

ПРОСТРАНСТВО $I_s R$ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

- Пространство $I_s R$ центрированных интервалов
- Сопряженный интервал
- Расширенное множество интервалов
- Операции интервального сложения и умножения на число
- Операция интервального умножения
- Операция интервального деления
- Непрерывность интервальных операций
- Интервальные отображения
- Список рекомендуемой литературы



ПРОСТРАНСТВО $I_s R$ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ИНТЕРВАЛОВ

IR – множество замкнутых вещественных интервалов $[a, b]$, где $a \leq b$, $a, b \in R^1$

$$[a, b] = [x - v_x, x + v_x], \quad (1)$$

где

$$x = (a + b) / 2, \quad v_x = (b - a) / 2$$

$$[a, b] \leftrightarrow \langle x, v_x \rangle, \quad (2)$$

где $x \in R^1$, $v_x \in R^+$

$$IR \leftrightarrow I_s R$$



Сопряженный интервал

$$\overline{[a, b]} = [b, a] \quad (3)$$

\overline{IR} – множество интервалов, сопряженных с интервалами из IR

$$\overline{[a, b]} = [x + v_x, x - v_x]$$

$$\langle \overline{X} \rangle \leftrightarrow \langle x, -v_x \rangle$$



Сопряженный интервал

$$\overline{IR} \leftrightarrow \overline{I_s R}$$

$$IR \cap \overline{IR} = R^1$$

$$I_s R \cap \overline{I_s R} = R^1 \quad (4)$$



Расширенное множество интервалов

A, B, \dots, X, Y, \dots элементы множества $\mathbf{IR} = IR \cup \overline{IR}$,

$\langle A \rangle, \langle B \rangle, \dots, \langle X \rangle, \langle Y \rangle, \dots$ – элементы множества $\mathbf{I}_s\mathbf{R} = I_sR \cup \overline{I_sR}$

если $\langle X \rangle \in I_sR$, то $\langle \overline{X} \rangle \in \overline{I_sR}$

если $\langle X \rangle \in \overline{I_sR}$, то $\langle \overline{X} \rangle \in I_sR$

$$A \leftrightarrow \langle A \rangle = \langle a, v_a \rangle, B \leftrightarrow \langle B \rangle = \langle b, v_b \rangle,$$

.....

$$X \leftrightarrow \langle X \rangle = \langle x, v_x \rangle, Y \leftrightarrow \langle Y \rangle = \langle y, v_y \rangle,$$

.....

(5)



Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, v_x + v_y \rangle \quad (6)$$



Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, v_x + v_y \rangle \quad (6)$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x, |\lambda| v_x \rangle, \lambda \in R^1$$



Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle + \langle Y \rangle = \langle x + y, v_x + v_y \rangle \quad (6)$$

$$\lambda \langle X \rangle = \langle \lambda x, |\lambda| v_x \rangle, \lambda \in R^1$$

$$\langle X \rangle - \langle Y \rangle = \langle X \rangle + (-1) \langle Y \rangle = \langle x - y, v_x + v_y \rangle$$



Операции интервального сложения и умножения на число

$$\langle X \rangle - \langle X \rangle \neq \langle 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle$$

$$\langle X \rangle - \langle \bar{X} \rangle = \langle 0 \rangle = \langle 0, 0 \rangle \quad (7)$$

$$\langle X \rangle + \langle \bar{X} \rangle = \langle 2x, 0 \rangle \in R^1$$

$$\langle \bar{\bar{X}} \rangle = \langle X \rangle$$



Операция интервального умножения

Разбиение пространства $\mathbf{I}_s\mathbf{R}$

$$\mathbf{I}_s\mathbf{R} = \bigotimes_{i=1}^3 \mathbf{I}_{si}, \quad (8)$$

где \mathbf{I}_{s1} – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, таких что

$$x - |v_x| > 0 \quad (9)$$

\mathbf{I}_{s2} – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, таких что

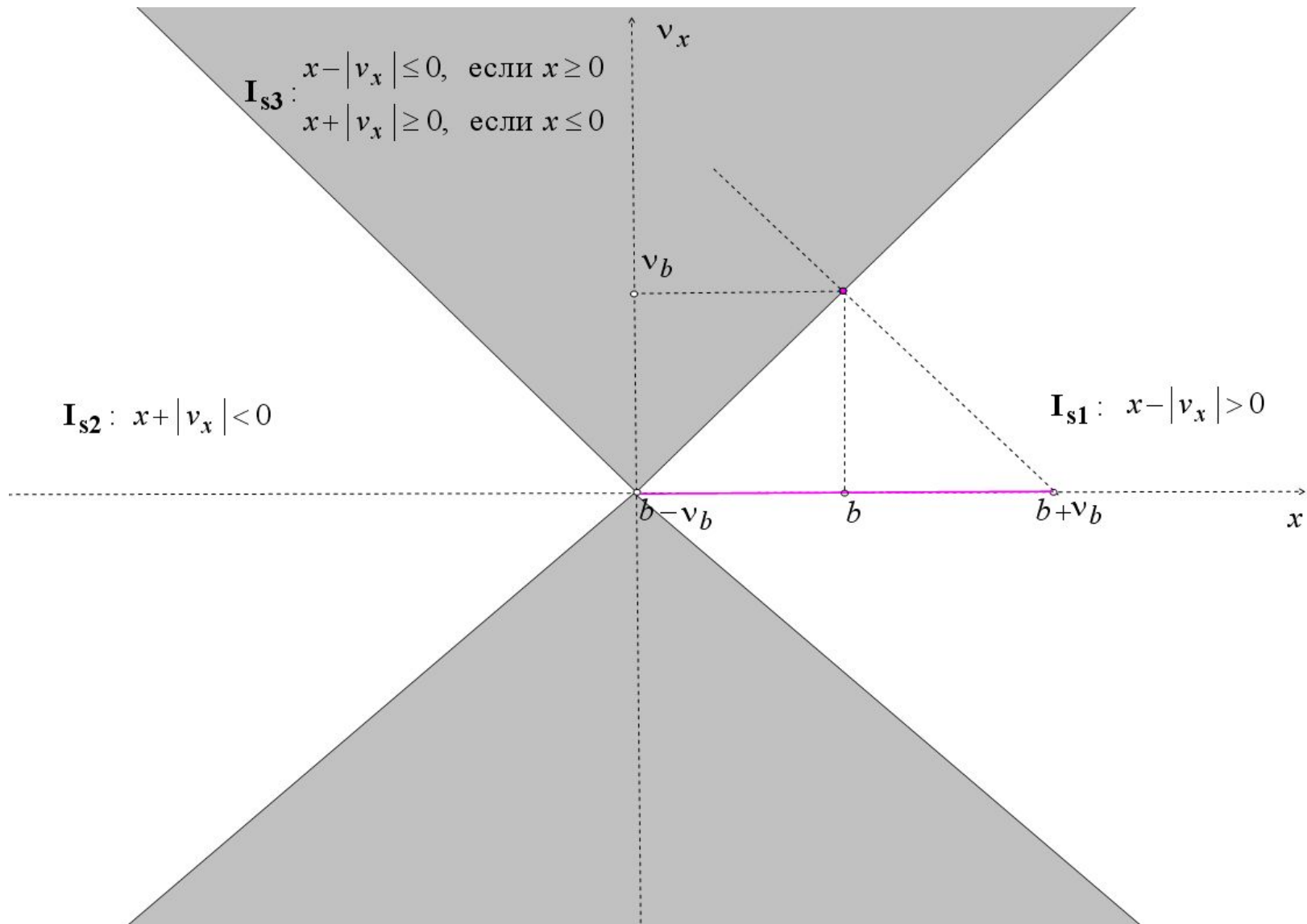
$$x + |v_x| < 0 \quad (10)$$

\mathbf{I}_{s3} – множество точек $\langle X \rangle \in \mathbf{I}_s\mathbf{R}$, таких что

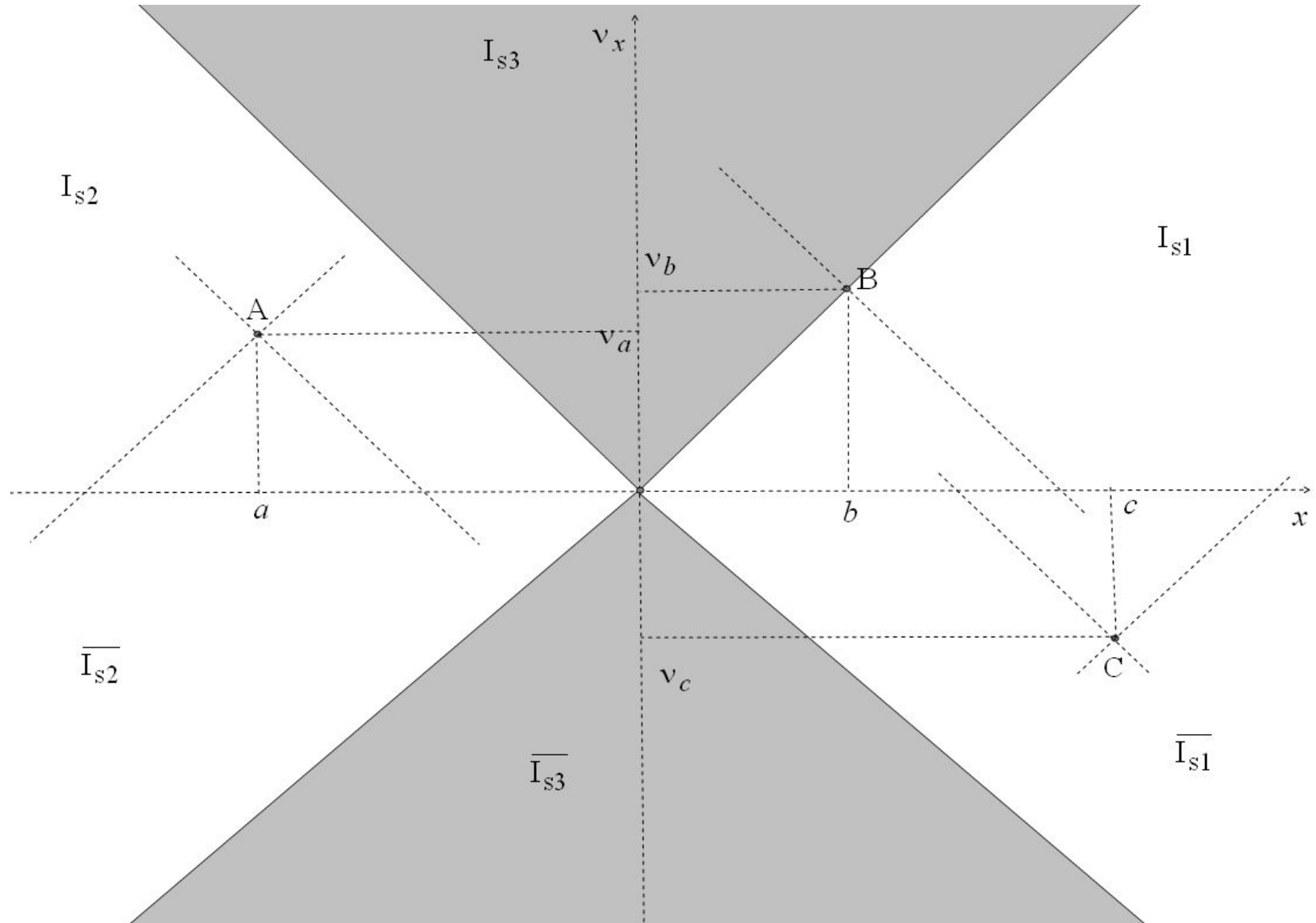
$$\begin{aligned} x - |v_x| &\leq \theta \text{ если } \theta \geq \\ x + |v_x| &\geq \theta \text{ если } \theta \leq \end{aligned} \quad (11)$$



Операция интервального умножения



Операция интервального умножения



Операция интервального умножения

$\langle A \rangle \cdot \langle B \rangle = \langle ab + v_a v_b, bv_a + av_b \rangle$ – операция гиперболического

умножения интервалов $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle X \rangle & \text{если } \langle X \rangle, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle \bar{Y} \rangle \cdot \langle X \rangle & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s2}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \\ \langle (|v_y|, 0) \rangle \cdot \langle X \rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3}, \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \end{cases} \quad (11)$$

$$s = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -\mathbf{1} & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$



Операция интервального умножения

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle Y \rangle \cdot \langle \bar{X} \rangle & \text{если } \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \\ \langle \bar{Y} \rangle \cdot \langle \bar{X} \rangle & \text{если } \langle X \rangle \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \\ \langle \text{если } |v_y|, 0 \rangle; \langle \bar{X} \rangle, & \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad \langle Y \rangle \in \mathbf{I}_{s2} \end{cases} \quad (12)$$

$$s = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -\mathbf{1} & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$



Операция интервального умножения

$$\langle Y \rangle * \langle X \rangle = \begin{cases} \langle (y + s |v_y|), 0 \rangle \cdot \langle X \rangle, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_1 \\ \langle (x - s |v_x|), 0 \rangle \cdot \overline{\langle Y \rangle}, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_2 \\ \langle (x + s |v_x|), 0 \rangle \cdot \langle Y \rangle, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_3 \\ \langle (y - s |v_y|), 0 \rangle \cdot \overline{\langle X \rangle}, \\ \text{если } \langle x, |v_x| \rangle, \langle y, |v_y| \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \cap \mathbf{I}_4 \end{cases} \quad (13)$$

$$s = \begin{cases} \mathbf{1} & \text{если } v_x v_y \geq 0 \\ -\mathbf{1} & \text{если } v_x v_y < 0 \end{cases}$$



Операция интервального умножения

$$\mathbf{I}_1: \begin{cases} -y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \\ -y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_2: \begin{cases} -y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \\ y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_3: \begin{cases} y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \\ -y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{I}_4: \begin{cases} y |v_x| - x |v_y| \leq 0 \\ y |v_x| + x |v_y| \leq 0 \end{cases}$$



Операция интервального деления

$$\frac{\langle X \rangle}{\langle Y \rangle} = \left(\frac{1}{y^2 - v_y^2} \right) \cdot \langle X \rangle * \langle Y \rangle, \quad |y| \neq |v_y| \quad (14)$$



Непрерывность интервальных операций

Теорема. Операции интервального сложения, вычитания, умножения и деления – непрерывны



Интервальные отображения

Определение. Отображение $f: E \rightarrow \mathbf{I}_s \mathbf{R}$ ($E \subset \mathbf{I}_s \mathbf{R}$)

$$f(\langle A_1 \rangle, \langle A_2 \rangle, \dots, \langle A_k \rangle, \langle X \rangle),$$

удовлетворяющее условию

$$f(\langle a_1, 0 \rangle, \langle a_2, 0 \rangle, \dots, \langle a_k, 0 \rangle, \langle x, 0 \rangle) \in R^1,$$

называется интервальным отображением.

Определение. Интервальное отображение $f: E \rightarrow \mathbf{I}_s \mathbf{R}$, порождаемое элементарной функцией f , называется элементарным отображением.



Интервальные отображения

$$f(x) = ax$$

порождает отображение

$$f(\langle X \rangle) = \langle A \rangle * \langle X \rangle$$

$$f(x) = ax^2 + bx, \quad f(x) = (ax + b)x$$

порождают отображения

$$f_1(\langle X \rangle) = \langle A \rangle * \langle X \rangle^2 + \langle B \rangle * \langle X \rangle$$

$$f_2(\langle X \rangle) = (\langle A \rangle * \langle X \rangle + \langle B \rangle) * \langle X \rangle$$



Интервальные отображения

$$f(x) = x^2$$

порождает отображение

$$f(\langle X \rangle) = \langle X \rangle * \langle X \rangle =$$

$$= \langle X \rangle^2 = \begin{cases} \langle x^2 + v_x^2 \rangle, & \text{если } |v_x| < x, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s1} \cup \mathbf{I}_{s2} \\ \langle (x + |v_x|) \cdot x \rangle, & \text{если } |v_x| \leq x, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad x \geq 0 \\ \langle (x - |v_x|) \cdot x \rangle, & \text{если } |v_x| \leq x, \langle X \rangle \in \mathbf{I}_{s3} \quad x \leq 0 \end{cases}$$



Интервальные отображения

порождает отображение

$$f(x) = |x|$$

$$f(\langle X \rangle) = |\langle X \rangle| = \langle |x|, v_x \rangle \quad \forall \langle X \rangle \in \mathbf{I}_s \mathbf{R}$$



Список рекомендуемой литературы

1. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 356 с.
2. Kaucher E. Interval Analysis in the Extended Interval space IR // Comp. Suppl. – 1980. – P. 33–49.



Отношение порядка на множестве I/R

$$\langle X \rangle < \langle Y \rangle, \text{ если } x < y \text{ или } \begin{cases} x = y \\ v_x < v_y; \end{cases} \quad \langle Y \rangle < \langle X \rangle, \text{ если } y < x \text{ или } \begin{cases} y = x \\ v_y < v_x. \end{cases}$$

$$\langle X \rangle \leq \langle A \rangle: \quad x < a, v_x \in R^1 \text{ или } \begin{cases} x = a \\ v_x \leq v_a, v_x \in R^1 \end{cases}$$

