ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

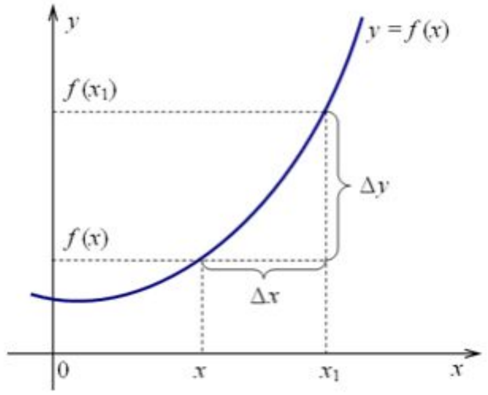
СЕМИНАР

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Если x и x_1 значения аргумента x, а $y = f(x)$ и $y_1 = f(x_1)$ – соответствующие значения функции $y = f(x)$,

то $\Delta x = x_1 - x$ называется *приращением аргумента* x, а $\Delta y = y_1 - y$ или $\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ – *приращением функции y*, соответствующим приращению Δx аргумента.



Производной функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Нахождение производной $y'(x)$ называют *дифференцированием* функции $y = f(x)$.

Геометрический смысл производной: производная $y' = f'(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Механический смысл производной: производная $y' = f'(x)$ в точке x_0 равна мгновенной скорости материальной точки, ордината которой меняется по закону $y = f(x)$, в момент времени x_0.

НАХОЖДЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ

Пример. Найдем производную функции $y = x^2$

Р е ш е н и е. Приращению аргумента Δx, соответствует приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, которое имеет вид:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

По определению находим предел:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом, для функции $y = x^2$ производная $y' = 2x$.

Заметим, что зная выражение для производной $y' = f'(x)$, можно посчитать значение производной в конкретно заданной точке $x = x_0$.

В нашем примере при $x_0 = 0$ производная $y'(0) = 2x\Big|_{x=0} = 0;$

при $x_0 = 2$ производная $y'(2) = 2x\Big|_{x=2} = 2 \cdot 2 = 4;$

при $x_0 = -1$ производная $y'(-1) = 2x\Big|_{x=-1} = 2 \cdot (-1) = -2$ и т.д.

ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Вычисление производной по определению громоздко и трудоемко. На практике нахождение производных упрощается с использованием следующих правил дифференцирования, свойств производной и таблицы производных элементарных функций.

Основные правила нахождения производной

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ функции, имеющие производные, C – постоянная.

1. Производная постоянной равна нулю, т.е. $C' = 0$.

2. Постоянную (константу) можно выносить за знак производной, т.е. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$.

3. Производная суммы (разности) функций равна сумме (разности) производных этих функций, т.е. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.

4. Производная произведения функций находится по формуле: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

5. Производная частного двух функций находится по правилу: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

	функция $f(x)$	производная $f'(x)$
1	x^n	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$
2	a^x	$a^x \ln a$
3	e^x	e^x
4	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\sin x$
8	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
13	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Пример 1. Вычислить производную функции $y = 6x^2 - 7x - 9$

Р е ш е н и е. Функция является суммой трех функций, для вычисления производной воспользуемся правилами

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \quad C' = 0, \quad (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

и формулой дифференцирования степенной функции $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$:

$$y' = (6x^2)' - (7x)' - (9)' = 6(x^2)' - 7(x)' - 0 = 6 \cdot 2x - 7 \cdot 1 = 12x - 7.$$

Пример 2. Найти производную функции $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} - \frac{1}{x^2}$

Р е ш е н и е. Данная функция является суммой степенных функций, поэтому для нахождения производной воспользуемся правилами дифференцирования

$$(u \pm v)' = u' \pm v', (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

и формулой для производной степенной функции $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$:

$$y' = (3\sqrt[3]{x})' - \left(2\sqrt{x^3}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' - 2\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - (x^{-2})' =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}-1} - (-2) \cdot x^{-2-1} = x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-3} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 3\sqrt{x} + \frac{2}{x^3}.$$

ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Пример 3. Найти производную функции $y = x^3 \cdot \sin x$.

Р е ш е н и е. Данная функция является произведением степенной функции и тригонометрической, поэтому для нахождения производной воспользуемся правилом дифференцирования произведения $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ и формулами производных $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ и $(\sin x)' = \cos x$:

$$y' = (x^3 \cdot \sin x)' = (x^3)' \cdot \sin x + x^3 \cdot (\sin x)' = 3x^2 \cdot \sin x + x^3 \cdot \cos x = x^2(3 \sin x + x \cdot \cos x).$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \frac{2-3x}{1+x}$.

Р е ш е н и е. Данная функция является рациональной дробью, поэтому для нахождения производной воспользуемся правилом дифференцирования частного $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, $v \neq 0$:

$$y' = \left(\frac{2-3x}{1+x}\right)' = \frac{(2-3x)' \cdot (1+x) - (2-3x) \cdot (1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{-3(1+x) - (2-3x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{-3-3x-2+3x}{(1+x)^2} = \frac{-5}{(1+x)^2},$$

так как по правилам дифференцирования суммы

$$(2-3x)' = (2)' - (3x)' = 0 - 3(x)' = -3 \cdot 1 = -3; \quad (1+x)' = (1)' + (x)' = 0 + 1 = 1.$$

ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Теорема. *Пусть определена сложная функция* $y(u(x))$ *и пусть:*

внутренняя функция $u(x)$ *имеет в некоторой точке* x_0 *производную* $u'_x = u'(x_0)$*;*

внешняя функция $y(u)$ *имеет в точке* $u_0 = u(x_0)$ *производную* $y'_u = y'(u_0)$*.*

Тогда функция $y(u(x))$ *имеет в точке* x_0 *производную* $(y(u(x)))'$*, причем*

$$(y(u(x_0)))' = y'_u \cdot u'_x = y'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$$

и для произвольной точки x*:*

$$(y(u(x)))' = y'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Эта формула называется правилом дифференцирования сложной функции.

Данная теорема допускает обобщение на сложные функции, являющиеся композицией большего числа функций, чем две. Так "трижды сложную" функцию $y(u(v(x)))$ представим как композицию двух функций: основной функции $y(u)$ (внешняя функция) и сложной функции $u(v(x))$ (внутренняя функция), тогда по теореме:

$$[y(u(v(x)))]' = y'_u \cdot u(v(x))' = y'(u(v(x))) \cdot u'(v(x)).$$

В свою очередь, $u(v(x))$ есть композиция двух функций $u(v)$ и $v(x)$, потому по теореме:

$$(u(v(x)))' = u'_v \cdot v'_x = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

В итоге получается цепочка последовательных вычислений производных функций. При достижении известного навыка промежуточные звенья цепочки можно не выписывать и писать сразу

$$[y(u(v(x)))]' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = y'(u(v(x))) \cdot u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

Полученная формула естественным образом обобщается на композицию произвольного числа функций.

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Пусть $u = u(x)$ - дифференцируемая функция, тогда таблица производных основных элементарных функций аргумента u примет вид

	функция $f(u(x))$	производная $f'(u(x))$
1	u^n	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
2	a^u	$a^u \ln a \cdot u'$
3	e^u	$e^u \cdot u'$
4	$\log_a u$	$\frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$
5	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
6	$\sin u$	$\cos u \cdot u'$
7	$\cos u$	$-\sin u \cdot u'$
8	$\operatorname{tg} u$	$\frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10	$\arcsin u$	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11	$\arccos u$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12	$\operatorname{arctg} u$	$\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13	$\operatorname{arcctg} u$	$-\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Пример 5. Найти $\left(2^{\arccos x^3}\right)'$.

Р е ш е н и е. <u>I способ.</u> Сложную функцию $2^{\arccos x^3}$ представим композицией двух функций $y = 2^u$ и $u = \arccos x^3$:

$$2^{\arccos x^3} = y(u(x)).$$

Поэтому по формуле $(y(u(x)))' = y'(u(x)) \cdot u'(x)$:

$$y'_x = \left(2^{\arccos x^3}\right)' = y'_u \cdot u'_x = (2^u)'_u \cdot \left(\arccos x^3\right)'_x,$$

$$(2^u)'_u = 2^u \cdot \ln 2 = 2^{\arccos x^3} \ln 2.$$

Функция $u = \arccos x^3$ является сложной, представим ее композицией функций $u = \arccos v$ и $v = x^3$, т.е. $u = u\,(v(x))$. Тогда по формуле $u' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$:

$$\left(\arccos x^3\right)'_x = u'_v \cdot v'_x = (\arccos v)'_v \cdot \left(x^3\right)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot 3x^2 = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2.$$

Таким образом,

$$\left(2^{\arccos x^3}\right)' = 2^{\arccos x^3} \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2\right) = -\frac{2^{\arccos x^3} \cdot 3x^2 \cdot \ln 2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

ПРИМЕРЫ НАХОЖДЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Пример 5. Найти $\left(2^{\arccos x^3}\right)'$.

II способ. Данную функцию можно рассматривать как композицию трех функций:

$$2^{\arccos x^3} = y(u(v(x))),\ y = 2^u,\ u = \arccos v,\ v = x^3$$

и для нахождения производной применить обобщение формулы производной сложной функции $(y(u(v(x))))' = y'(u(v(x))) \cdot u'(v(x)) \cdot v'(x)$:

$$2^{\arccos x^3} = [y(u(v(x)))]' = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2^u \ln 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot 3x^2\right) = -\frac{2^{\arccos x^3} \cdot 3x^2 \cdot \ln 2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

Выбор способа решения остается за студентом.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln^2(\sin 2^{\sqrt[3]{x}})$.

Р е ш е н и е. Представим сложную функцию цепочкой основных элементарных функций:

$$\underset{}{x} \quad \to \quad \underset{z}{\sqrt[3]{x}} \quad \to \quad \underset{w}{2^{\sqrt[3]{x}}} \quad \to \quad \underset{v}{\sin 2^{\sqrt[3]{x}}} \quad \to \quad \underset{u}{\ln(\sin 2^{\sqrt[3]{x}})} \quad \to \quad \underset{y}{\left(\ln(\sin 2^{\sqrt[3]{x}})\right)^2}.$$

Или $z = \sqrt[3]{x}$, $w = 2^z$, $v = \sin w$, $u = \ln v$, $y = u^2$.

Следовательно, функция y является "пятисложной" функцией:

$$y = y(u(v(w(z(x))))).$$

Найдем производную y, используя формулу производной сложной функции:

$$y'_x = [y(u(v(w(z(x)))))]'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_w \cdot w'_z \cdot z'_x.$$

Последовательно найдем все производные:

$$y'_u = (u^2)' = 2u, \;\; u'_v = (\ln\, v)' = \frac{1}{v},$$

$$v'_w = (\sin\, w)' = \cos\, w, \;\; w'_z = (2^z)' = 2^z \ln 2, \;\; z'_x = (\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Таким образом,

$$y'_x = 2u \cdot \frac{1}{v} \cdot \cos\, w \cdot 2^z \ln 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 2\ln\left(\sin 2^{\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \frac{1}{\sin 2^{\sqrt[3]{x}}} \cdot \cos 2^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt[3]{x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

ЛОГАРИФМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Найдем производную степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$, если $u\,(x)$ и $v\,(x)$ –дифференцируемые функции. Воспользуемся основным логарифмическим тождеством $x = e^{\ln x}$ и преобразуем функцию y:

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}},$$

а затем применим свойство логарифма степени $\ln a^b = b \ln a$:

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\ln u(x)},$$

получили показательную функцию. Найдем ее производную по формуле $(e^u)' = e^u \cdot u'$:

$$y' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\ln u(x)} \cdot (v\,(x) \ln u\,(x))' = u(x)^{v(x)} \cdot (v\,(x) \ln u\,(x))'.$$

Решение этой задачи можно представить в другом виде, воспользовавшись формулой производной логарифмической функции:

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{u' = u \cdot (\ln u)'}$$

Такой способ отыскания производной называется ***логарифмическим дифференцированием***, он подходит для нахождения производных степенно-показательных функций и функций, представляющих собой произведение (частное) большого числа функций.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример. Найдем производную функции $y = \frac{\sqrt[3]{\cos x}\cdot(2x-1)^2 x^3}{\sqrt{x+2}}$.

По формуле логарифмической производной имеем:

$$y' = \underbrace{\frac{\sqrt[3]{\cos x}\cdot(2x-1)^2 x^3}{\sqrt{x+2}}}_{y} \cdot \left(\ln\left(\frac{\sqrt[3]{\cos x}\cdot(2x-1)^2 x^3}{\sqrt{x+2}}\right)\right)' =$$

$$= y \cdot \left(\tfrac{1}{3}\ln\cos x + 2\ln(2x-1) + 3\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(x+2)\right)' =$$

$$= y \cdot \left(\tfrac{1}{3}\ln\cos x + 2\ln(2x-1) + 3\ln x - \tfrac{1}{2}\ln(x+2)\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{\cos x}\cdot(2x-1)^2 x^3}{\sqrt{x+2}} \cdot \left(\frac{-\sin x}{3\cos x} + \frac{4}{2x-1} + \frac{3}{x} - \frac{1}{2(x+2)}\right).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 6. Найти производную функции $y=(\sin\ x)^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

Р е ш е н и е. Данная функция является степенно-показательной с основанием $\sin\ x$ и показателем $\operatorname{arctg}^2 x$. Использование равенства $a^b=e^{\ln\ a^b}=e^{b\ln\ a}$ позволяет представить заданную функцию как сложную:

$$y=e^{\ln(\sin\ x)^{\operatorname{arctg}^2 x}}=e^{\operatorname{arctg}^2 x\cdot\ln(\sin\ x)}=y(u(v)),$$

где $y=e^u$, $u=\operatorname{arctg}^2 x\cdot\ln(\sin\ x)$.

По правилу дифференцирования сложной функции $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.

Последовательно найдем производные и подставим в последнее равенство

$$y'_u=(e^u)'_u=e^u=e^{\operatorname{arctg}^2 x\cdot\ln(\sin\ x)}=(\sin\ x)^{\operatorname{arctg}^2 x}.$$

Производную функции u найдем, используя правило дифференцирования произведения $(\alpha\cdot\beta)'=\alpha'\cdot\beta+\alpha\cdot\beta'$:

$$u'=\left(\operatorname{arctg}^2 x\right)'\cdot\ln(\sin\ x)+\operatorname{arctg}^2 x\cdot(\ln(\sin\ x))'\quad.$$

Сложную функцию $z=\operatorname{arctg}^2 x$ представим композицией двух функций $z=z(v(x))$, где $z=v^2$, $v=\operatorname{arctg}x$, тогда

$$z'_x=z'_v\cdot v'_x=\left(v^2\right)'\cdot(\operatorname{arctg}x)'=2v\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{2\operatorname{arctg}x}{1+x^2}.$$

Продолжение на следующем слайде

Сложную функцию $w = \ln \sin x$ представим как композицию двух функций $w = w(t(x))$, где $w = \ln t$, $t = \sin x$, тогда

$$w'_x = w'_t \cdot t'_x = (\ln t)' \cdot (\sin x)' = \frac{1}{t} \cdot \cos x = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Подставляя найденные производные в (**) находим производную функции:

$$u' = \frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot \ln(\sin x) + \operatorname{arctg}^2 x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x.$$

Окончательно из (*) находим производную исходной функции

$$y' = (\sin x)^{\operatorname{arctg}^2 x} \left(\frac{2\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot \ln \sin x + \operatorname{arctg}^2 x \cdot \operatorname{ctg} x \right).$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 7. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Р е ш е н и е. Отметим особо, что по мере приобретения навыка, решение может существенно сократиться за счет уменьшения комментариев. Попробуем решить задачу, опуская некоторые моменты вычисления промежуточных производных.

Данную сложную функцию представим цепочкой основных элементарных функций:

$$x \quad \to \quad \underbrace{\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right)}_{v} \quad \to \quad \underbrace{\operatorname{tg}\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right)}_{u} \quad \to \quad \underbrace{\ln \operatorname{tg}\left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right)}_{y}.$$

Или $y = \ln \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = y(u(v(x)))$, где $y = \ln u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = 2x + \frac{\pi}{3}$.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\ln u)' \cdot (\operatorname{tg} v)' \cdot \left(2x + \tfrac{\pi}{3}\right)' =$$

$$= \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \left(2(x)' + \left(\tfrac{\pi}{3}\right)'\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} \cdot 2 = \frac{2}{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4}{\sin 2\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}.$$

Выражение в знаменателе преобразовали по формуле синуса двойного угла: $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2x$. Окончательно

$$y' = \frac{4}{\sin 4\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 8. Найти производные функций

а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$, б) $y = e^{x^2}$, в) $y = \cos^4 ax$.

Р е ш е н и е.

а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\sin x} = y(u(v(x)))$, где $y = \operatorname{arctg} u$, $u = \sqrt{v}$, $\sin x$.

По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = (\operatorname{arctg} u)'(\sqrt{v})'(\sin x)' =$$

$$= \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \cos x = \frac{1}{1+\sin x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}(1+\sin x)}.$$

б) $y' = \left(e^{x^2}\right)' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x.$

в) $y' = (\cos^4 ax)' = 4\cos^3 ax \cdot (\cos ax)' = 4\cos^3 ax \cdot (-\sin ax) \cdot (ax)' = -4a\cos^3 ax \cdot \sin ax.$

Решение двух последних задач приведено вообще без комментариев.

$(\ln^2 x)' =$

- $\frac{\ln x}{2x}$
- $\frac{2 \ln x}{x}$
- $\frac{1}{2x \ln x}$
- $\frac{2}{x \ln^2 x}$

$(\ln \operatorname{arctg} x)' =$

- $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$
- $\ln \frac{1}{(1+x^2)}$
- $\frac{1}{\operatorname{arctg} x}$
- $\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$

$\left(e^{-3x^2}\right)' =$

- $-3e^{-3x^2}$
- e^{-6x}
- $-6x\, e^{-3x^2}$
- $-3x^2 e^{-3x^2-1}$

$(\sin(2^x))' =$

- $-2^x \ln 2 \cdot \cos(2^x)$
- $\cos(2^x \ln 2)$
- $2^x \ln 2 \cdot \sin(2^x)$
- $2^x \ln 2 \cdot \cos(2^x)$

$(\cos^2(\cos x))' =$

- $2\cos(\cos x)\sin x$
- $\sin^2(\sin x)\sin(\cos x)$
- $\sin^2(\cos x)\sin x$
- $2\cos(\cos x)\sin(\cos x)\sin x$

$\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{x}\right)' =$

- $-\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{x^2})}$
- $-\frac{1}{x^2\cdot\sin^2(\frac{1}{x})}$
- $-\frac{1}{\sin^2(\frac{1}{x})}$
- $\frac{1}{x^2\cdot\sin^2(\frac{1}{x})}$

$(\operatorname{arctg} e^{2x})' =$

- $\frac{2e^{2x}}{1+x^2}$
- $\frac{2xe^{2x-1}}{1+e^{4x}}$
- $\frac{2e^{2x}}{1+e^{4x}}$
- $\frac{1}{1+e^{4x}}$

$(\cos(\cos^2 x))' = ?$

- $\sin(\sin^2 x)$
- $-\sin(\sin^2 x) 2 \cos x \sin x$
- $-\sin(\cos^2 x) 2 \cos x \sin x$
- $\sin(\cos^2 x) 2 \cos x \sin x$

$(\ln^2 \ln x)' = ?$

- $2 \ln x \cdot \ln \frac{1}{x}$
- $\frac{2 \ln \ln x}{\ln x}$
- $\frac{2 \ln \ln x}{x}$
- $\frac{2 \ln \ln x}{x \ln x}$

$(x^{\ln x})' = ?$

- $x^{\ln x - 1} 2 \ln^2 x$
- $\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$
- $x^{\ln x - 1} 2 \ln x$
- $\ln^2 x \cdot x^{\ln x - 1}$

$\left(x^{\sqrt{x}}\right)' =$

- $x^{\sqrt{x}} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$
- $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \left(\frac{\ln x}{2} + 1\right)$
- $\sqrt{x} \cdot x^{\sqrt{x}-1} \ln x$
- $\frac{x^{\sqrt{x}-1}}{2}$

$(\sin x^{\sin x})' =$

- $\cos x^{\sin x} x^{\sin x - 1} \sin x$
- $\cos x^{\cos x} \ln x$
- $\cos x^{\sin x} \left(x^{\sin x - 1} \sin x + x^{\sin x} \cos x \ln x\right)$
- $\cos x^{\sin x} x^{\sin x} \cos x \ln x$

Найти производную функции

$$y = \frac{x^3}{x-1}.$$

- $y' = -\frac{3x^2}{(x-1)^2}$
- $y' = \frac{2x^2}{x-1}$
- $y' = \frac{x^2(2x-3)}{(x-1)^2}$
- $y' = \frac{x^2(2x+3)}{(x-1)^2}$

Найти производную функции

$$y = \frac{2^x}{x}.$$

- $y' = \frac{2^x(x\ln 2+1)}{x^2}$
- $y' = \frac{2^x(x\ln 2-1)}{x^2}$
- $y' = \frac{2^x(x-1)}{x^2}$
- $y' = -\frac{2^x \ln 2}{x^2}$

Найти производную функции

$$y = \frac{x^3}{\ln x}.$$

- $y' = \frac{3x^2 - \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$
- $y' = \frac{x^2(3\ln x - 1)}{\ln^2 x}$
- $y' = -\frac{3x}{\ln^2 x}$
- $y' = 3x^4$

Найти производную функции

$$y = \frac{2x^2-1}{e^x}.$$

- $y' = \frac{4x-2x^2+1}{e^x}$
- $y' = \frac{4x}{e^x}$
- $y' = \frac{4x+2x^2-1}{e^x}$
- $y' = \frac{4xe^x-2x^2+1}{e^{2x}}$