

Дифференциал функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на множестве X , содержащем точку x_0 . Приращению аргумента Δx соответствует приращение функции $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которое по определению дифференцируемой функции равно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x).$$

Главная, линейная относительно Δx , часть приращения $\Delta f(x_0)$ называется **дифференциалом**, обозначается

$$df(x_0) = f'(x_0) dx,$$

где $dx = \Delta x$ – дифференциал независимой переменной при $\Delta x \rightarrow 0$.

Если x_0 – произвольная точка множества X , то, определяя дифференциал в каждой точке, найдем общий вид дифференциала функции:

$$df(x) = f'(x) dx.$$

Дифференциалы явно заданных функций

Пример. Найти дифференциал функции $f(x)$ в общем виде.

А) $f(x) = \frac{e^3}{\sqrt{x}}$.

$$df(x) = d\frac{e^3}{\sqrt{x}} = \left(\frac{e^3}{\sqrt{x}}\right)' dx = e^3 \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' dx = e^3 \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) dx = -\frac{e^3}{2\sqrt{x^3}} dx.$$

Б) $f(x) = x^x$

$$df(x) = dx^x = (x^x)' dx = x^x (\ln x^x)' dx = x^x (x \ln x)' dx = x^x (\ln x + 1) dx.$$

Дифференциал функции, заданной неявно

Пример. Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $y = \cos(x - y)$.

Решение. Найдем дифференциал равенства:

$$dy = d \cos(x - y)$$

$$dy = -\sin(x - y)d(x - y)$$

$$dy = -\sin(x - y)(dx - dy).$$

Из полученного равенства выразим dy :

$$dy + \sin(x - y)dy = -\sin(x - y)dx$$

$$dy(1 + \sin(x - y)) = -\sin(x - y)dx$$

$$dy = -\frac{\sin(x - y)}{1 + \sin(x - y)}dx.$$

Дифференциал в точке

Пример. Найти дифференциал функции $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0,01$.

Решение. Дифференциал в общем виде

$$\begin{aligned}df(x) &= d \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} (x + \sqrt{1+x^2})' dx = \\&= \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.\end{aligned}$$

При $dx = \Delta x = 0,01$ и $x = 1$:

$$df(1) = \left. \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \right|_{x=1; \Delta x=0,01} = \frac{0,01}{\sqrt{1+1}} = \frac{0,01}{\sqrt{2}}.$$

Приближенные вычисления

Так как приращение дифференцируемой функции равно:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \Delta x + o(\Delta x),$$

то при достаточно малых Δx верно приближенное равенство

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x,$$

или

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \Delta x,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Обозначив $x_0 + \Delta x = x$, приращение определим как разность $\Delta x = x - x_0$ и запишем формулу для приближенного вычисления значения функции в точке x :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) (x - x_0).$$

Важно! При вычислении значения функции с помощью полученного равенства x_0 выбирают так, чтобы значения $f(x_0)$ и $f'(x_0)$ легко вычислялись, а приращение $\Delta x = x - x_0$ было достаточно мало по абсолютной величине, т.е. $|\Delta x| \ll 1$.

Пример приближенного вычисления

Пример. Вычислим приближенно $\sqrt{2}$.

Решение. Так как известно значение $\sqrt{2,25} = 1,5$, и разность $2,25 - 2 = 0,25$ достаточно мала, то, полагая $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 2$, $x_0 = 2,25$, применим формулу приближенного вычисления:

$$f(2,25) = \sqrt{2,25} = 1,5.$$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f'(2,25) = \frac{1}{2\sqrt{2,25}} = \frac{1}{3}.$$

Подставим в формулу

$$\sqrt{2} \approx f(2,25) + f'(2,25)(2 - 2,25) = 1,5 - \frac{1}{3}0,25 = \frac{4,25}{3} = 1,41(6).$$

Найти дифференциал в общем виде для функции

$$f(x) = e^{\cos^2 x}$$



$$df = -e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$$



$$df = e^{\cos^2 x} \sin x dx$$



$$df = e^{\cos^2 x} \sin 2x dx$$



$$df = e^{-\sin 2x} dx$$

Вычислить дифференциал функции $y = x^2 - x$ в точке $x = 10$ при $\Delta x = 0,1$



$$dy(10) = 2$$



$$dy(10) = 9$$



$$dy(10) = 1,91$$



$$dy(10) = 1,9$$

Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

$$dy = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right) dx$$

$$dy = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$dy = \frac{\sqrt{1-y^2}-1}{\sqrt{1-x^2}-1} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} dx$$

$$dy = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-y^2}-1} \cdot \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} dx$$

Найти дифференциал функции $y(x)$, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = 2 \operatorname{tg} t \\ y = 2\sin^2 t + \sin 2t \end{cases}$ в точке, соответствующей значению $t = \frac{\pi}{4}$.



$$dy(2) = 2dx$$



$$dy(2) = \frac{dx}{2}$$



$$dy(2) = \cos^2 2 (\sin 4 + \cos 4) dx$$



$$dy(2) = (\sin 4 + \cos 4) dx$$

Указать приближенное значение $\lg 11$, найденное с помощью дифференциала

1,042

1,043

1,041

1,040

Указать приближенное значение $\sqrt[3]{9}$, найденное с помощью дифференциала



2,08



2,082



2,081



2,083

Указать приближенное значение $\arcsin 0,49$, найденное с помощью дифференциала

0,535

0,512

0,51

0,53

