

# ПРОСТРАНСТВО $I_s R$ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

---

- Пространство  $I_s R$  центрированных интервалов
- Сопряженный интервал
- Расширенное множество интервалов
- Операции интервального сложения и умножения на число
- Операция интервального умножения
- Операция интервального деления
- Непрерывность интервальных операций
- Интервальные отображения
- Список рекомендуемой литературы



# ПРОСТРАНСТВО $I_s R$ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

---

$IR$  – множество замкнутых вещественных интервалов  $[a, b]$ , где  $a \leq b, a, b \in R^1$

$$[a, b] = [x - v_x, x + v_x], \quad (1)$$

где

$$x = (a + b) / 2, v_x = (b - a) / 2$$

$$[a, b] \leftrightarrow \langle x, v_x \rangle, \quad (2)$$

где  $x \in R^1, v_x \in R^+$

$$IR \leftrightarrow I_s R$$



# Сопряженный интервал

---

$$\overline{[a, b]} = [b, a] \quad (3)$$

$\overline{IR}$  – множество интервалов, сопряженных с интервалами из  $IR$

$$\overline{[a, b]} = [x + v_x, x - v_x]$$

$$\langle \overline{X} \rangle \leftrightarrow \langle x, -v_x \rangle$$



# Сопряженный интервал

---

$$\overline{IR} \leftrightarrow \overline{I_s R}$$

$$IR \cap \overline{IR} = R^1$$

$$I_s R \cap \overline{I_s R} = R^1 \quad (4)$$



# Расширенное множество интервалов

---

$A, B, \dots, X, Y, \dots$  элементы множества  $\mathbf{IR} = IR \cup \overline{IR}$ ,

$\langle A \rangle, \langle B \rangle, \dots, \langle X \rangle, \langle Y \rangle, \dots$  – элементы множества  $\mathbf{I}_s\mathbf{R} = I_sR \cup \overline{I_sR}$

если  $\langle X \rangle \in I_sR$ , то  $\langle \overline{X} \rangle \in \overline{I_sR}$

если  $\langle X \rangle \in \overline{I_sR}$ , то  $\langle \overline{X} \rangle \in I_sR$

$$A \leftrightarrow \langle A \rangle = \langle a, v_a \rangle, B \leftrightarrow \langle B \rangle = \langle b, v_b \rangle,$$

.....,

$$X \leftrightarrow \langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle, Y \leftrightarrow \langle Y \rangle = \langle y, v_y \rangle,$$

.....

(5)



# Операции интервального сложения и умножения на число

---

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, v_x + v_y \rangle \quad (6)$$



# Операции интервального сложения и умножения на число

---

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, v_x + v_y \rangle \quad (6)$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x, |\lambda| v_x \rangle, \lambda \in R^1$$



# Операции интервального сложения и умножения на число

---

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, v_x + v_y \rangle \quad (6)$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x, |\lambda| v_x \rangle, \lambda \in R^1$$

$$\langle X \rangle - \langle Y \rangle = \langle X \rangle + (-1) \langle Y \rangle = \langle x - y, v_x + v_y \rangle$$



# Операции интервального сложения и умножения на число

---

$$\langle X \rangle - \langle X \rangle \neq \langle 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

$$\langle X \rangle - \langle \bar{X} \rangle = \langle 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \quad (7)$$

$$\langle X \rangle + \langle \bar{X} \rangle = \langle 2x, 0 \rangle \in R^1$$

$$\langle \bar{\bar{X}} \rangle = \langle X \rangle$$



# Операция интервального умножения

Разбиение пространства  $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \bigotimes_{i=1}^3 \mathbf{I}_{si}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{I}_{s1}$  – множество точек  $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ , таких что

$$x - |v_x| > 0 \quad (9)$$

$\mathbf{I}_{s2}$  – множество точек  $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ , таких что

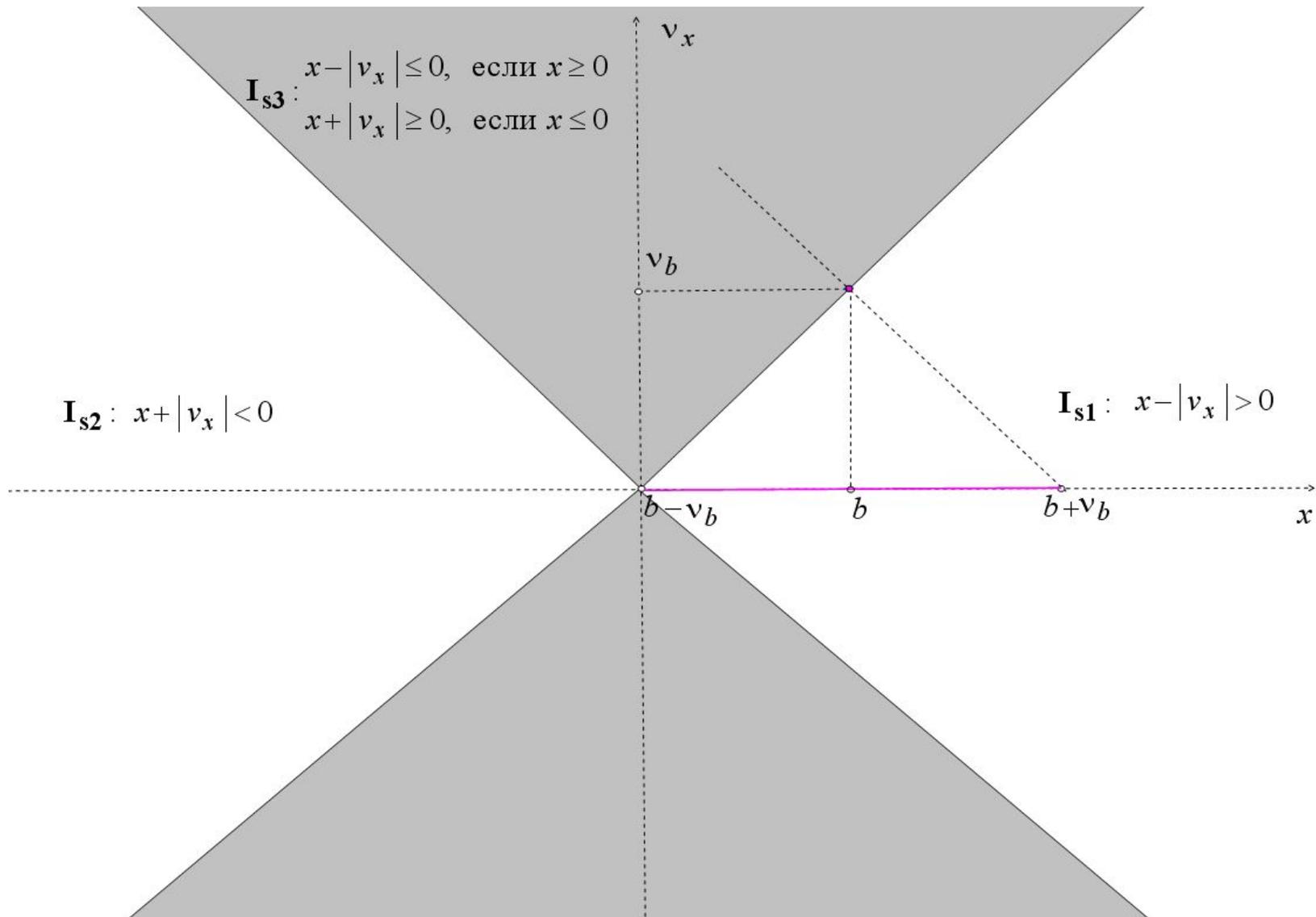
$$x + |v_x| < 0 \quad (10)$$

$\mathbf{I}_{s3}$  – множество точек  $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$ , таких что

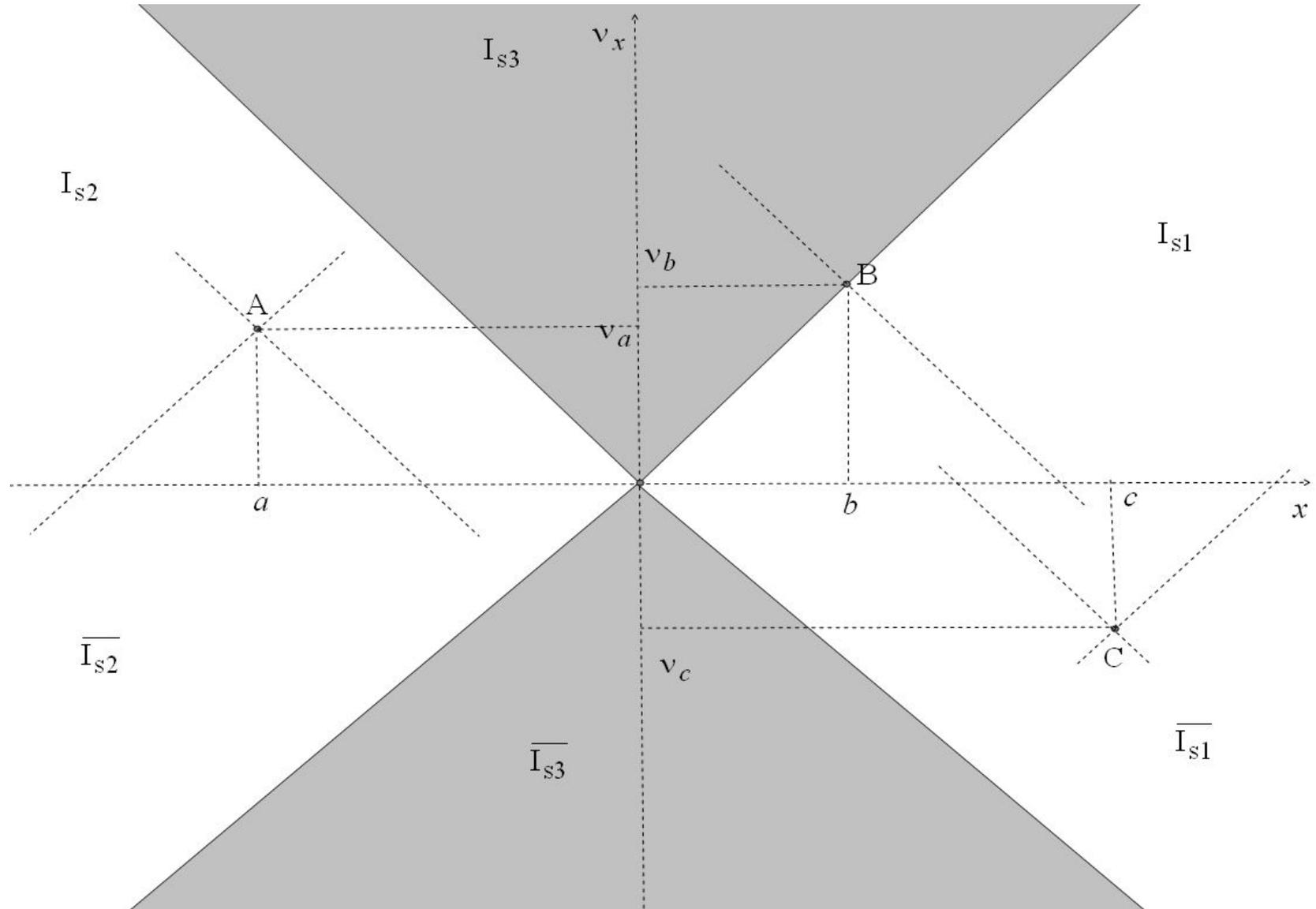
$$\begin{aligned} x - |v_x| &\leq \theta \text{ если } \theta \geq \\ x + |v_x| &\geq \theta \text{ если } \theta \leq \end{aligned} \quad (11)$$



# Операция интервального умножения



# Операция интервального умножения



# Операция интервального умножения

$\langle A \rangle \cdot \langle B \rangle = \langle ab + v_a v_b, bv_a + av_b \rangle$  – операция гиперболического

умножения интервалов  $\langle A \rangle$  и  $\langle B \rangle$

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle & \text{если } \langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle \bar{Y} \rangle \cdot \langle X \rangle & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle (|v_y|, 0) \rangle \cdot \langle X \rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \end{cases} \quad (11)$$

$$s = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -\mathbf{1} & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$



# Операция интервального умножения

---

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle \bar{X} \rangle & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \\ \langle \bar{Y} \rangle \cdot \langle \bar{X} \rangle & \text{если } \langle X \rangle \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \\ \langle \text{если } |v_y|, 0 \rangle; \langle \bar{X} \rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \end{cases} \quad (12)$$

$$s = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -\mathbf{1} & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$



# Операция интервального умножения

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle (y + s |v_y|), 0 \rangle \cdot \langle X \rangle, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_1 \\ \langle (x - s |v_x|), 0 \rangle \cdot \overline{\langle Y \rangle}, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_2 \\ \langle (x + s |v_x|), 0 \rangle \cdot \langle Y \rangle, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_3 \\ \langle (y - s |v_y|), 0 \rangle \cdot \overline{\langle X \rangle}, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_4 \end{cases} \quad (13)$$

$$s = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -\mathbf{1} & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$



# Операция интервального умножения

---

$$\mathbf{I}_1: \begin{cases} -y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \\ -y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_2: \begin{cases} -y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \\ y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_3: \begin{cases} y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \\ -y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_4: \begin{cases} y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \\ y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$



# Операция интервального деления

---

$$\frac{\langle X \rangle}{\langle Y \rangle} = \left( \frac{1}{y^2 - v_y^2} \right) \cdot \langle X \rangle * \langle Y \rangle, \quad |y| \neq |v_y| \quad (14)$$



# Непрерывность интервальных операций

---

**Теорема.** Операции интервального сложения, вычитания, умножения и деления – непрерывны



# Интервальные отображения

---

**Определение.** Отображение  $f: E \rightarrow \mathbf{I}_s \mathbf{R}$  ( $E \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ )

$$f \left( \langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots, \langle A_k \rangle, \langle X \rangle \right),$$

удовлетворяющее условию

$$f \left( \langle a_1, 0 \rangle, \langle a_2, 0 \rangle, \dots, \langle a_k, 0 \rangle, \langle x, 0 \rangle \right) \in R^1,$$

называется интервальным отображением.

**Определение.** Интервальное отображение  $f: E \rightarrow \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ , порождаемое элементарной функцией  $f$ , называется элементарным отображением.



# Интервальные отображения

---

$$f(x) = ax$$

порождает отображение

$$f(\langle X \rangle) = \langle A \rangle * \langle X \rangle$$

$$f(x) = ax^2 + bx, \quad f(x) = (ax + b)x$$

порождают отображения

$$f_1(\langle X \rangle) = \langle A \rangle * \langle X \rangle^2 + \langle B \rangle * \langle X \rangle$$

$$f_2(\langle X \rangle) = (\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle B \rangle) * \langle X \rangle$$



# Интервальные отображения

$$f(x) = x^2$$

порождает отображение

$$f(\langle X \rangle) = \langle X \rangle * \langle X \rangle =$$

$$= \langle X \rangle^2 = \begin{cases} \langle x^2 + v_x^2 \rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \cup \mathbf{I}_{s2} \\ \langle (x + |v_x|) \cdot x \rangle, & 0 \leq \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad x \geq |v_x| \\ \langle (x - |v_x|) \cdot x \rangle, & 0 \leq \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad x \leq |v_x| \end{cases}$$



# Интервальные отображения

---

порождает отображение

$$f(x) = |x|$$

$$f(\langle X \rangle) = |\langle X \rangle| = \langle |x|, v_x \rangle \quad \forall \langle X \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$$



# Список рекомендуемой литературы

---

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
2. Kaucher E. Interval Analysis in the Extended Interval space IR // Comp. Suppl. – 1980. – P. 33–49.



# Отношение порядка на множестве $I/R$

---

$$\langle X \rangle < \langle Y \rangle, \text{ если } x < y \text{ или } \begin{cases} x = y \\ v_x < v_y; \end{cases} \quad \langle Y \rangle < \langle X \rangle, \text{ если } y < x \text{ или } \begin{cases} y = x \\ v_y < v_x. \end{cases}$$

$$\langle X \rangle \leq \langle A \rangle: \quad x < a, v_x \in R^1 \text{ или } \begin{cases} x = a \\ v_x \leq v_a, v_x \in R^1 \end{cases}$$

