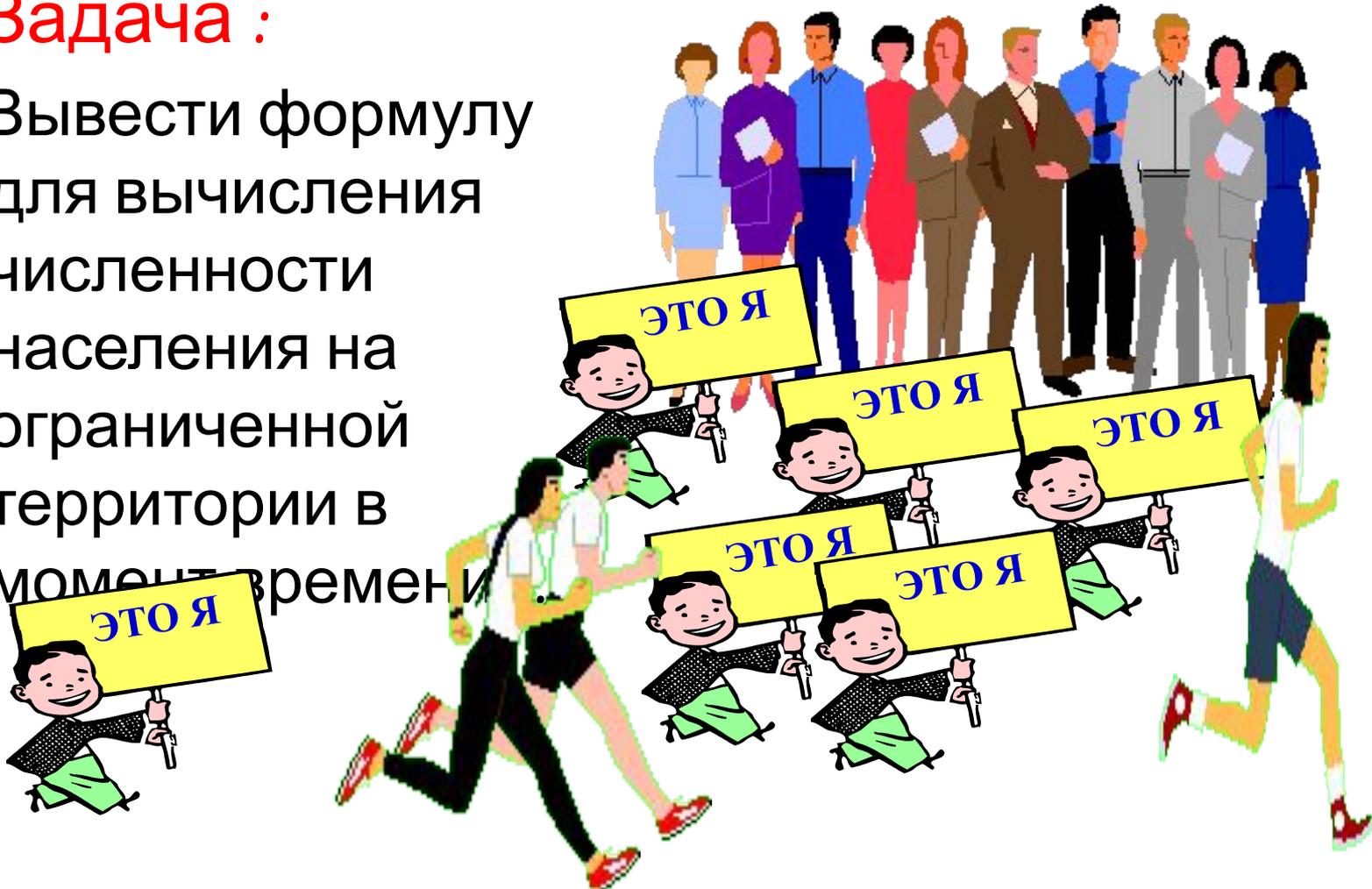
где y - издержки производства в
зависимости от объема выпускаемой
продукции x .

Производная в географии

Рост численности населения

Задача :

Вывести формулу
для вычисления
численности
населения на
ограниченной
территории в
момент времени



ГЕОГРАФИЯ

Идея социологической модели Томаса Мальтуса состоит в том, что прирост населения пропорционально числу населения в данный момент времени t через $N(t)$. $N'(t)=kN$

Модель Мальтуса неплохо действовала для описания численности населения США с 1790 по 1860 годы. Ныне модель в большинстве стран не действует.

Выведем формулу для вычисления численности населения ограниченной территории в момент времени t .

Решение:

Пусть $y=y(t)$ - численность населения.

Рассмотрим прирост населения за $\Delta t=t-t_0$

$\Delta y=ky\Delta t$, где $k=k_p - k_c$ –коэффициент прироста

(k_p – коэффициент рождаемости,

(k_c – коэффициент смертности)

$$\Delta y/\Delta t=ky$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ получим $\lim \Delta y/\Delta t=y'$

$$y'=ky$$

*«...нет ни одной области в
математике, которая когда-
либо не окажется
применимой к явлениям
действительного мира...»*

Н.И. Лобачевский



Возвращаясь к рассмотренным задачам, важно подчеркнуть следующее:

- а) мгновенная скорость** неравномерного движения есть производная от пути по времени;
- б) угловой коэффициент касательной** к графику функции в точке $(x_0; f(x))$ есть производная функции $f(x)$ в точке $x = x_0$;
- в) мгновенная сила тока** $I(t)$ в момент t есть производная от количества электричества $q(t)$ по времени;
- г) теплоёмкость** $C(\tau)$ при температуре τ есть производная от количества тепла $Q(\tau)$, получаемого телом;
- д) скорость химической реакции** в данный момент времени t есть производная от количества вещества $y(t)$, участвующего в реакции, по времени t .

е) $\Pi(t) = v'(t)$ - производительность труда,
где $v(t)$ - объем продукции.

ж) $J(x) = y'(x)$ - предельные издержки
производства, где y - издержки производства в
зависимости от объема выпускаемой
продукции. x .

ВЫВОД:

Производная нашла широкое применение:

- а) в алгебре и началах анализа при исследовании функции и построении графиков функций;
- б) в физике при решении задач на нахождение скорости неравномерного движения, плотности неоднородного тела и др.
- в) в тригонометрии при вычислении тангенса угла наклона касательной к кривой,
а также в геометрии, астрономии, аэродинамике, химии и экономике, биологии и медицине.

АВТОРЫ ПРОЕКТА:

Учёные — химики.



Учёные — математики.



Учёные – биологи.



Учёные – географы.



Учёные — исследователи.



Учёные – физики.



Учёные — ЭКОНОМИКИ.

