

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор: к. ф. - м. н., доцент  
Мукимов Ваниль Рафкатович

# Постановка задачи. Определения

Пусть функция  $y = f(x)$  отражает количественную сторону некоторого явления. Часто рассматривая это явление, мы не можем непосредственно установить характер зависимости  $y$  от  $x$ , а можем установить зависимость между величинами  $x$  и  $y$  и производными от  $y$  по  $x$  :  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ , то есть написать дифференциальное уравнение. Из полученной зависимости между переменными  $x$  и  $y$  и производными требуется установить непосредственно зависимость  $y$  от  $x$ , то есть найти  $y=f(x)$  или, как говорят, проинтегрировать дифференциальное уравнение.

*Пример:* С некоторой высоты сброшено тело, масса которого  $m$ . Требуется установить, по какому закону будет изменяться скорость  $v$  падения этого тела, если на него кроме силы тяжести, действует тормозящая сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости, с коэффициентом пропорциональности  $k$ , то есть требуется найти  $v = f(x)$ .

Определение: Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную  $x$ , искомую функцию  $y = f(x)$  и ее производные  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ .

Символически дифференциальное уравнение

можно написать так:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

ИЛИ

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$$

Если искомая функция  $y = f(x)$  есть функция одной неизвестной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

Определение: Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например, уравнение  $y' - 2xy^2 + 5 = 0$  - первого порядка,  
 $y'' - ky' = \sin x$  - уравнение второго порядка.

Решением, или интегралом дифференциального уравнения называется всякая функция  $y = f(x)$  которая будучи подставлена в уравнение, превращает его в тождество.

# Дифференциальные уравнения первого порядка (общие понятия)

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0$$

Если это уравнение можно разрешить относительно  $y'$ , то его можно записать в виде

$$y' = f(x, y)$$

В этом случае говорят, что дифференциальное уравнение разрешимо относительно производной. Для таких уравнений справедлива теорема, которая называется теоремой о существовании и единственности решения дифференциального уравнения.

Теорема: Если в уравнении  $y' = f(x, y)$  функция  $y = f(x)$  и ее частная производная  $\frac{\partial f}{\partial y}$  непрерывны в некоторой области  $D$  на плоскости  $XOY$ , содержащей некоторую точку  $(x_0, y_0)$ , то существует единственное решение этого уравнения  $y = \varphi(x)$ , удовлетворяющее условию  $y = y_0$  при  $x = x_0$ .

Геометрический смысл теоремы: Существует и притом единственная функция  $y = \varphi(x)$  график которой проходит через точку  $(x_0, y_0)$ .

Условие, что при  $x = x_0$  функция  $y$  должна равняться заданному числу  $y_0$ , называется начальным условием. Оно часто записывается в виде:

$$y \Big|_{x=x_0} = y_0$$

Определение: Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция

$$y = \varphi(x, C),$$

которая зависит от одной произвольной постоянной  $C$  и удовлетворяет следующим условиям:

а) она удовлетворяет дифференциальному уравнению при любом конкретном значении постоянной  $C$ ;

б) каково бы ни было начальное условие  $y_0 = y_0$  при  $x_0 = x_0$ , то есть  $y|_{x=x_0} = y_0$ , можно найти такое значение  $C = C_0$ , что функция  $y = \varphi(x, C_0)$  удовлетворяет данному начальному условию.

При этом предполагается, что значения  $y_0$  и  $x_0$  принадлежат к той области изменения переменных  $x$  и  $y$ , в которой выполняются условия теоремы существования и единственности.

Определение: Частным решением называется любая функция  $y = \varphi(x, C_0)$ , которая получается из общего решения  $y = \varphi(x, C)$ , если в последнем произвольной постоянной  $C$  придать определенное значение  $C = C_0$ .

Решить, или проинтегрировать дифференциальное уравнение, значит:

а) найти общее решение или общий интеграл, если начальные условия не заданы,

или

б) найти то частное решение уравнения, которое удовлетворяет заданным начальным условиям, если таковые имеются.

# Уравнение с разделенными и разделяющимися переменными

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y),$$

где правая часть есть произведение функции, зависящей только от  $x$ , на функцию, зависящую только от  $y$ . Преобразуем его следующим образом, предполагая, что  $f_2(y) \neq 0$ :

$$\frac{1}{f_2(y)} dy = f_1(x) dx$$

Интегрируя, левую часть по  $y$ , а правую по  $x$ , найдем

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx +$$

Мы получили соотношение, связывающее решение  $y$ , независимую переменную  $x$  и произвольную постоянную  $C$ , то есть получили общий интеграл уравнения

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x) dx + C$$

1) дифференциальное уравнения

типа

$$M(x)dx + N(y)dy = 0,$$

называют уравнением с разделенными переменными.

Общий интеграл его по доказанному есть  $\int M(x)dx + \int N(y)dy = C$ ,

2) уравнение

вида

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$

называется уравнением с разделяющимися переменными.

# Однородные уравнения первого порядка

Определение: Функция  $f(x, y)$  называется однородной функцией  $n$ -го измерения относительно переменных  $x$  и  $y$ , если при любом  $\lambda$  справедливо тождество  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Пример: Функция  $f(x, y) = xy - y^2$  -2 - ого измерения.

Определение: Уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется однородным относительно  $x$  и  $y$ , если функция  $f(x, y)$  является однородной функцией нулевого измерения относительно  $x$  и  $y$ .

# Линейные уравнения первого порядка

Определение: Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производной.

Оно имеет вид 
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

где  $P(x), Q(x)$  - заданные непрерывные функции от  $x$  (или постоянные). Если, в частности,  $Q \equiv 0$ , то уравнение 
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$
 имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$$

Уравнение  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0$  называется линейным однородным, или без правой части, уравнение  $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$  - неоднородным.

# Уравнения Бернулли и Риккати

Рассмотрим уравнение  
вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n,$$

где  $P(x), Q(x)$  – непрерывные функции от  $x$ , или постоянные, а  $n \neq 0, n \neq 1$ , в противном случае получилось бы линейное уравнение. Уравнение называется

уравнением Бернулли. Оно приводится к линейному следующим преобразованием: Разделив все члены уравнения на  $y^n$ , получим  $\frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$ .

Сделаем замену  $z = y^{-n+1}$ , тогда  $\frac{dz}{dx} = (-n+1)y^{-n} \frac{dy}{dx}$ .

Подставляя эти значения в уравнение  $y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{-n+1} = Q(x)$  будем иметь линейное уравнение  $\frac{dz}{dx} + (-n+1)Pz = (-n+1)Q$ . Найдя его общий интеграл и подставив вместо  $z$  выражение  $y^{-n+1}$ , получим общий интеграл уравнения Бернулли

**Замечание:** Решение уравнения Бернулли можно искать в виде произведения двух функций:  $y = u(x)v(x)$ , где  $v(x)$  - какая-либо функция, отличная от 0 и удовлетворяющая уравнению  $v' + Pv = 0$ .

Общее уравнение Риккати имеет вид:  $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$ , где  $a(x) \neq 0$ .

Уравнение Риккати в общем случае не интегрируется в квадратурах.

1) если известно частное решение уравнения Риккати, то все его решения находятся с помощью двух квадратур. Пусть  $y_1(x)$  - частное решение. Полагая  $y = u + y_1(x)$ , получим уравнение Бернулли.

# Уравнение в полных дифференциалах

Определение: Уравнение  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

называется

уравнением в полных дифференциалах, если  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  - непрерывно - дифференцируемые функции, для которых выполняется соотношение  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ,

причем  $\frac{\partial M}{\partial y}$  и  $\frac{\partial N}{\partial x}$  непрерывны в некоторой области.

# Огибающая семейства кривых

Пусть дано уравнение  
вида

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

где  $x, y$  – переменные декартовы координаты,  $C$  – параметр, принимающие различные фиксированные значения. При каждом данном значении параметра  $\Phi(x, y, C) = 0$ , уравнение определяет некоторую кривую на плоскости  $XOY$ . Придавая  $C$  всевозможные значения, мы получаем семейство кривых, зависящие от одного параметра, или, как часто говорят, - однопараметрическое семейство кривых. Таким образом, уравнение  $\Phi(x, y, C) = 0$  есть уравнение однопараметрического семейства кривых:

Определение: Линия  $L$  называется огибающей однопараметрического семейства линий, если она в каждой своей точке касается той или иной линии семейства, причем в различных точках линий  $L$  ее касается различные линии данного семейства.

# Особые решения дифференциального уравнения первого порядка

Пусть дано дифференциальное  
уравнение

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

которое имеет общий  
интеграл

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Определение: Решение дифференциального уравнения, не получающееся из общего интеграла ни при каком значении  $C$  и имеющее своим графиком огибающую семейства интегральных кривых, входящих в общее решение, называется особым решением дифференциального уравнения.

Определение: Точка, в которой нарушается единственность решения дифференциального уравнения, то есть точка, через которую проходят по крайней мере 2 интегральные кривые, называется особой точкой.

# Метод введения параметра. Уравнение Лагранжа и Клеро

Одним из наиболее мощных методов интегрирования является метод введения параметра или, как его еще называют, интегрирование посредством дифференцирования. Суть метода состоит в следующем:

1) Вводится новая переменная (параметр)  $p$  по формуле  $y' = p$ , при этом переменные  $x$  и  $y$  рассматриваются как функции от  $p$ :  $x = x(p)$ ,  $y = y(p)$ .

2) Уравнение  $F(x, y, y') = 0$  приводится к виду  $F(x, y, p) = 0$

, и

полученное уравнение дифференцируем по  $x$  или  $y$ .

Определение: Уравнением Лагранжа называется уравнение вида

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  - известные функции от  $\frac{dy}{dx}$ .

# Уравнение Якоби

К числу уравнений первого порядка, общее решение которых выражается в элементарных функциях, относится уравнение Якоби. Оно имеет вид

$$(Ax + By + C)dx + (A'x + B'y + C')dy + \\ +(A''x + B''y + C'')(xdy - ydx) = 0$$

где  $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$  - постоянные.

# Ортогональные и изогональные траектории

Пусть имеем однопараметрическое семейство кривых

$$\Phi(x, y, C) = 0.$$

Определение: *Линии, пересекающие все кривые данного семейства  $\Phi(x, y, C) = 0$  под постоянным углом, называются изогональными траекториями. Если же этот угол прямой, то траектории называются ортогональными.*

Уравнение ортогональных траекторий :

$$F \left( x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right) = 0$$

Уравнение изогональных траекторий :

$$F \left( x, y, -\frac{\frac{dy}{dx} - k}{d \frac{dy}{dx} + 1} \right) = 0$$