ЛЕКЦИЯ 5

Позиционные задачи

Позиционными задачами называют такие, в которых определяется взаимное расположение геометрических фигур в пространстве

Существует три типа позиционных задач:

1. *Взаимный порядок геометрических фигур.*
2. *Взаимная принадлежность геометрических фигур.*
3. *Взаимное пересечение геометрических фигур.*

Взаимное пересечение геометрических фигур

Две геометрические фигуры, пересекаясь, дают общий элемент:

- Прямая с прямой - точку ($a \cap b \Rightarrow K$).
- Прямая с плоскостью - точку ($a \cap \Sigma \Rightarrow K$).
- Прямая с поверхностью - одну или несколько точек

($a \cap \Delta \Rightarrow K, M \ldots$).

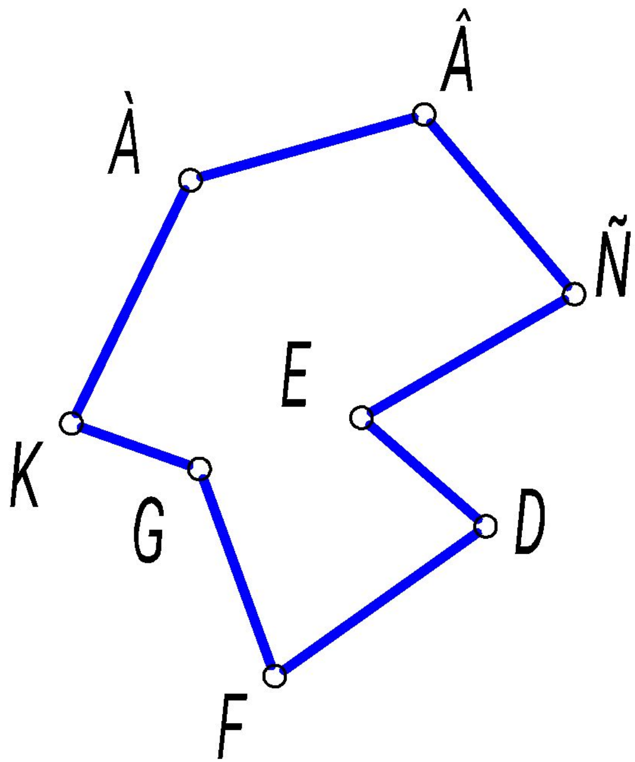
- Плоскость с плоскостью - прямую линию ($\Sigma \cap \Gamma \Rightarrow a$).
- Плоскость с поверхностью - плоскую кривую или плоскую ломаную ($\Sigma \cap \Delta \Rightarrow m$).
- Поверхность с поверхностью - пространственную кривую или несколько пространственных кривых, которые, в свою очередь, могут состоять из плоских кривых или плоских ломаных ($\Delta \cap \Lambda \Rightarrow m$).

Из всего многообразия этих задач выделяются две общие задачи, которые называют **главными позиционными задачами**:

- **Первая главная позиционная задача (1 ГПЗ)** - пересечение линии с поверхностью.
- **Вторая главная позиционная задача (2 ГПЗ)** - взаимное пересечение двух поверхностей.

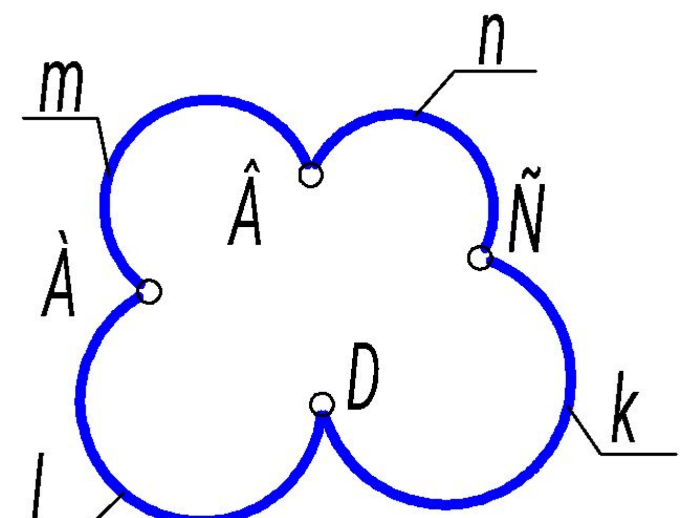
При решении 2 ГПЗ сначала необходимо выяснить, что будет являться общим элементом у двух пересекающихся поверхностей.

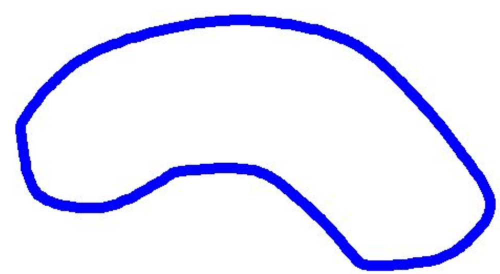
а) **Пересекаются два многогранника** - общий элемент есть пространственная ломаная линия, состоящая из отдельных звеньев



б) **Пересекаются многогранник с кривой поверхностью** (например, тор с пирамидой). Общий элемент - пространственная кривая линия, состоящая из отдельных звеньев.

в) **Пересекаются две кривые поверхности** (например, сфера с конусом). Общий элемент - пространственная кривая линия.

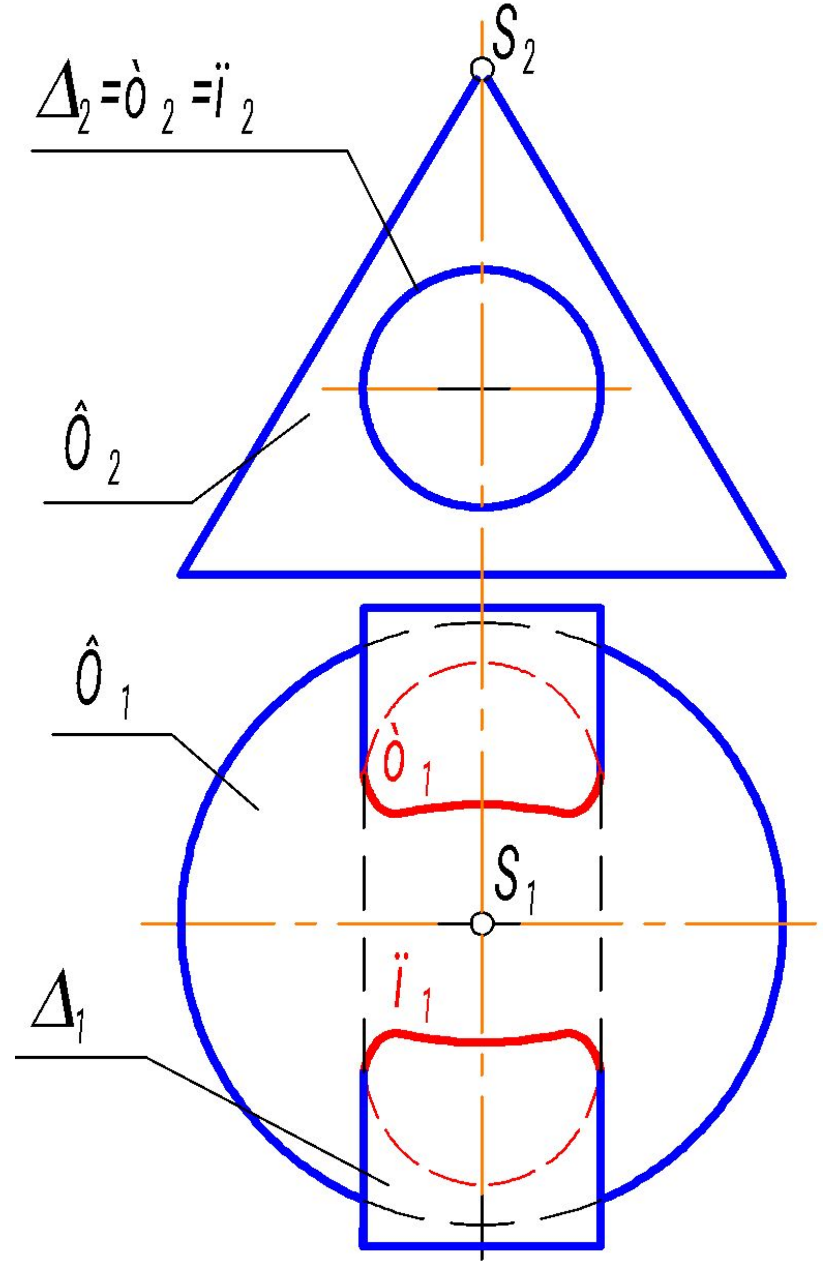




Далее необходимо определить **количество** общих элементов пересекающихся поверхностей.

Определяется оно в зависимости от **характера** пересечения поверхностей.

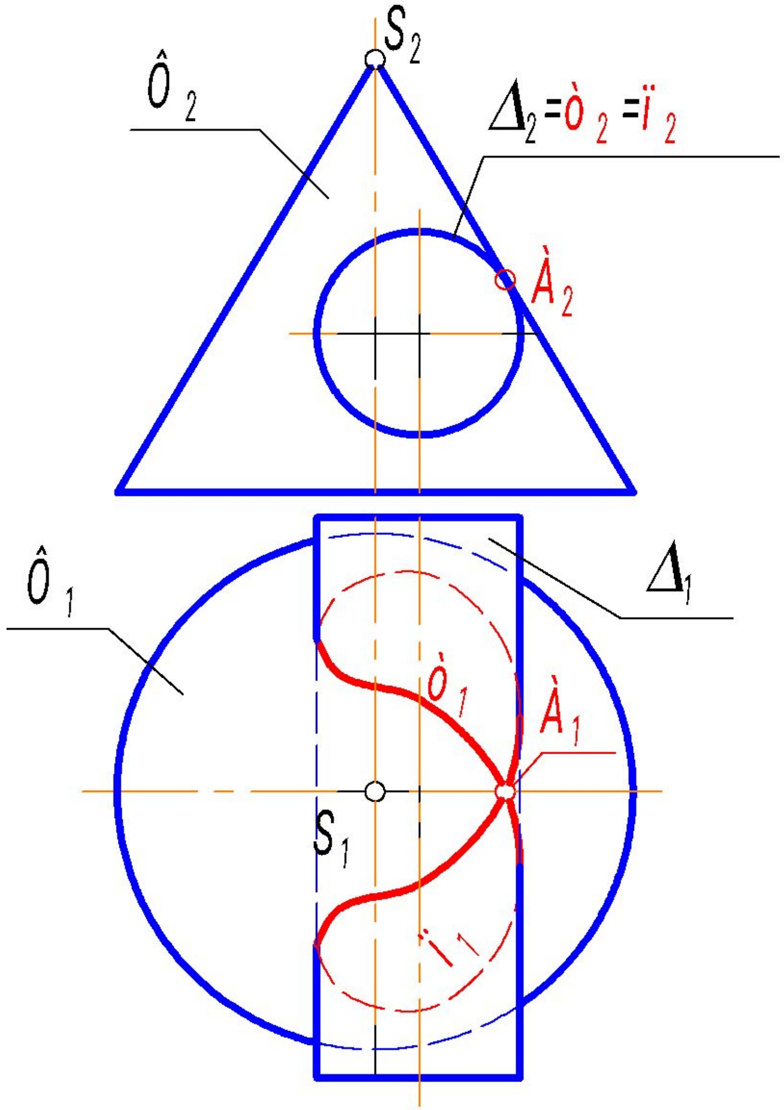
Характер пересечения поверхностей



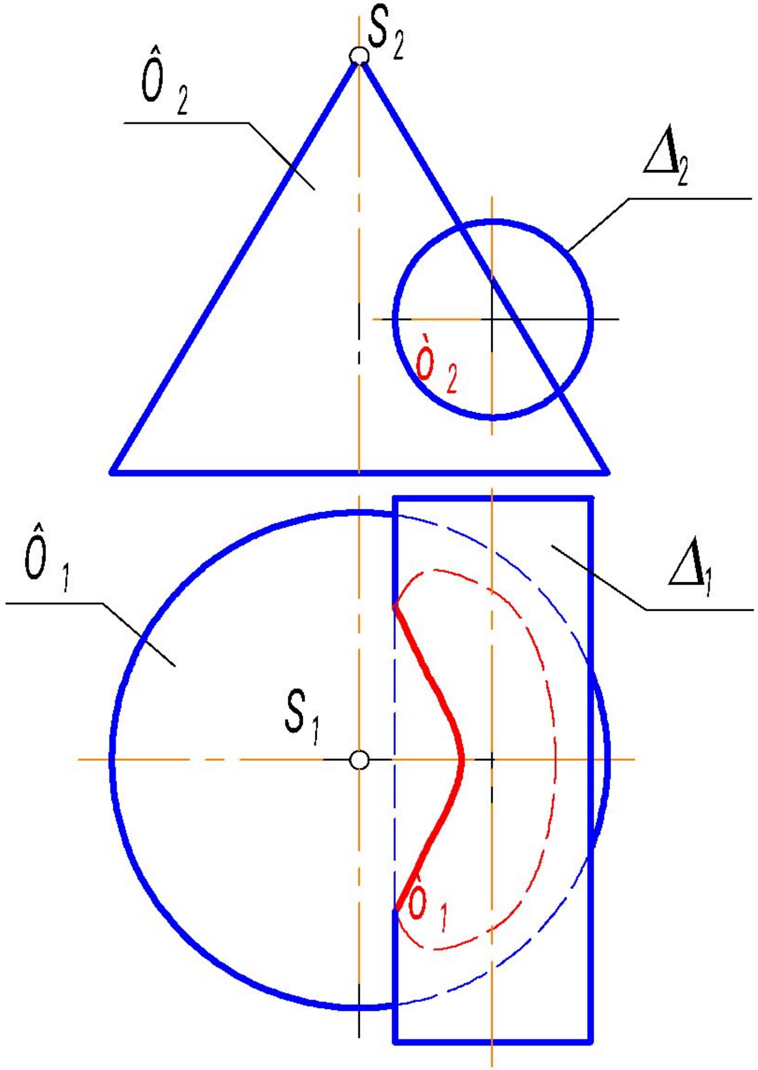
Такой характер пересечения, когда одна из поверхностей насквозь пронзает другую, называется **чистое проницание**.

В этом случае линий пересечения две (на рис. это *m* и *n*).

Когда очерки поверхностей касаются в одной точке, является **частным случаем проницания**. Линий пересечения две (*m* и *n*), но с одной общей точкой (*A*).



Когда одна из поверхностей "вдавливается" в другую, называется **вмятие**. В этом случае линия пересечения одна (на рис. это - *m*).



Решение главных позиционных задач.
3 случая. 3 алгоритма.

Здесь имеет место 3 случая:

- обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение. Задачи решаются по **первому алгоритму**.
- одна из пересекающихся фигур - проецирующая, другая – непроецирующая. Задачи решаются по **второму алгоритму**.
- обе пересекающиеся фигуры - непроецирующие. Задачи решаются по **третьему алгоритму**.

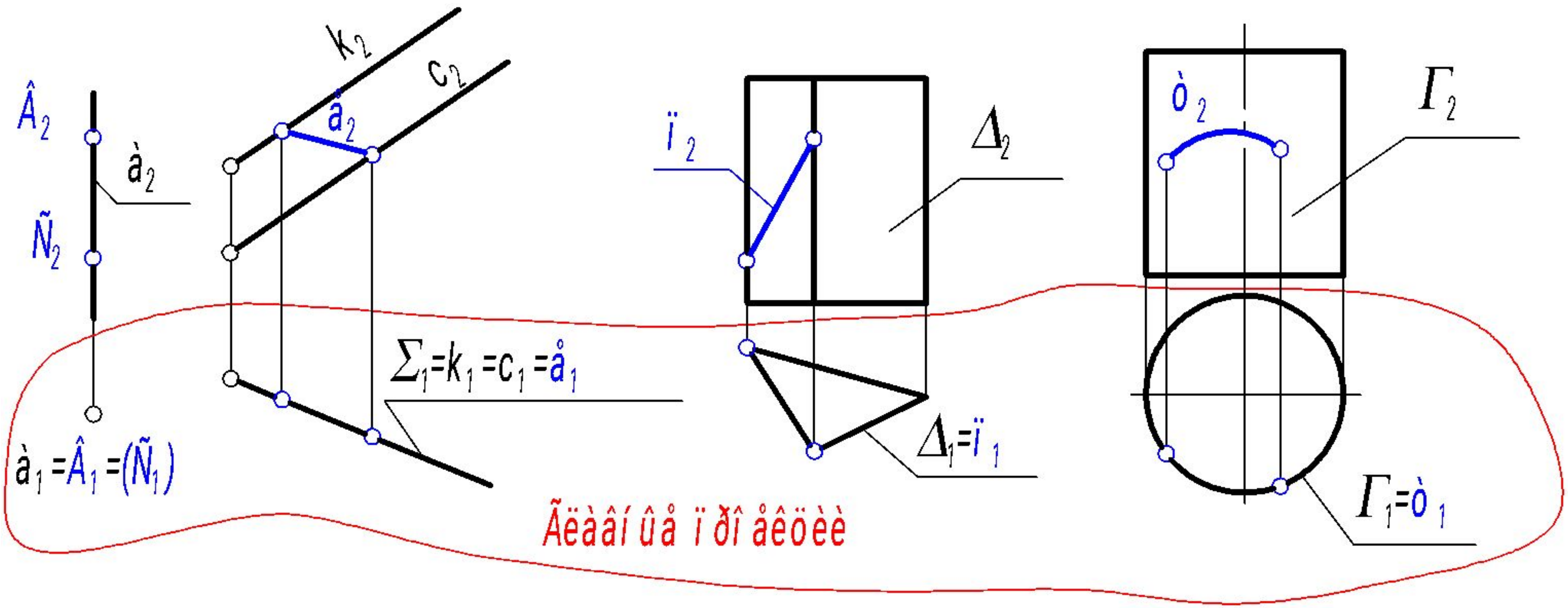
Фигуры могут занимать проецирующее положение.

Таковыми являются: прямая, плоскость, а из всех известных нам поверхностей проецирующее положение могут занимать только **призматическая поверхность** (частный случай - призма) и **цилиндрическая поверхность** (частный случай - прямой круговой цилиндр).

Главными проекциями у них являются:
у прямой a - точка a_1, у плоскости Σ - прямая Σ_1,
у призмы Δ - треугольник $\Delta 1$,
у цилиндра Г - окружность $Г_1$ (в общем случае - замкнутая или

разомкнутая кривая). **Главные проекции** проецирующих фигур

обладают "собирательными" свойствами

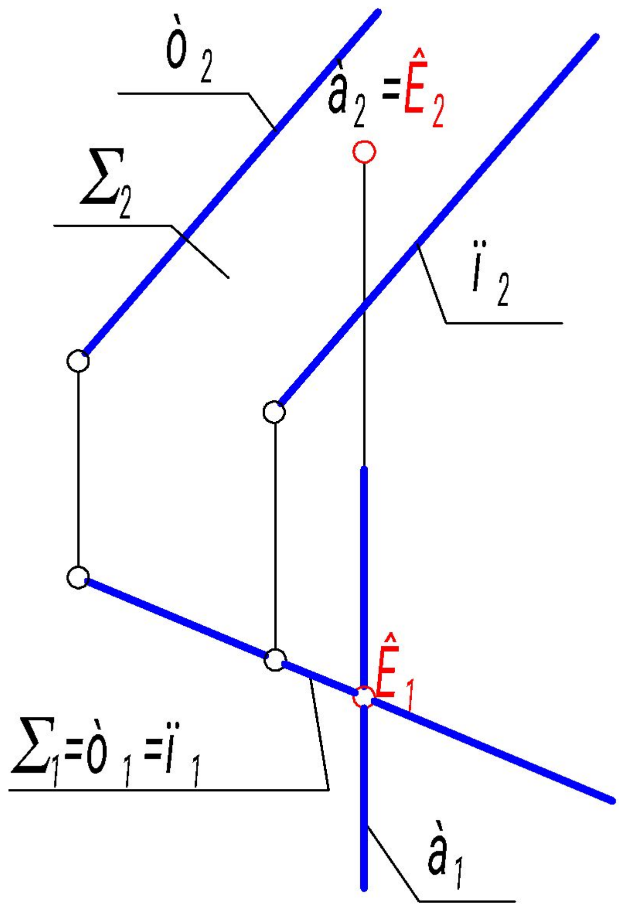


Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры занимают проецирующее положение.

1 алгоритм

Задача : Найти проекции точки пересечения горизонтально-проецирующей плоскости $\Sigma(m \parallel n)$ с фронтально-проецирующей прямой а.

Алгоритм: Так как в пересечении участвует прямая линия (*а*), то это - **первая главная позиционная задача**. Обе пересекающиеся фигуры - проецирующие относительно разных плоскостей проекций. Решение начинаем с фронтальной проекции.



Выполним краткую алгоритмическую запись вышеизложенного:

***Σ(m || n)* ∩ *a* = *K*; 1 ГПЗ,**

1 алгоритм.

1. К ∈ а, а ⊥ ⊥ П2 ⇒ К2 = а2.

2. К ∈ а, К ∈ Σ, Σ ⊥ ⊥ П1 ⇒ К1 = Σ1* ∩ *а1.

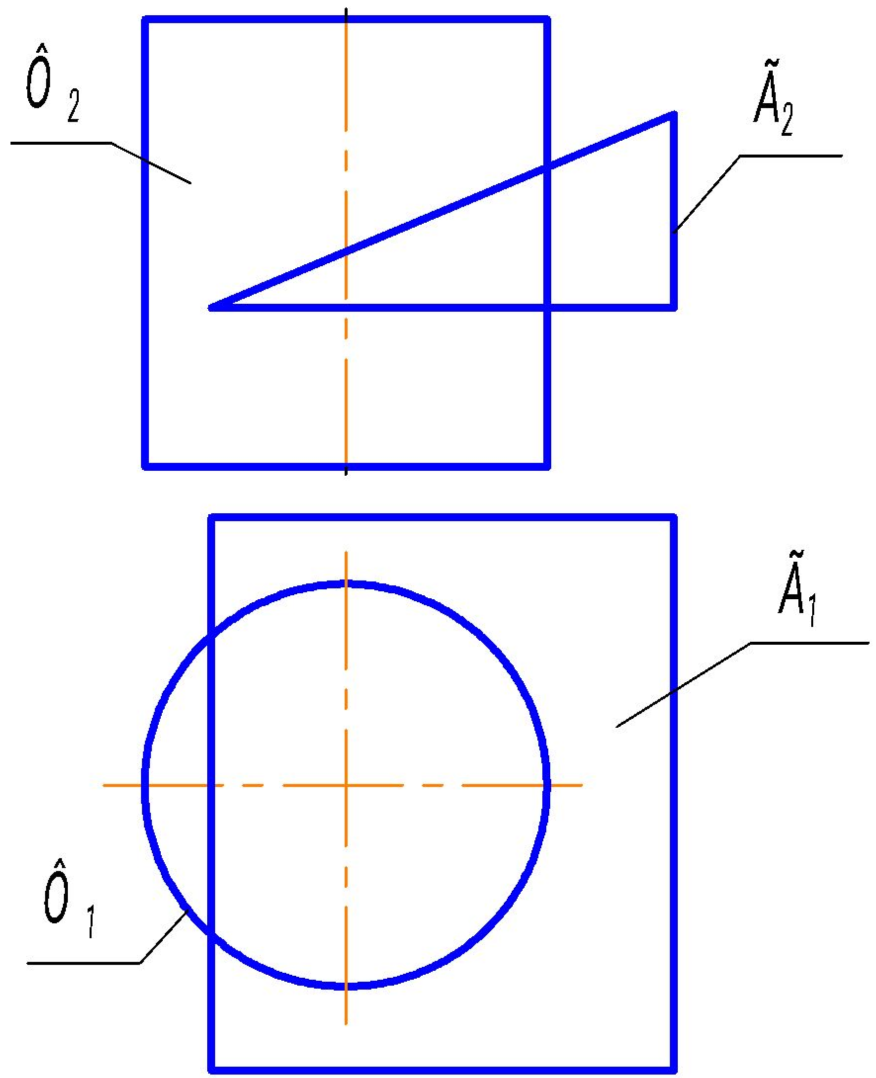
Таким образом, решение 1 ГПЗ по первому алгоритму заключается в следующем:

Проекции общего элемента на чертеже уже присутствуют. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Решение сводится к их нахождению и обозначению.

Вторую главную позиционную задачу решим в соответствии с рассмотренным алгоритмом.

Задача: найти проекции линии пересечения горизонтально проецирующего цилиндра *Φ* с фронтально проецирующей призмой *Γ*

Алгоритм: Пересекаются две поверхности, это - **2 ГПЗ**. Вначале анализируем, **что** должно получиться в результате пересечения. Так как характер пересечения - вмятие, то общим элементом должна быть одна пространственная линия - *m*.

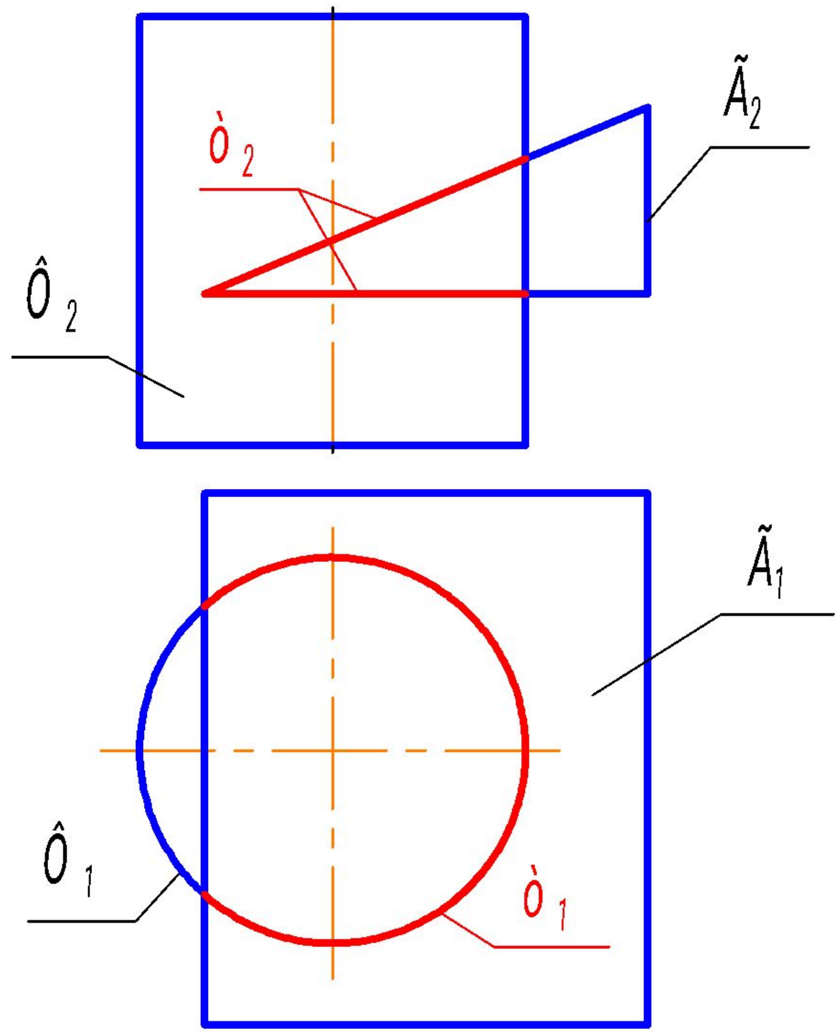


Алгоритмическая запись будет выглядеть следующим образом:

Ф ∩ Г = m; 2 ГПЗ, 1 алгоритм.

m ∈ Г, Г ⊥⊥ П2 ⇒ m2 = Г2

m ∈ Ф, Ф ⊥⊥ П1 ⇒ m1 = Ф1

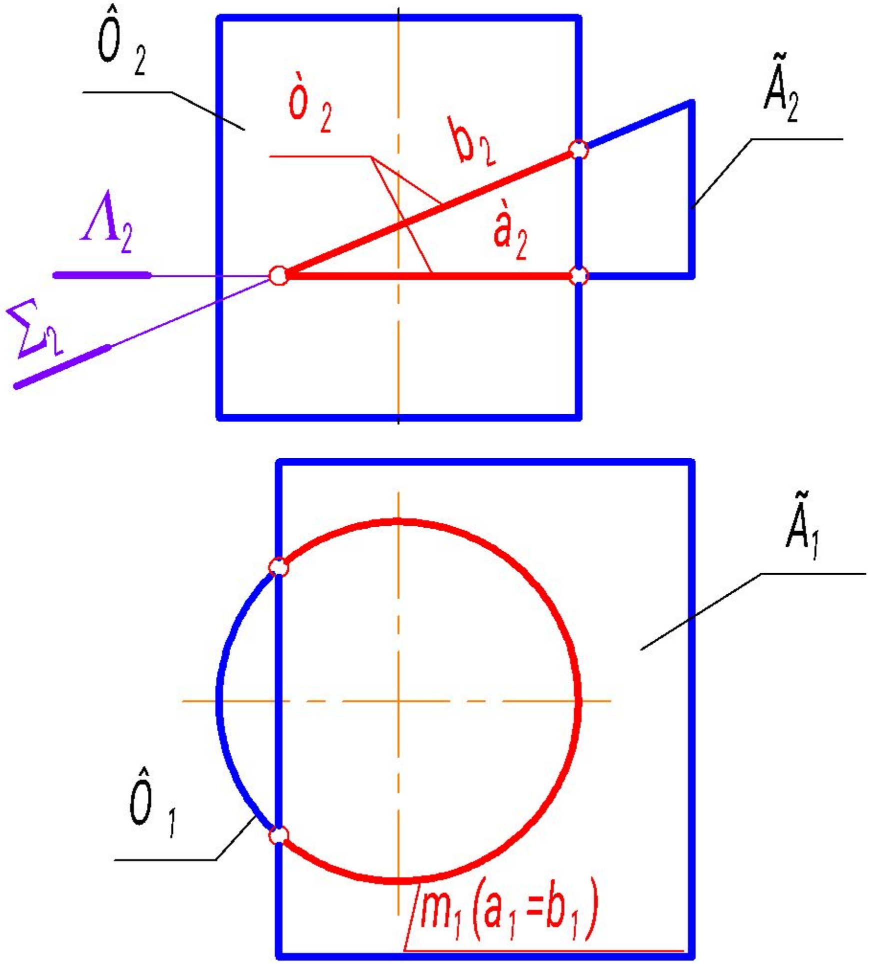


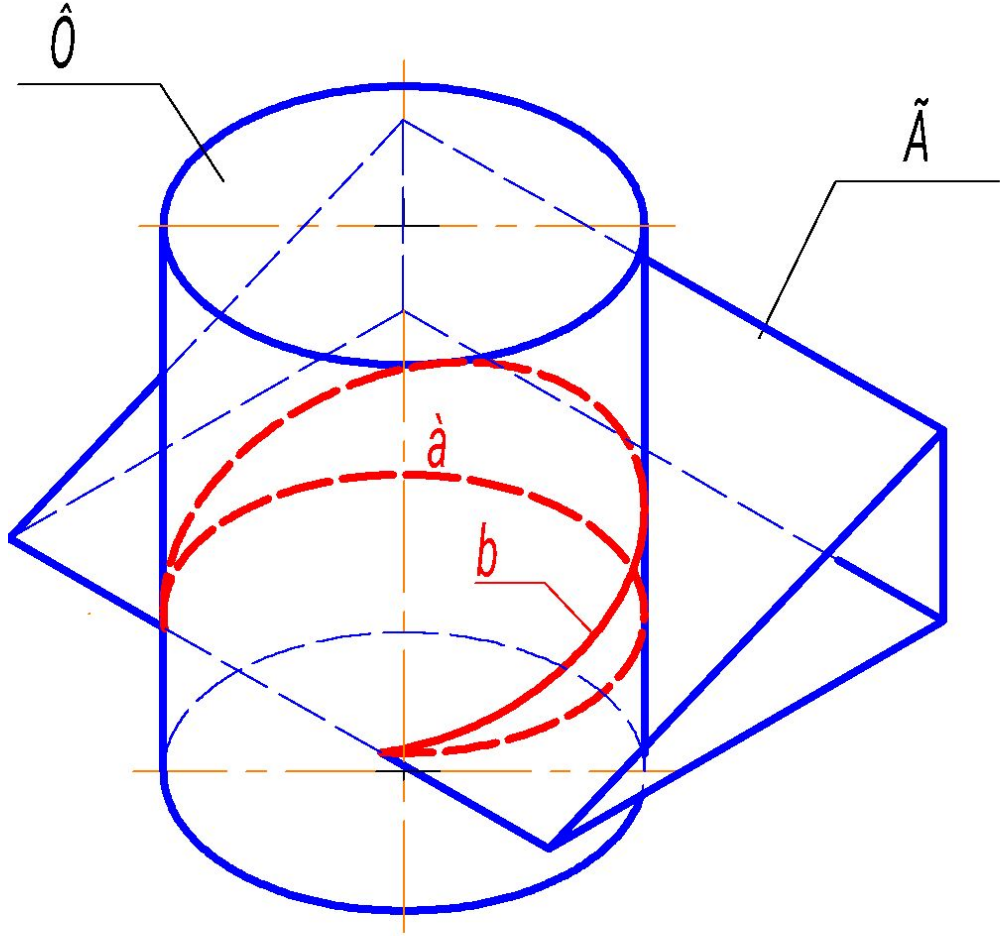
Проанализируем, из чего состоит линия пересечения ***m***.

Как мы уже предполагали, это пространственная линия. Она состоит из двух плоских кривых a и b, получающихся от пересечения цилиндра двумя гранями призмы, которые на рис. обозначены плоскостями Σ и Λ.

Плоскость *Λ(Λ2)* - это горизонтальная плоскость уровня. Она параллельна окружности основания цилиндра, поэтому она пересечёт цилиндр *Φ* тоже по окружности. Плоскость *Σ(Σ2)* -

фронтально проецирующая и пересечёт цилиндр *Φ* по эллипсу.



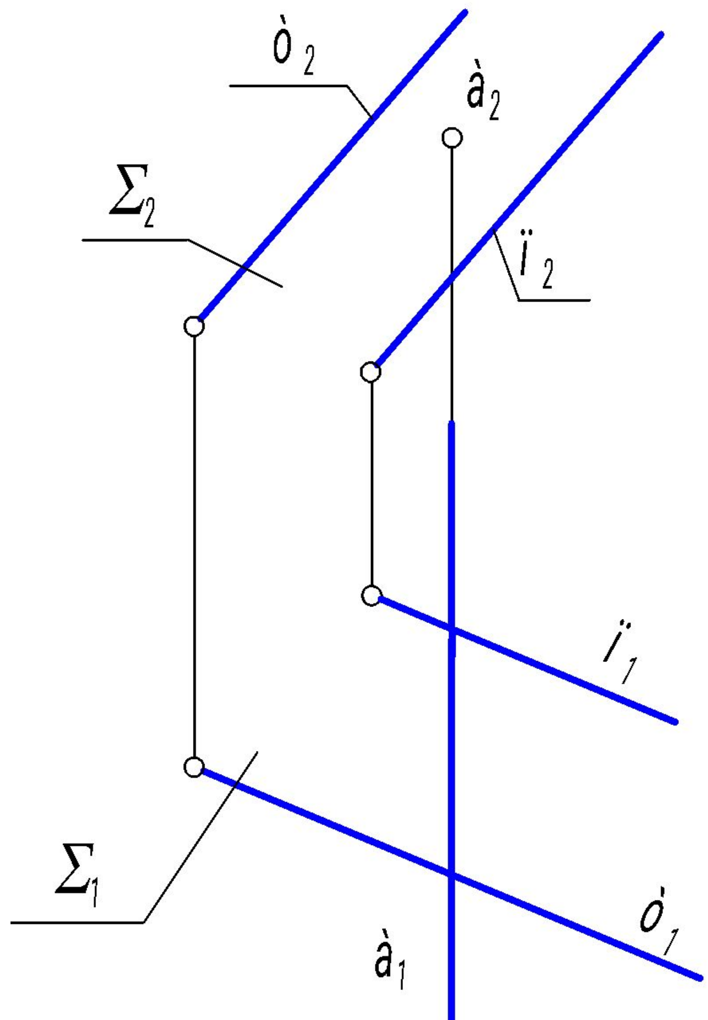


- **Проекции общего элемента на чертеже уже есть. Они совпадают с главными проекциями проецирующих фигур. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части. Решение сводится к их нахождению и обозначению.**

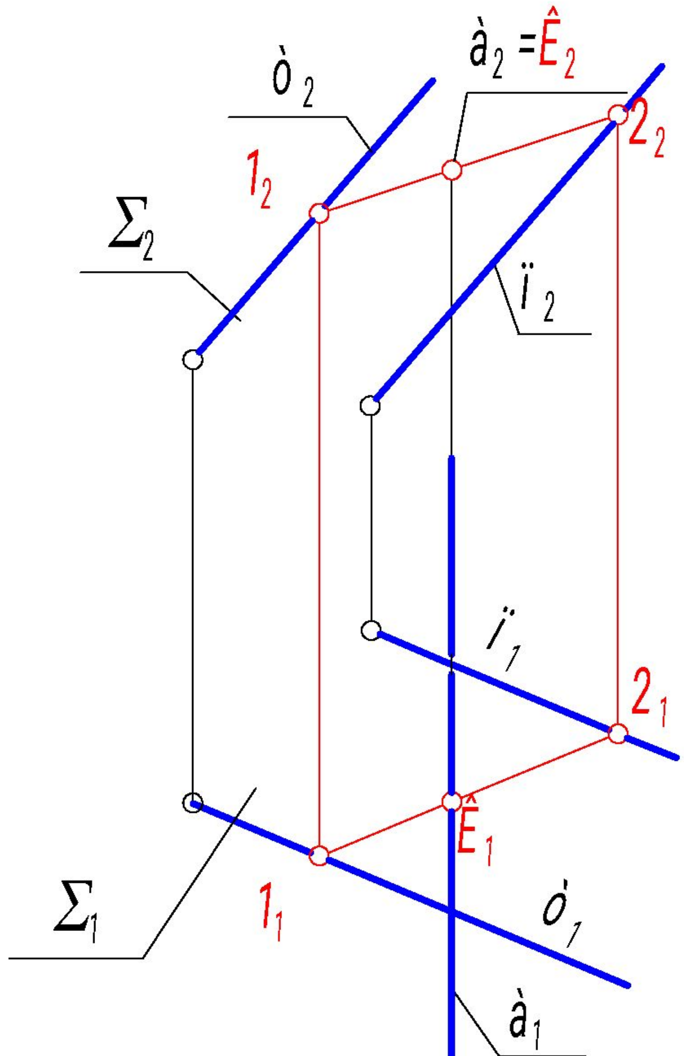
Решение задач в случае, когда одна из пересекающихся фигур проецирующая, вторая - непроецирующая.

2 алгоритм

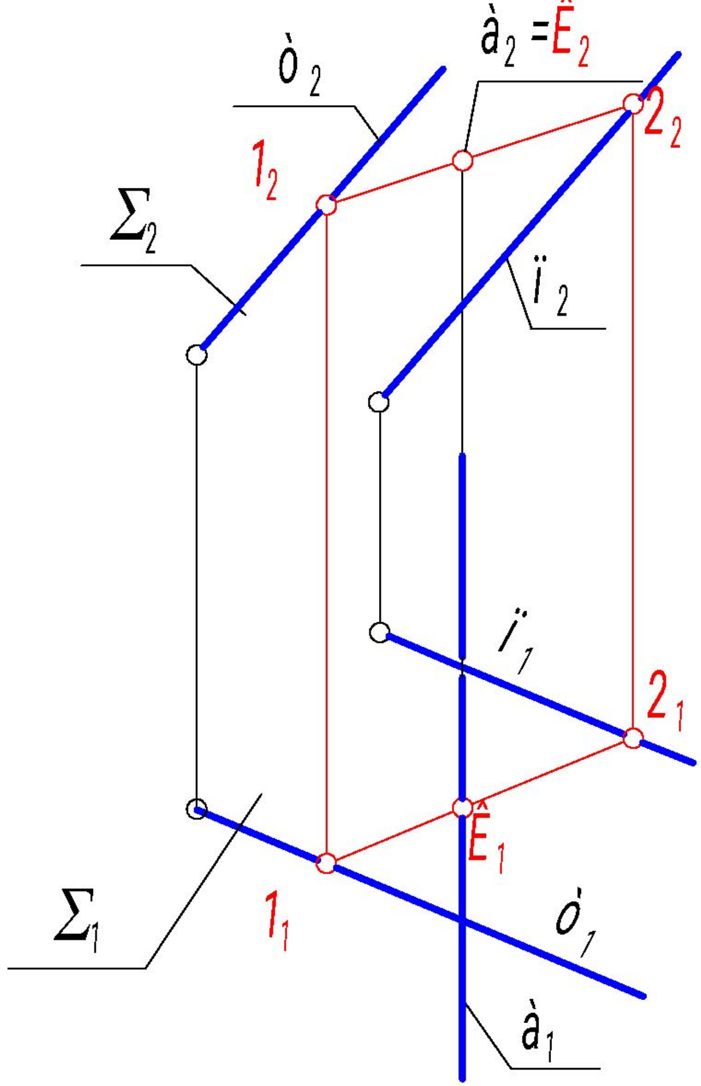
Задача: Найти проекции точки пересечения плоскости общего положения *Σ(m || n)* с фронтально проецирующей прямой *a*.



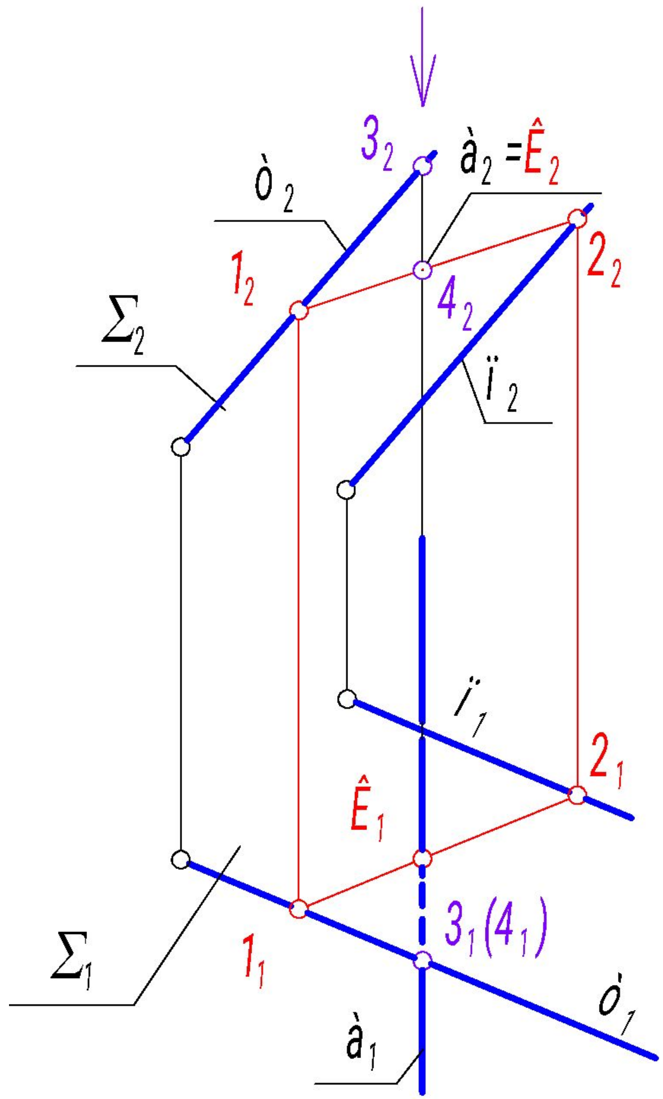
Алгоритм: Решение начинаем, с фронтальной проекции. Фронтальная проекция точки пересечения K_2 совпадёт с фронтальной проекцией прямой a_2, так как a_2 - точка.



Горизонтальную проекцию точки пересечения *К1* будем находить её по признаку принадлежности плоскости *Σ*.



Следующим этапом необходимо определить видимость прямой **а** на горизонтальной проекции. Для этого воспользуемся **методом конкурирующих точек**.



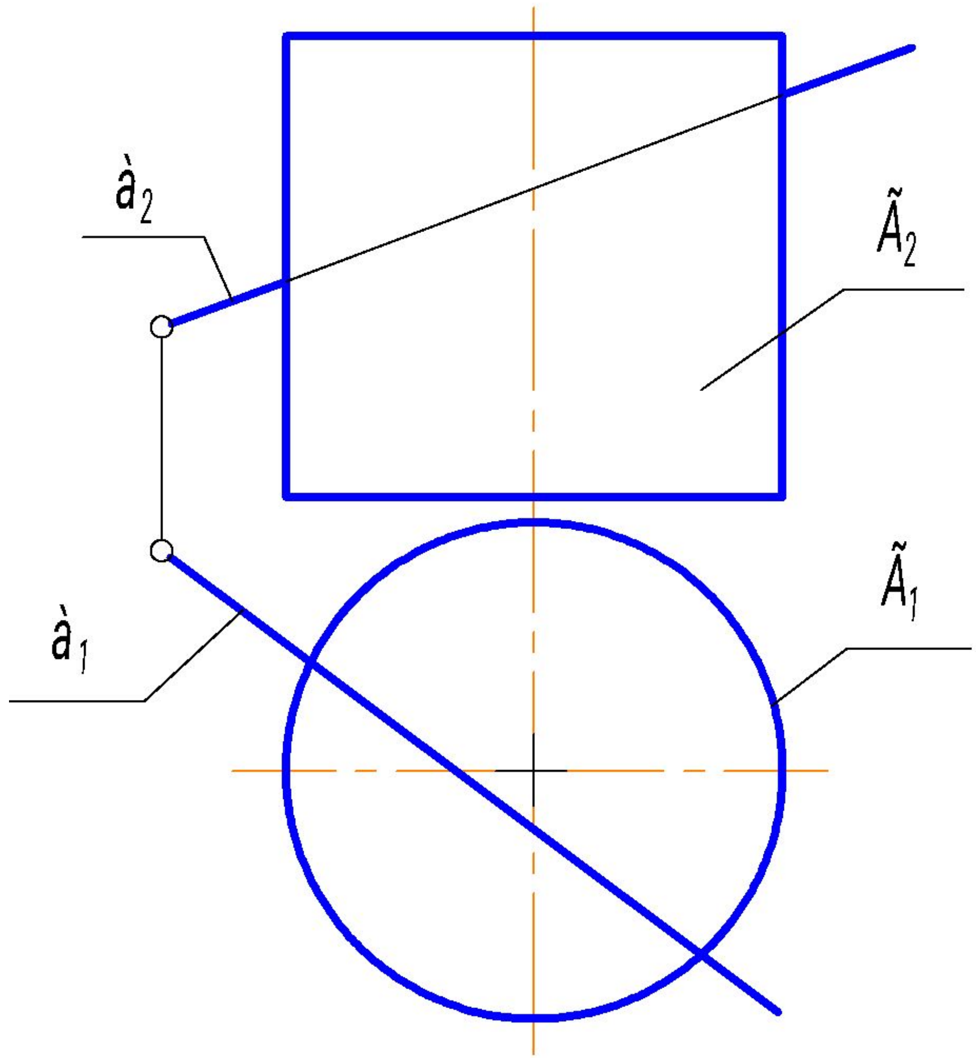
Выполним краткую алгоритмическую запись решения:

Σ(m || n) ∩ a = K; 1 ГПЗ, 2 алгоритм

1. $K \in a$, $a \perp\perp \Pi_2 \Rightarrow K_2 = a_2$.

2. $K_1 \in \Sigma$, $K \in 12$, $12 \subset \Sigma \Rightarrow K_1 = a_1 \cap 1_1 2_1$.

Рассмотрим ещё одну задачу: Пересекаются прямая общего положения *а* с поверхностью горизонтально проецирующего цилиндра *Г*. Найти проекции точек пересечения.

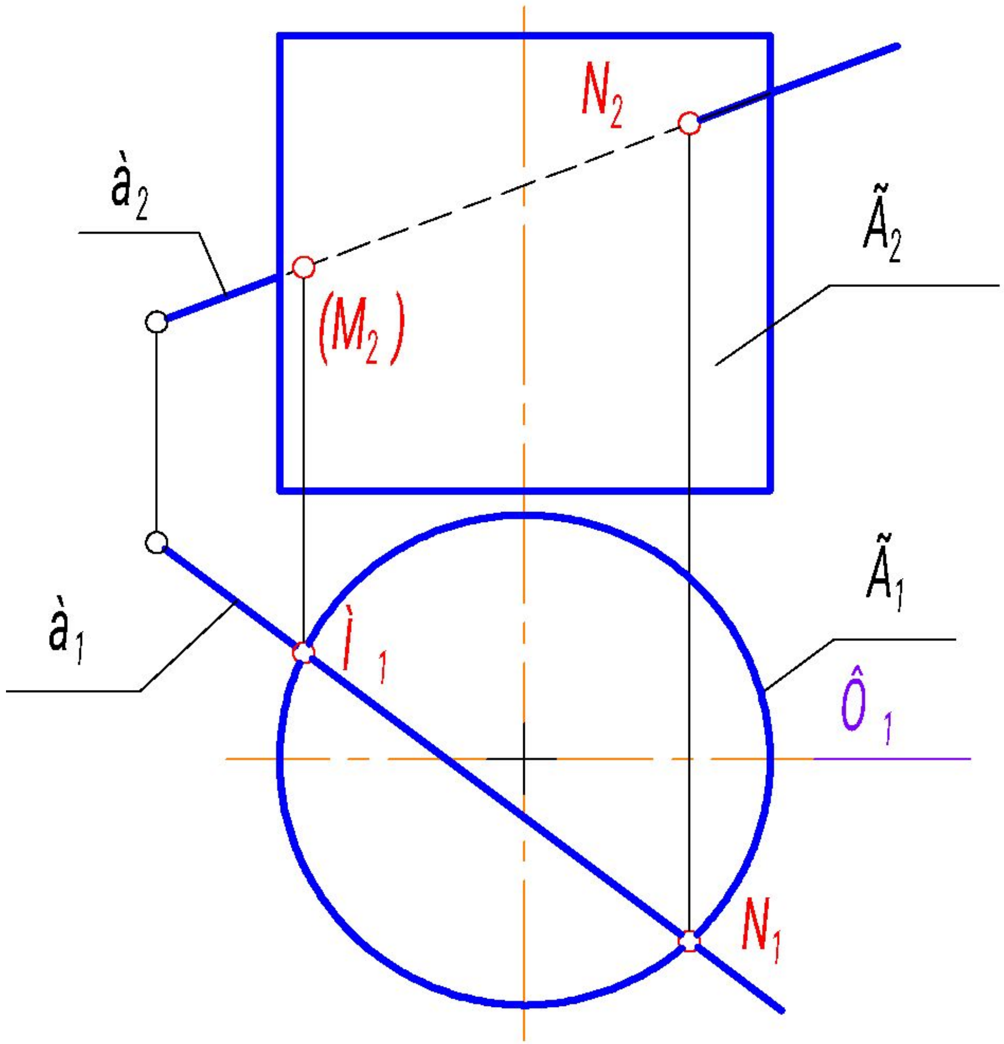


Алгоритмическая запись решения:

$Г \cap a = M, N$, 1 ГПЗ, 2 алгоритм.

$M, N \in Г, Г \perp\perp П_1 \Rightarrow M_1, N_1 = Г_1 \cap a_1$.

$M, N \in a \Rightarrow M_2, N_2 \in a_2$.



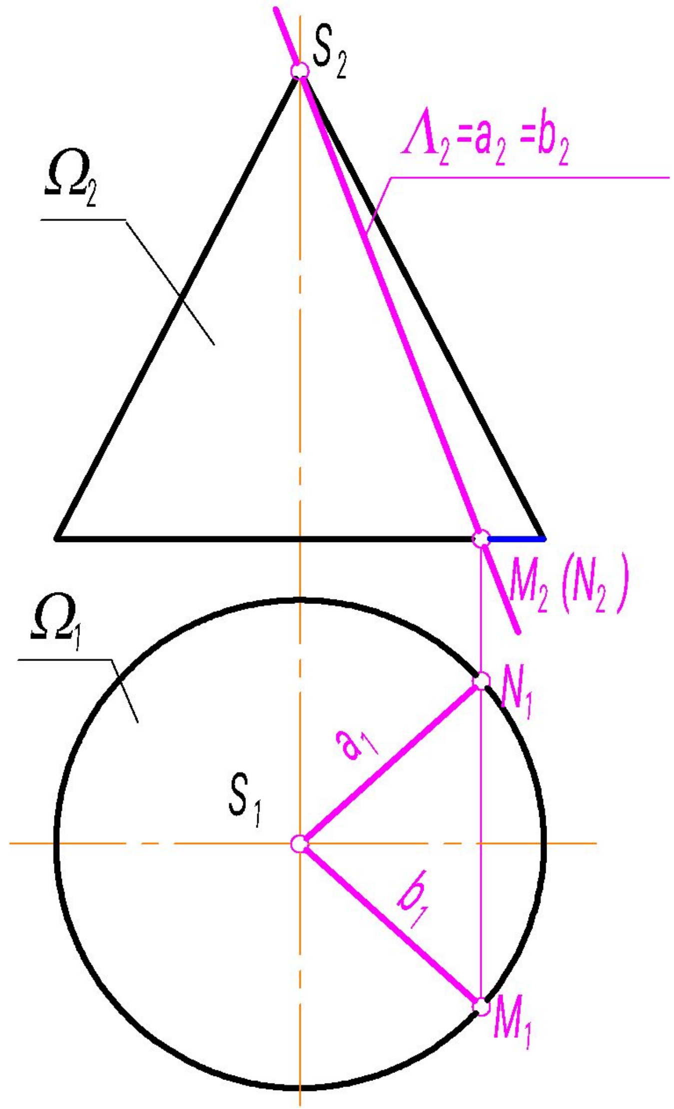
Решение задач по 2 алгоритму сводится к следующему:

- **Выделяют из двух заданных фигур проецирующую и отмечают её главную проекцию .**
- **Ставят обозначение той проекции искомого общего элемента, которая совпадает с главной проекцией проецирующей фигуры. Если совпадение только частичное, то находят границы общей части.**
- **Вторую проекцию общего элемента находят по условию его принадлежности непроецирующей фигуре.**
- **Определяют видимость проекций общих элементов и пересекающихся фигур.**

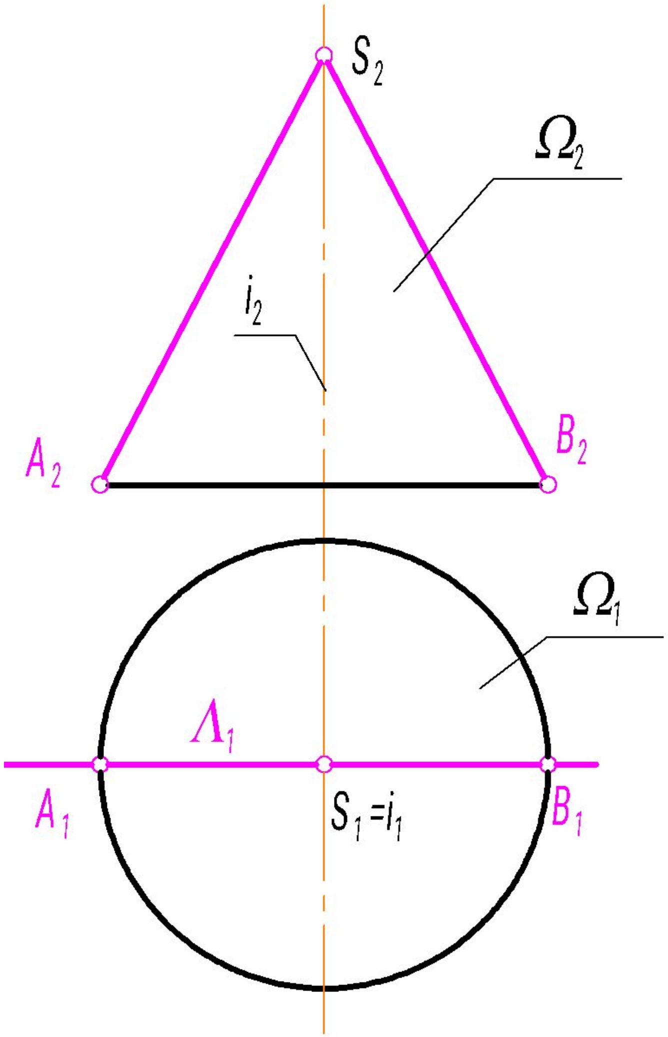
Решение **2 ГПЗ** по 2 алгоритму рассмотрим на примере **конических сечений**.

При пересечении конуса различными плоскостями можно получить прямые линии, кривые второго порядка и, как вырожденный случай, точку.

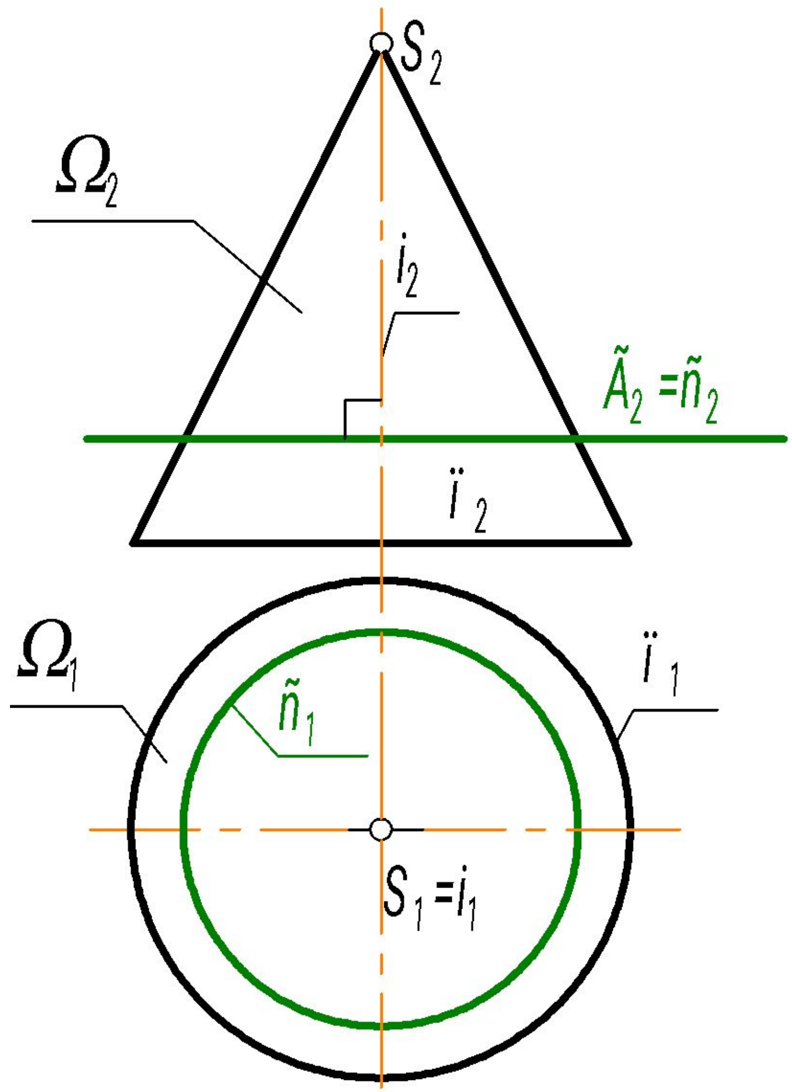
Две образующие получатся в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит через его вершину



Частным случаем такого вида пересечения конуса плоскостью является такое положение, при котором плоскость *Λ* проходит через ось i конуса (*Λ1* совпадает с плоскостью фронтального меридиана).

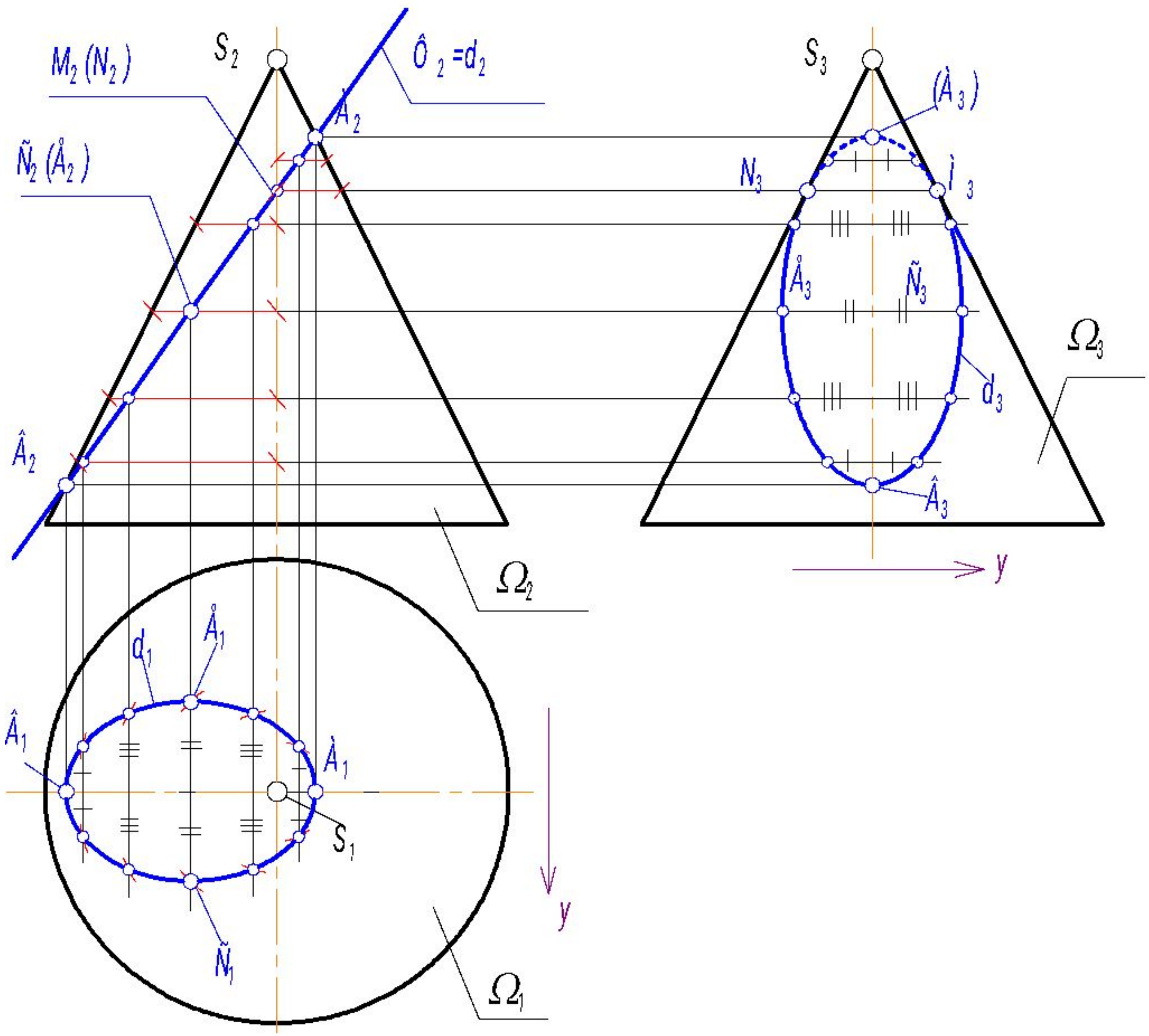


Окружность получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, параллельна окружности основания *n*, а значит, перпендикулярна оси *i* конуса.

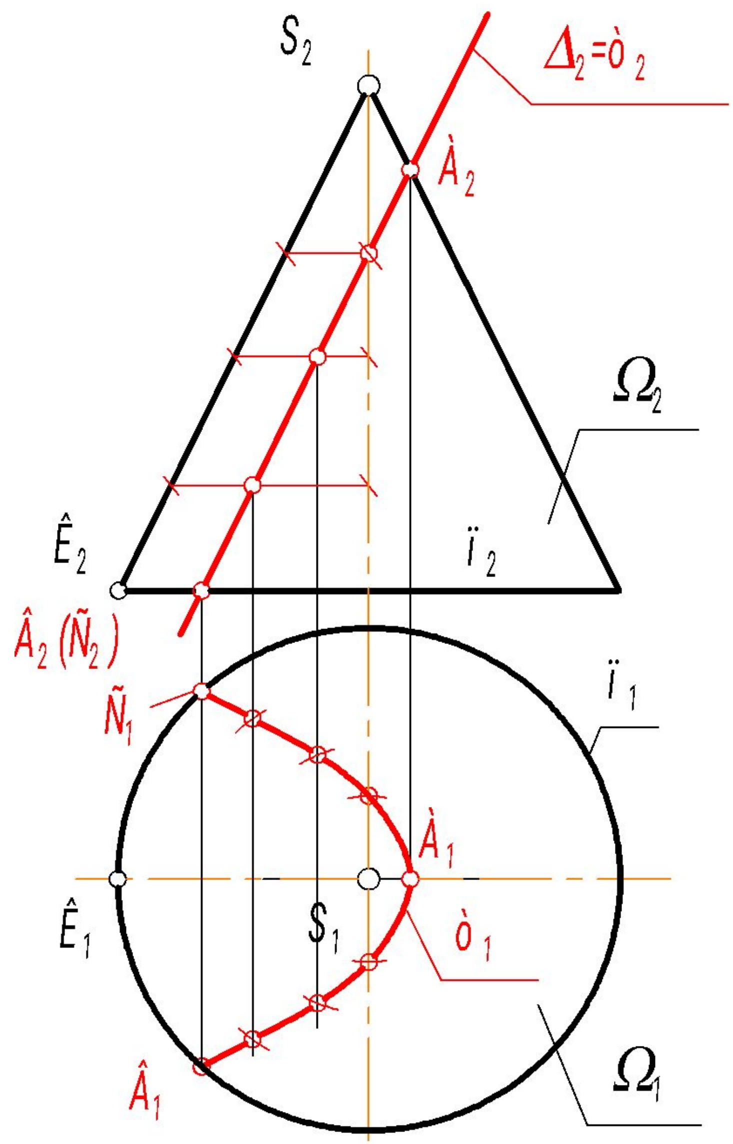


Эллипс получится в сечении, если плоскость не перпендикулярна

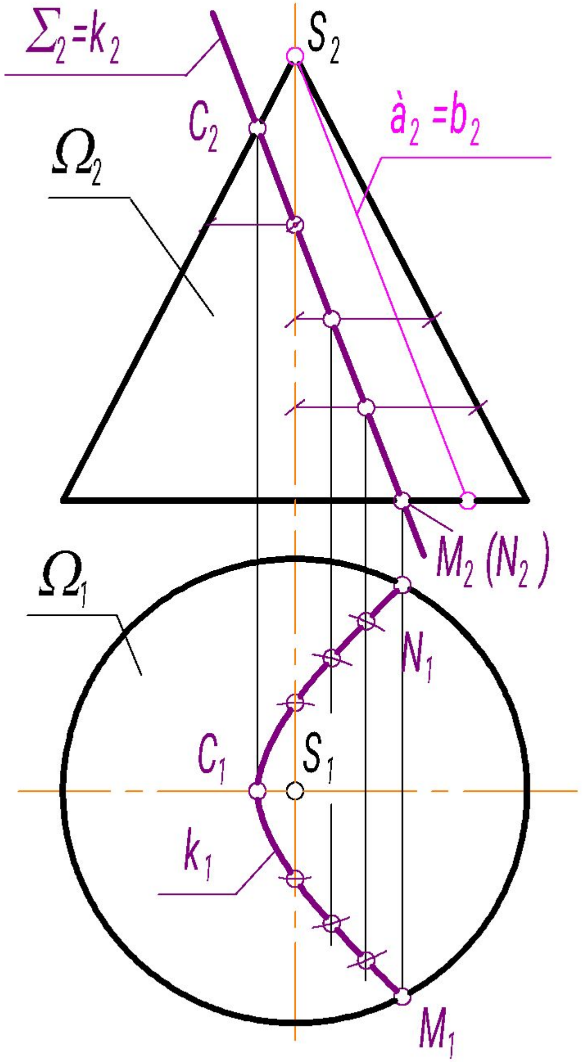
оси конуса и пересекает все его образующие



Парабола получится в сечении, если плоскость, пересекая конус, проходит параллельно только одной его образующей



Гипербола получится в сечении, если плоскость при пересечении с конусом параллельна одновременно **двум** образующим конуса



Рассмотрим ещё одну задачу на пересечение поверхностей, из которых одна проецирующая, вторая - непроецирующая.

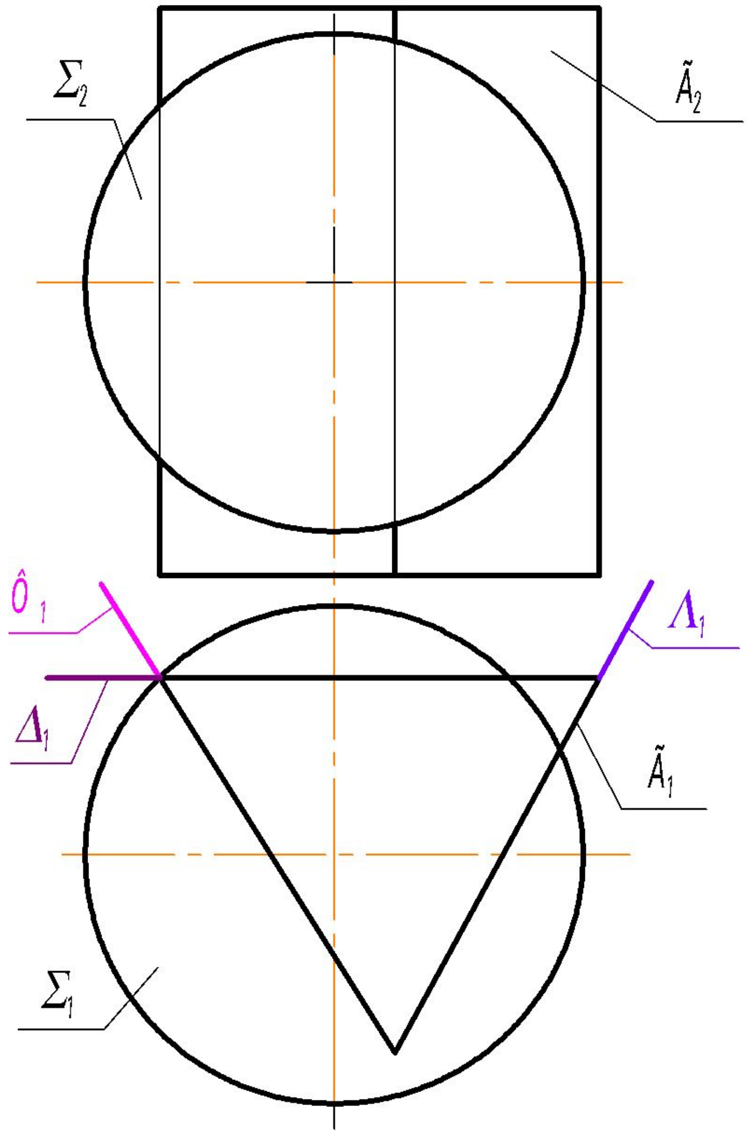
Задача: Построить линию пересечения сферы *Σ* и горизонтально проецирующей призмы *Г*

Алгоритм: 2 ГПЗ, 2 алг.

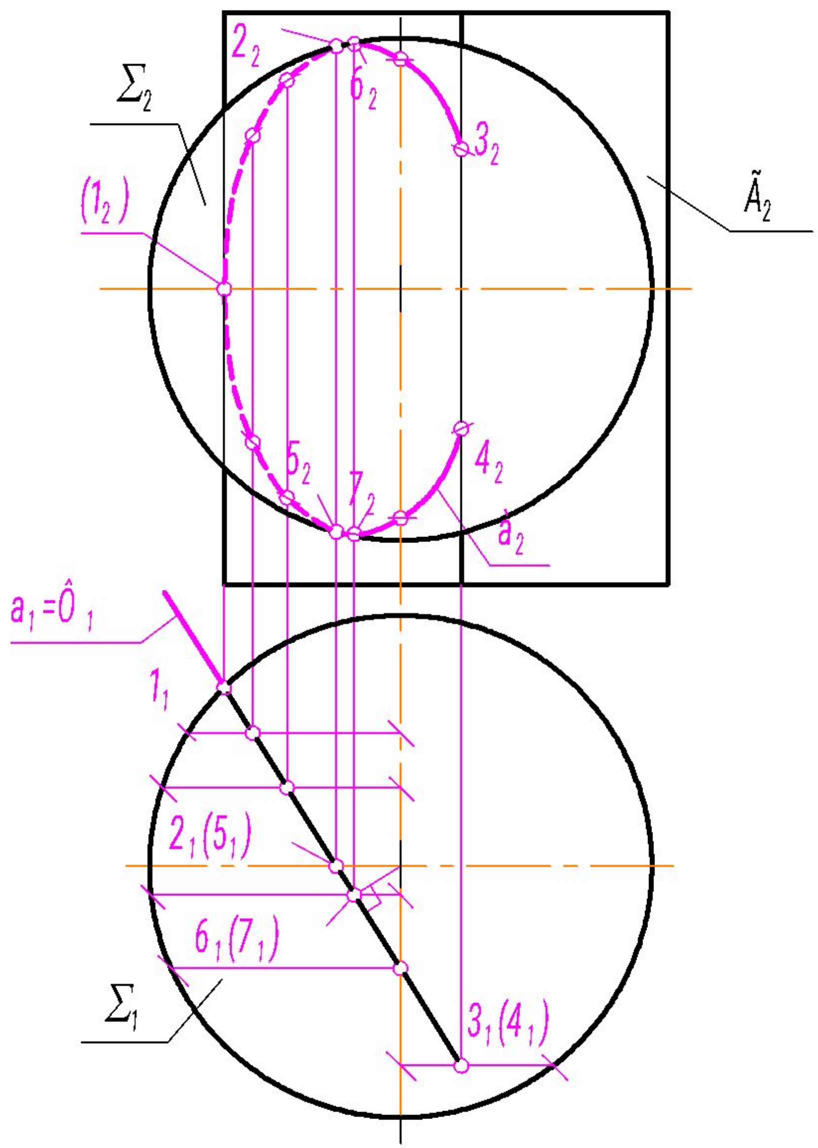
Алгоритм: 2 ГПЗ, 2 алг.

1. Вначале определяем, **что** должно получиться в результате пересечения. Характер пересечения - частный случай вмятия, с одной общей точкой. Призма - трёхгранная, значит можно рассматривать пересечение сферы тремя отдельными плоскостями: Δ, Φ и Λ. Следовательно, линией пересечения является пространственная линия, состоящая из трёх плоских кривых второго порядка: двух дуг эллипсов ($\Sigma \cap \Phi = a$, $\Sigma \cap \Lambda = b$) и одной дуги окружности ($\Sigma \cap \Delta = c$).
2. Поскольку поверхность призмы – горизонтально проецирующая, то горизонтальная линия пересечения совпадает с Γ_1.
3. Фронтальную проекцию линии пересечения сферы с любой из плоскостей, например, Φ, строим по принадлежности сфере. $a \subset \Sigma \Rightarrow a_2 \subset \Sigma_2$.

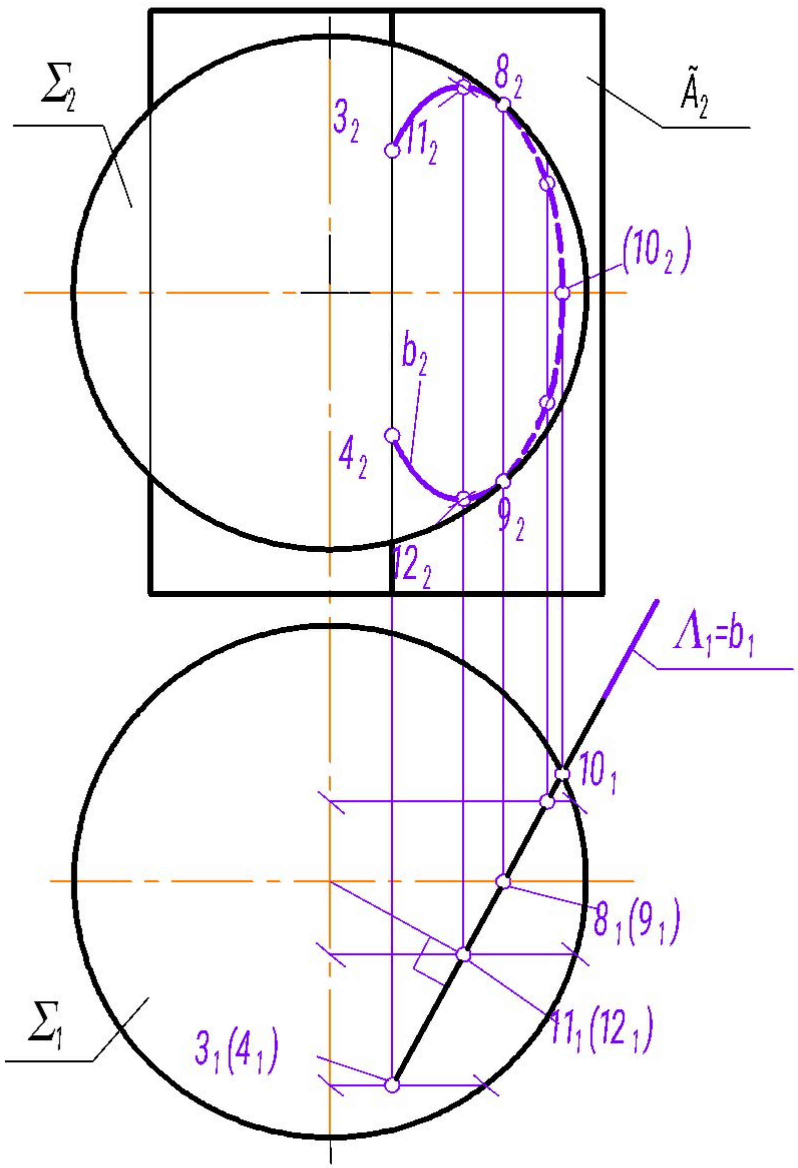
Построения начинаем с характерных точек: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*. Промежуточные точки, находим по принадлежности параллелям сферы. Определяем видимости.



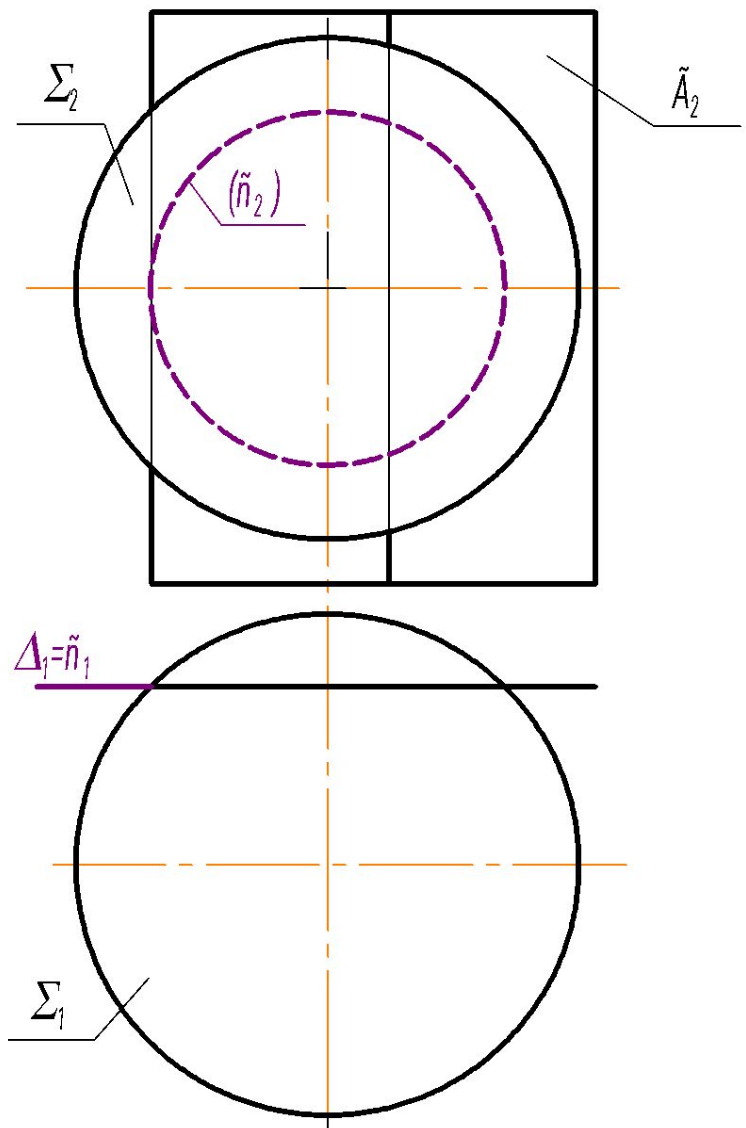
Построения начинаем с характерных точек: *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*. Промежуточные точки, находим по принадлежности параллелям сферы. Определяем видимости.



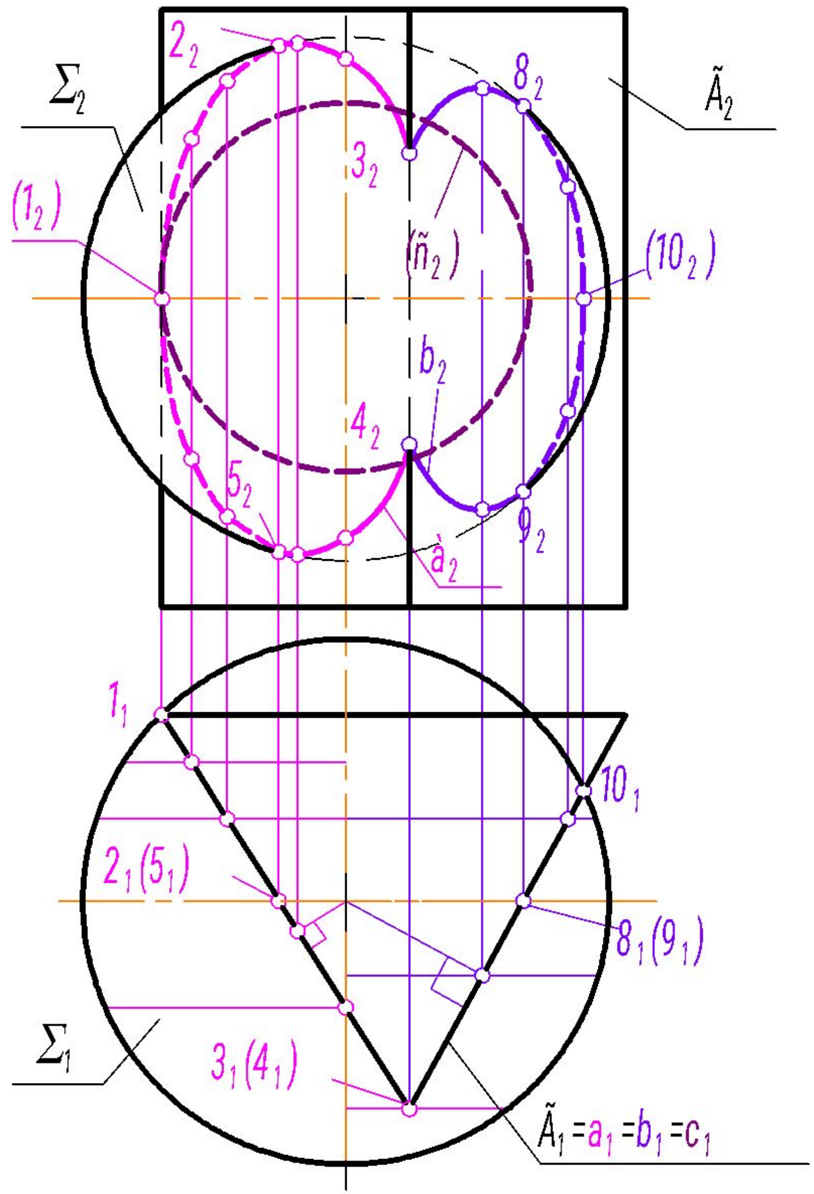
4. Аналогично строим линию пересечения сферы с плоскостью Λ(:
$b \subset \Sigma \Rightarrow b_2 \subset \Sigma_2$.



Результат пересечения сферы Σ с плоскостью Δ - окружность c которая расположена за плоскостью фронтального меридиана, следовательно, $c_2 \subset \Sigma_2$ - невидимая.



Общий результат решения задачи с учётом видимости поверхностей:



Алгоритм: $\Sigma \cap \Gamma = a, b, c$.
$\Gamma \perp\perp \Pi_1$. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

1. $\Gamma \perp\perp \Pi_1 \Rightarrow a_1, b_1, c_1 = \Gamma_1$.
2. $a_2, b_2, c_2 \subset \Sigma$.

Решение задач в случае, когда обе пересекающиеся фигуры - непроецирующие.

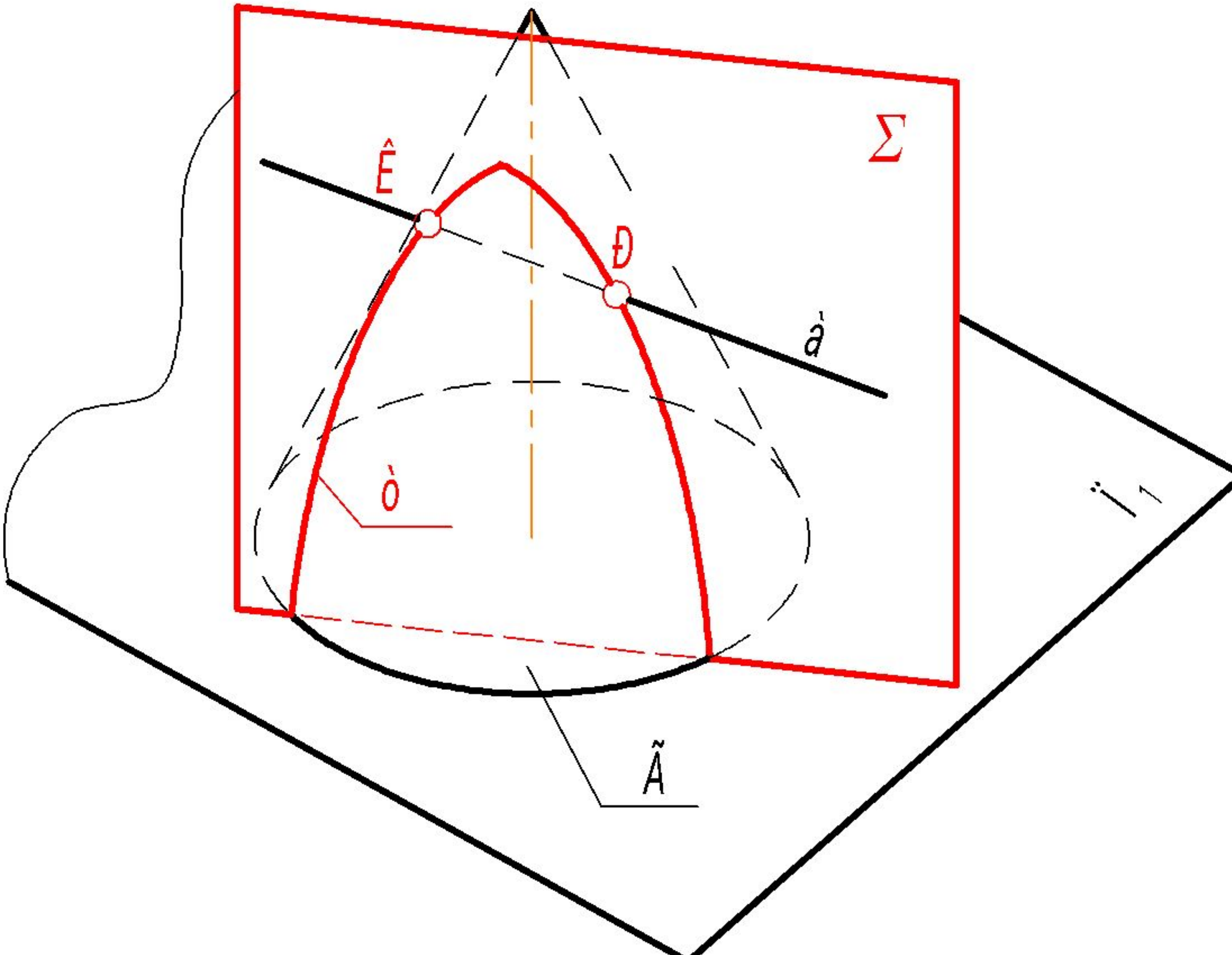
3 алгоритм

В данном случае задача усложняется тем, что на чертеже нет **главной проекции** ни у одной из пересекающихся фигур. Поэтому для решения таких задач специально вводят **вспомогательную секущую поверхность-посредник**, которая пересекает обе фигуры,

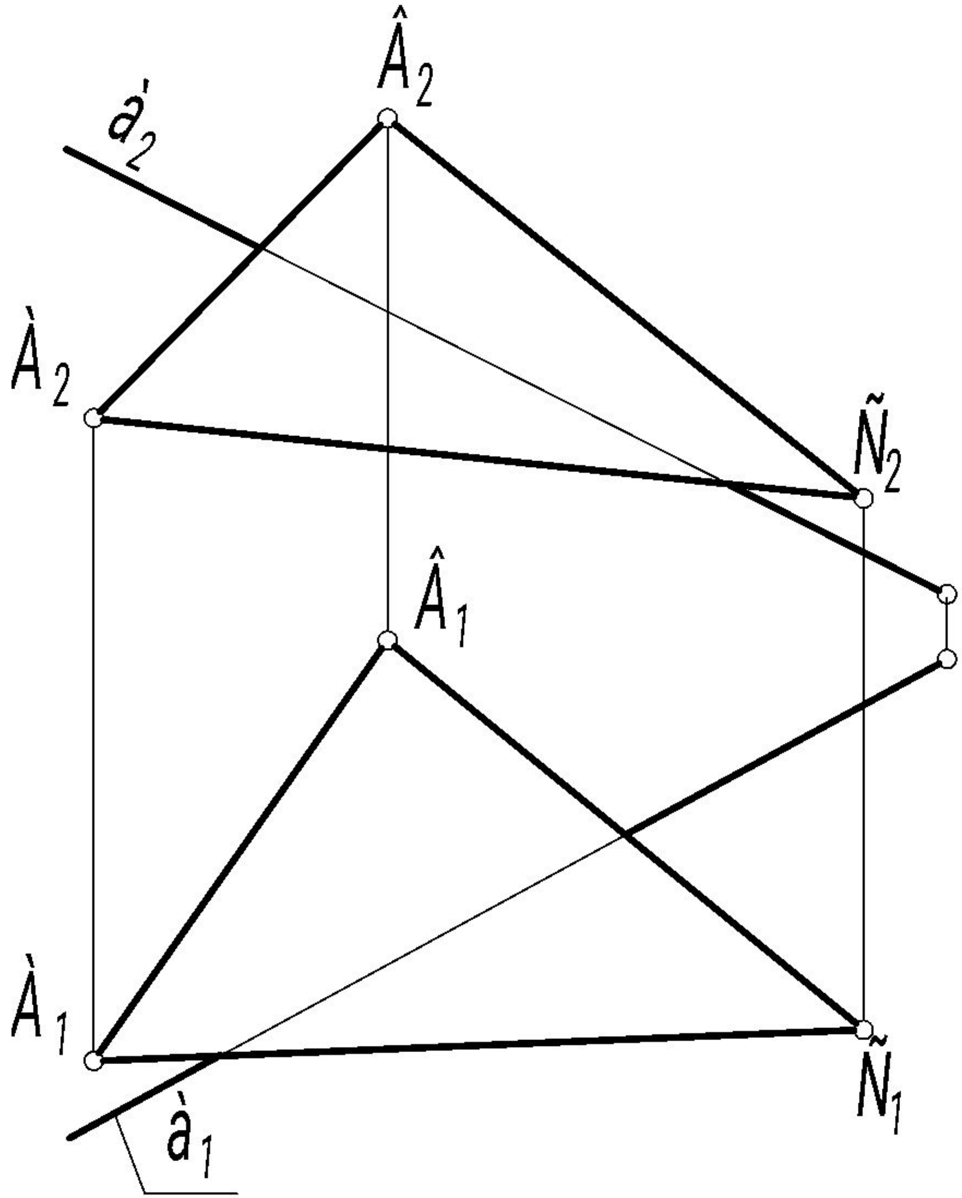
выявляя общие точки.

Эта **поверхность-посредник** может быть **проецирующей**, и тогда решение задачи можно свести ко **2 алгоритму**, или **непроецирующей** (например, сфера - посредник). Решение **первой** и **второй ГПЗ** рассмотрим отдельно.

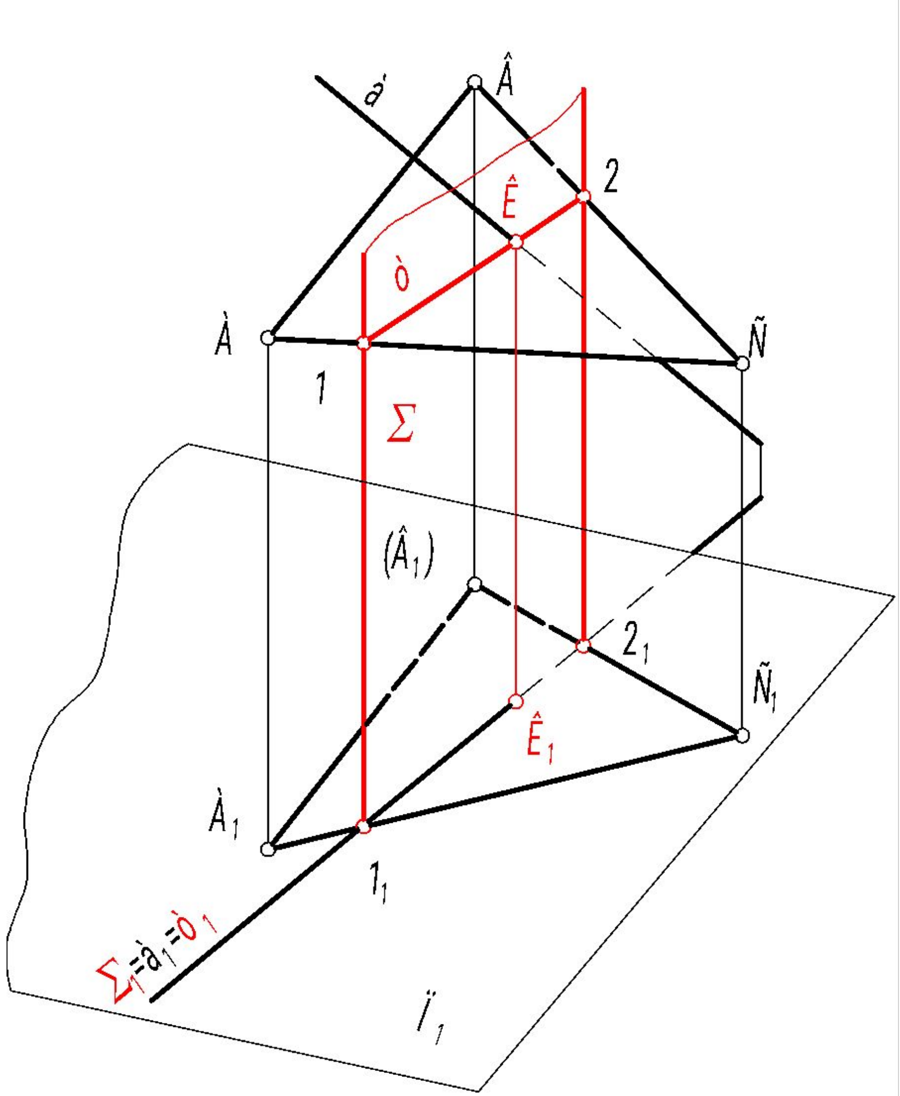
Решение 1ГПЗ



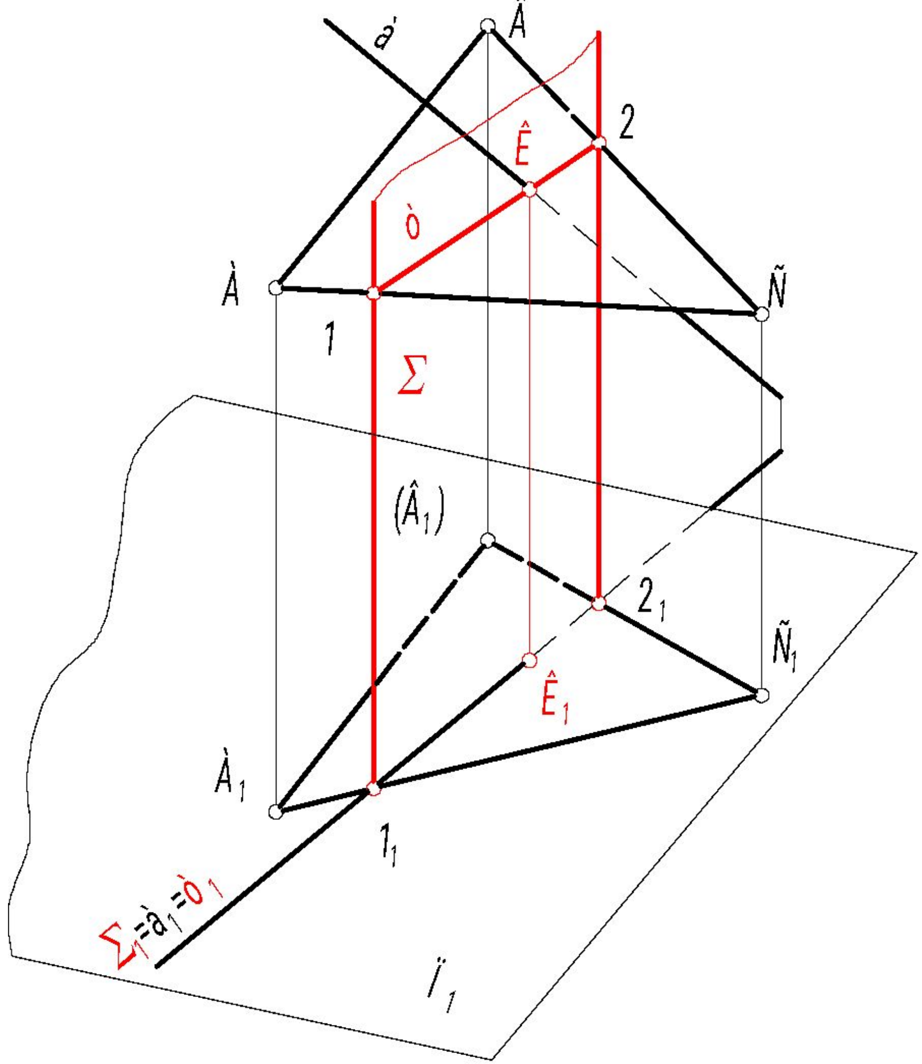
Задача: Найти точку пересечения плоскости *Г(ABC)* с прямой а. Определить видимость прямой



1 **Алгоритм**: Возьмём **плоскость-посредник** *Σ* так, чтобы она включала в себя прямую *a* и была бы проецирующей, например, относительно *П1*. Тогда *Σ1* совпадёт с *a1*

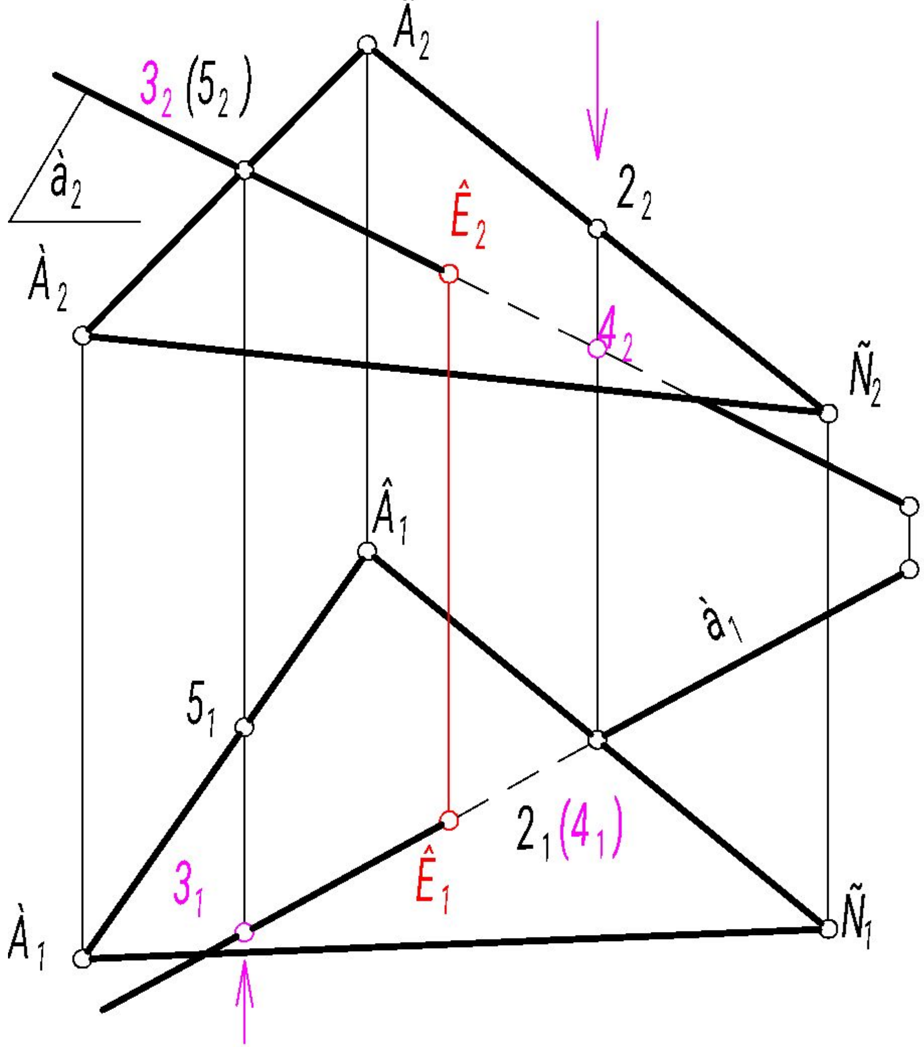


2. Пересекаем проецирующую плоскость *Σ* с плоскостью общего положения *ABC*, результатом будет прямая *m*. Задачу решаем по **2 алгоритму**: *m1* совпадает с *Σ1*, *m2* находим по принадлежности плоскости *ABC*. $m = 12 \Rightarrow m_2 = 1_2 2_2$.


a'
Â
2
Ê
ò
À
Ñ
1
Σ
(Â1)
21
Ñ1
Ê1
À1
11
Σ1=à1=ò1
Ï1

3. *m2*, пересекаясь с *a2*, даёт нам точку *K2* ⇒ *K1*.

4. Видимость прямой *a* определяем методом **конкурирующих точек**



Выполним краткую алгоритмическую запись решения задачи:

Г(АВС) ∩ а = К.

1 ГПЗ, 3 алгоритм.

1. Σ - плоскость-посредник,

$\Sigma \supset a$, $\Sigma \perp\perp \Pi_1 \Rightarrow \Sigma_1 = a_1$;

2. $\Sigma \cap Г = m$. 2 ГПЗ, 2 алгоритм.

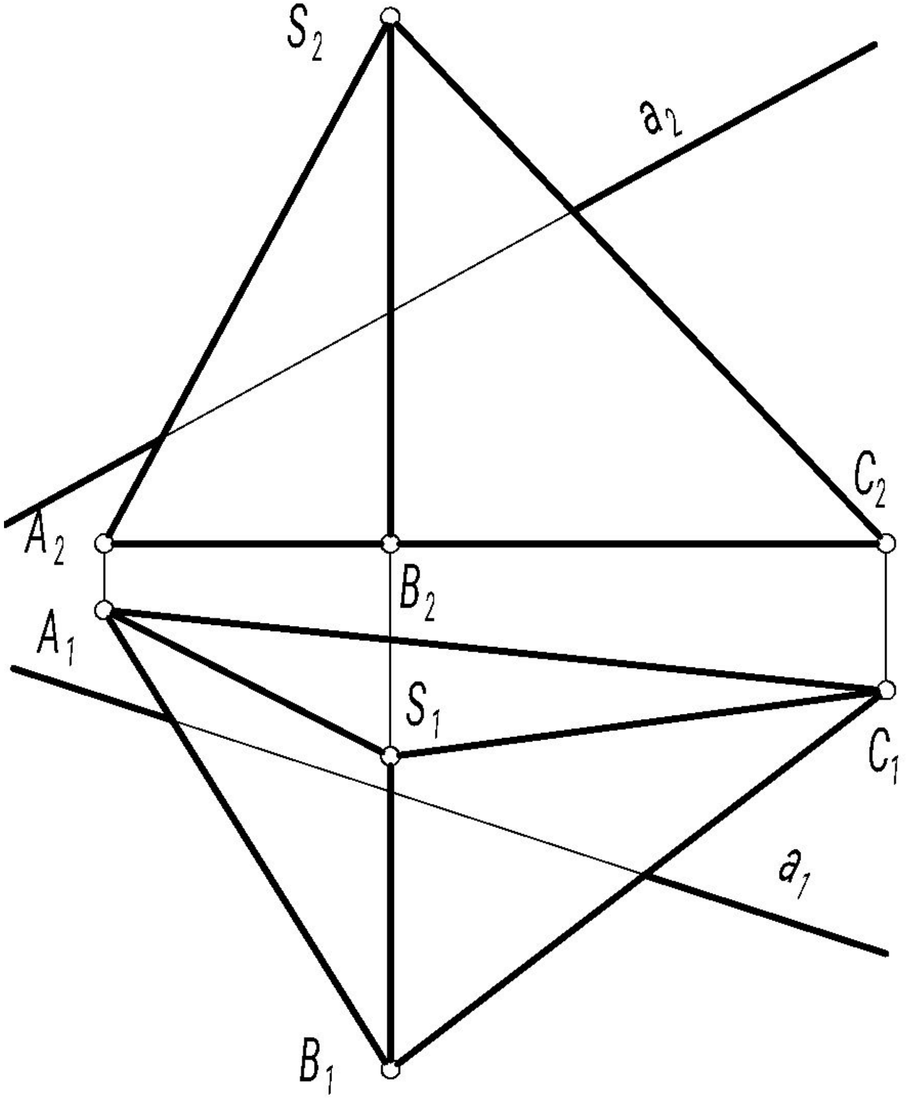
$\Sigma \perp\perp \Pi_1 \Rightarrow m_1 = \Sigma_1$; $m_2 \subset Г$

$m_2 \cap a_2 = К_2 \Rightarrow К_1$.

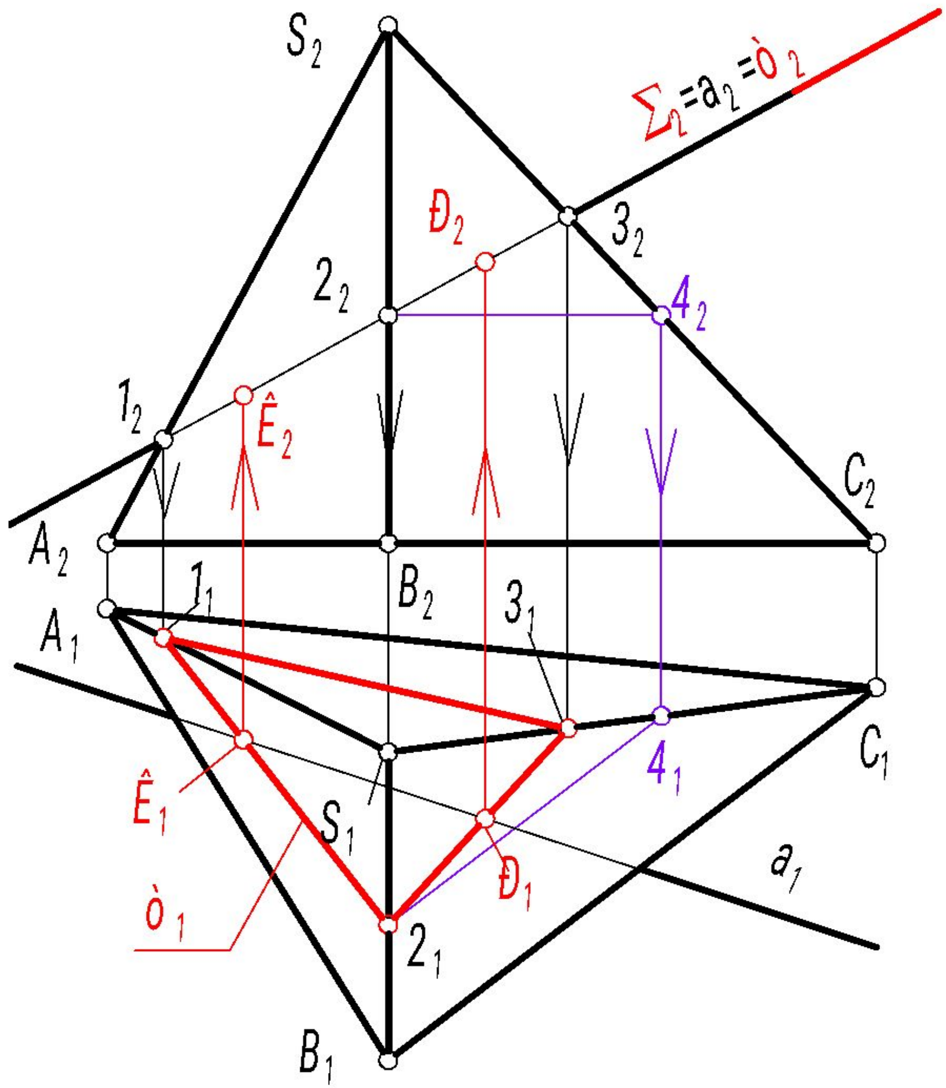
Такой алгоритм решения приемлем для нахождения точек пересечения любой поверхности с прямой линией. Разница заключается в форме линии *m*, которая является результатом пересечения **плоскости-посредника** с заданной поверхностью и зависит от вида поверхности.

В рассмотренном примере *m* - это прямая линия. Если вместо плоскости *Г(ABC)* возьмём, например, **сферу**, то линия *m* будет являться **окружностью**, которая может проецироваться на какую-либо плоскость проекций в виде **эллипса**, если с прямой пересекается **многогранник**, то *m* - это **плоский многоугольник** и т.д.

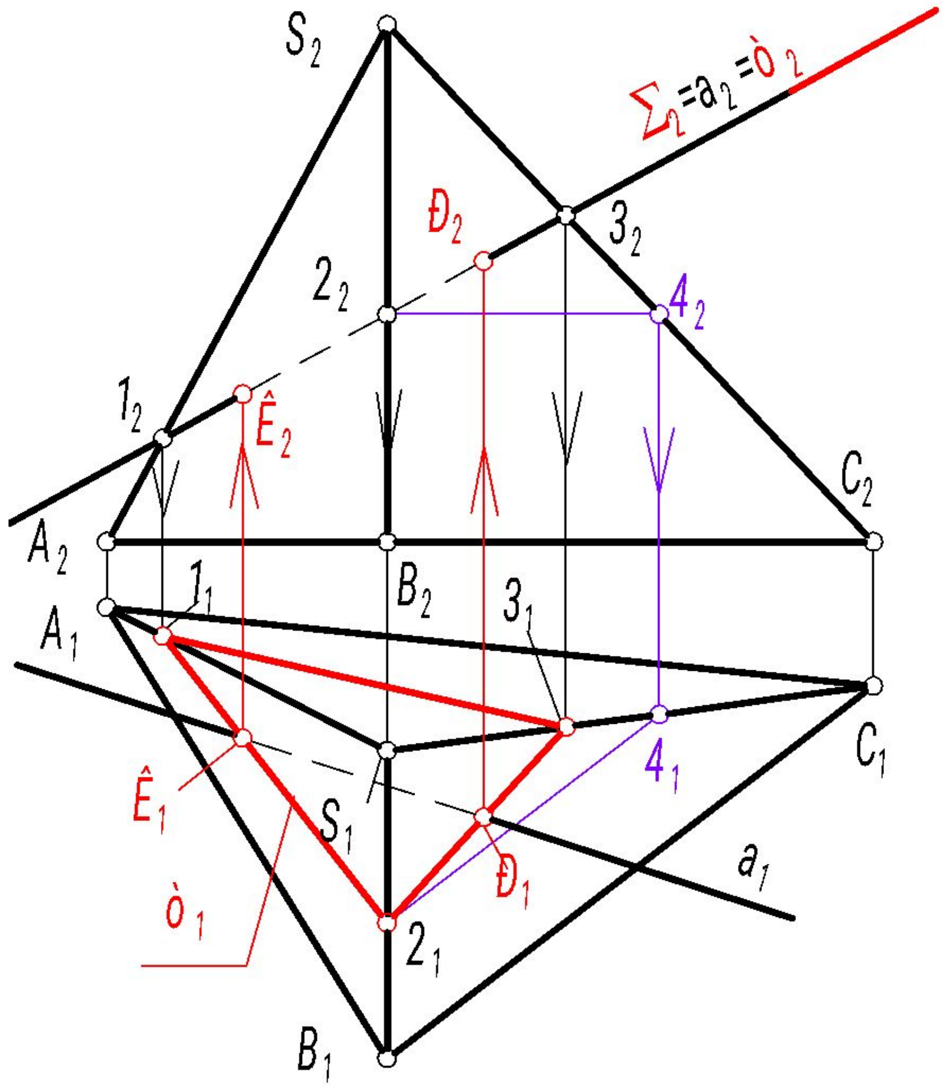
Задача: Найти точки пересечения **пирамиды** *Г(SABC)* с прямой *a*. Определить видимость прямой.



1. Через прямую a проведём плоскость-посредник Σ, проецирующую относительно $П_2$. $\Sigma_2 = a_2$



4. Определяем видимость прямой на обеих проекциях. Невидимый участок прямой расположен между точками *К* и *Р*.



Алгоритм решения:

$Г(SABC) \cap a = K, P$. 1 ГПЗ, 3 алгоритм.

1. Σ - плоскость-посредник,

$\Sigma \supset a$, $\Sigma \perp\perp П_2 \Rightarrow \Sigma_2 = a_2$

2. $\Sigma \cap Г = m(123)$. 2 ГПЗ, 2 алг.

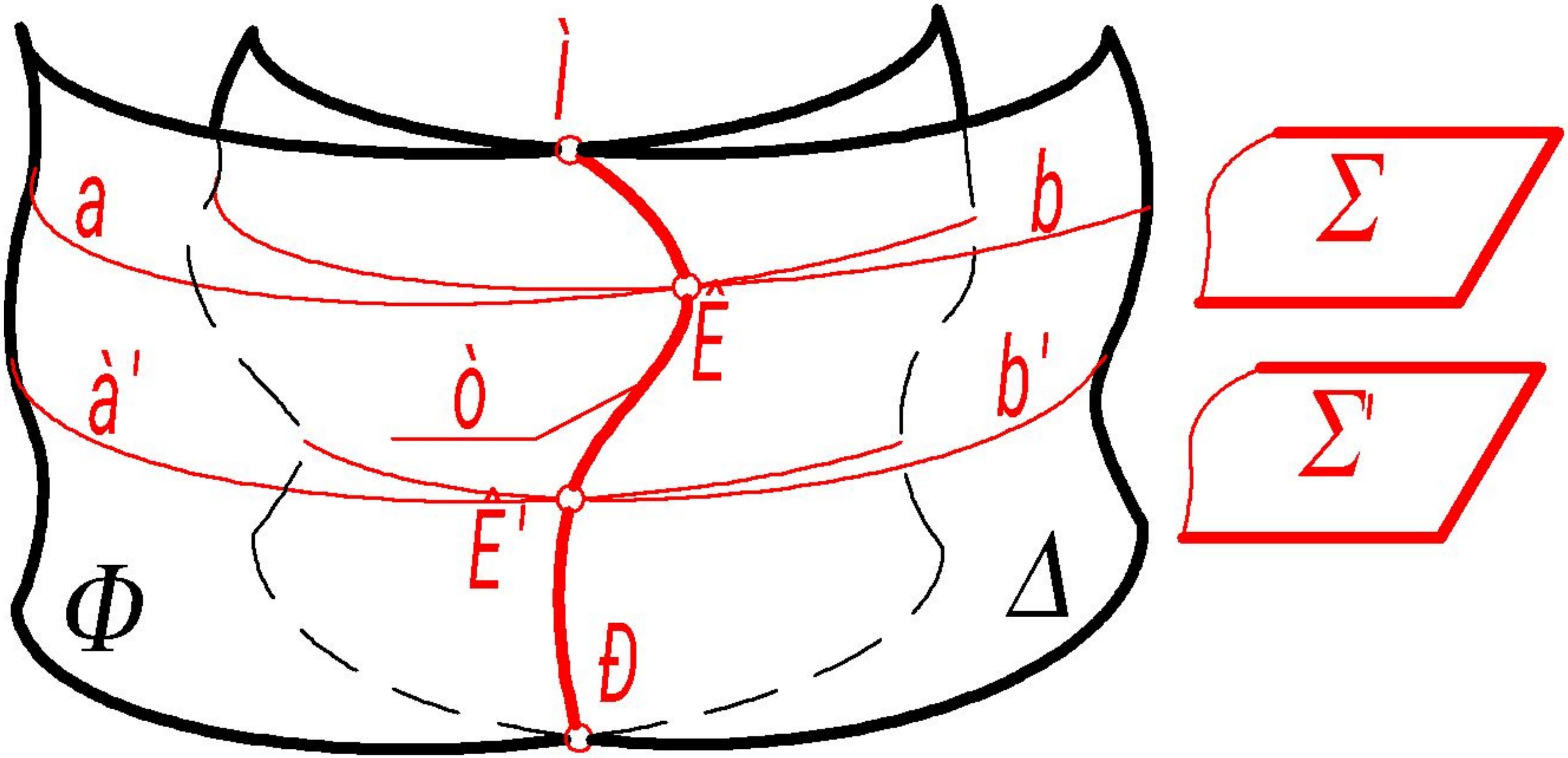
$\Sigma \perp\perp П_2 \Rightarrow m_2(1_2, 2_2, 3_2) = \Sigma_2$;

$m_1(1_1, 2_1, 3_1) \subset Г$

3. $m_1(1_1, 2_1, 3_1) \cap a_1 = K_1, P_1 \Rightarrow K_2, P_2$.

Решение 2ГПЗ (в случае пересечения непроецирующих фигур)

Рассмотрим алгоритм решения на пространственной модели

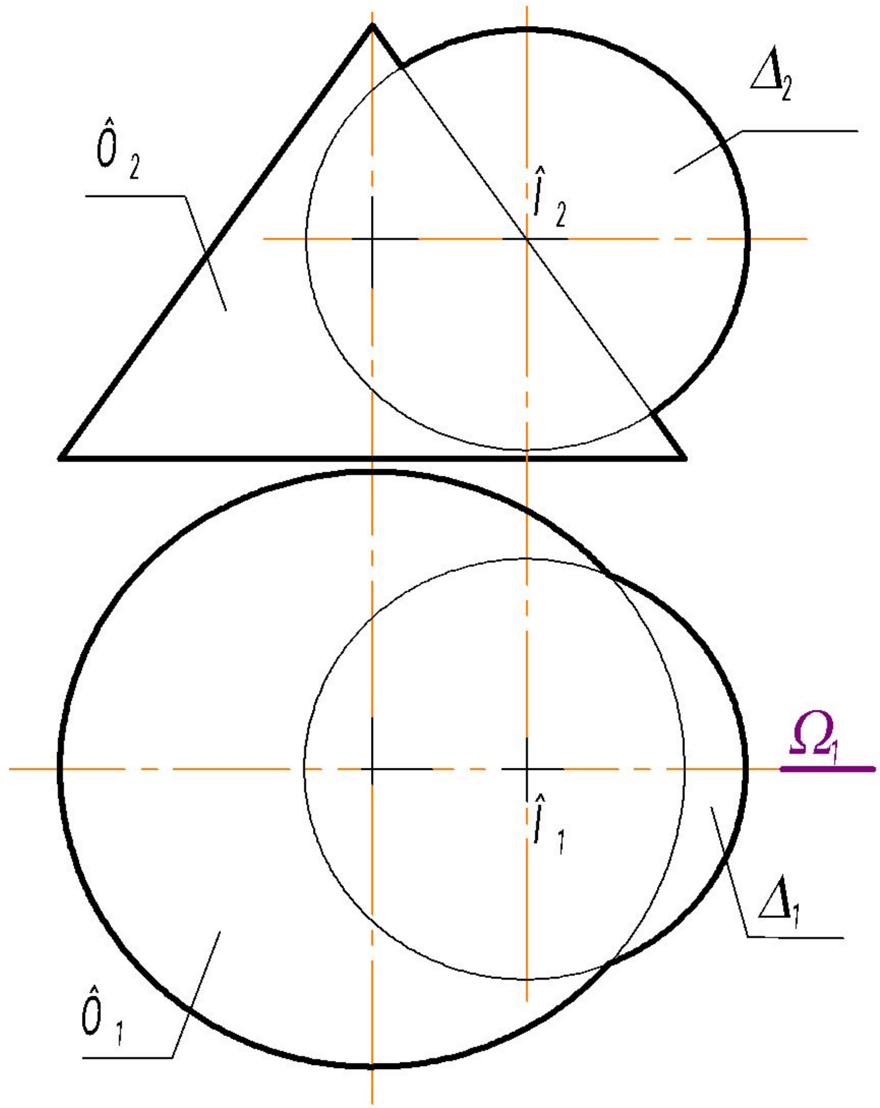


Алгоритм решения

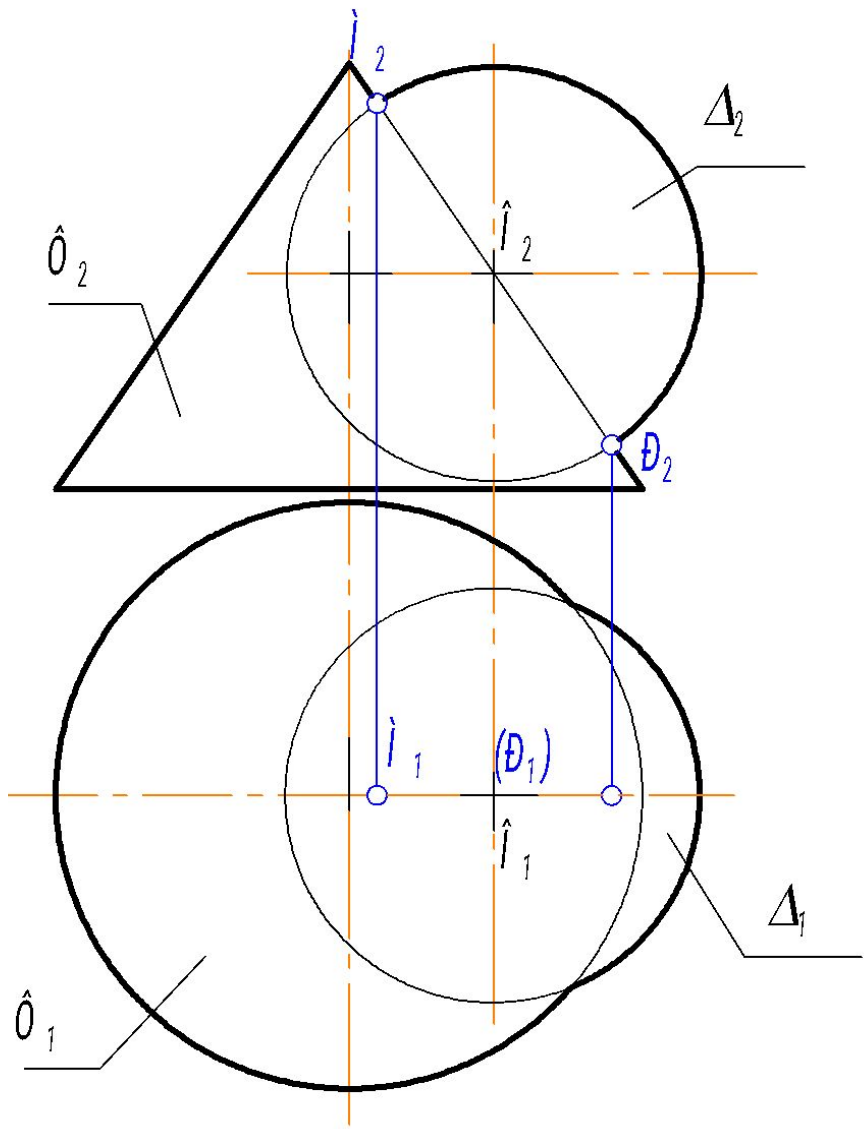
1. $\Phi \cap \Delta = m$; 2ГПЗ, 3 алгоритм .
2. Отмечаем очевидные точки пересечения - *M* и *P*.
3. Вводим плоскость-посредник Σ (как правило - проецирующую.)
4. $\Sigma \cap \Phi = a$; $\Sigma \cap \Delta = b$;
5. $a \cap b = K$.
6. Для построения линии *m* нужно найти такое количество точек, которое определяет данную линию. Для этого вводим несколько плоскостей-посредников.
7. Определяем видимость линии пересечения *m* и поверхностей.

Задача:

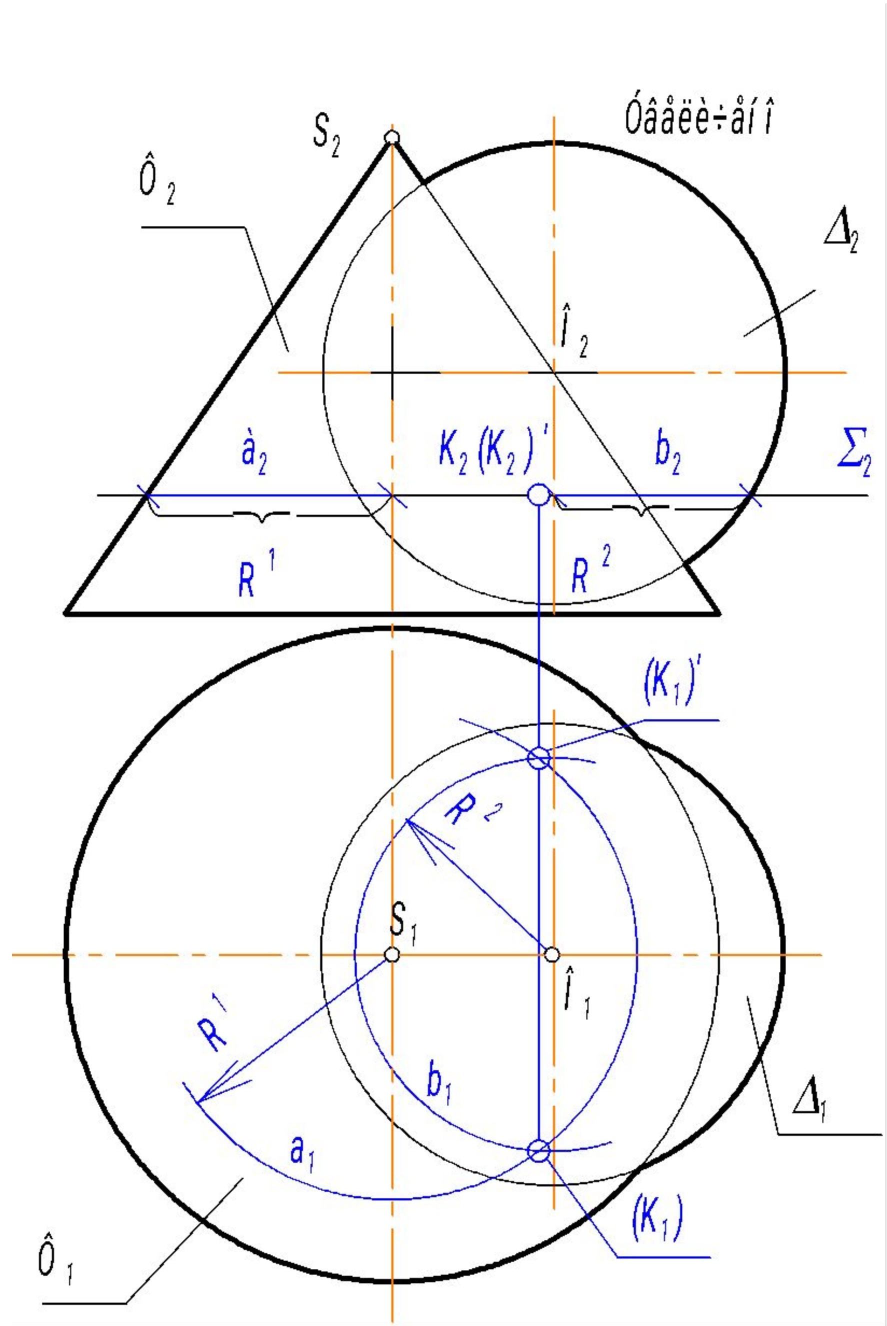
Построить линию пересечения конуса *Ф* со сферой *Δ*



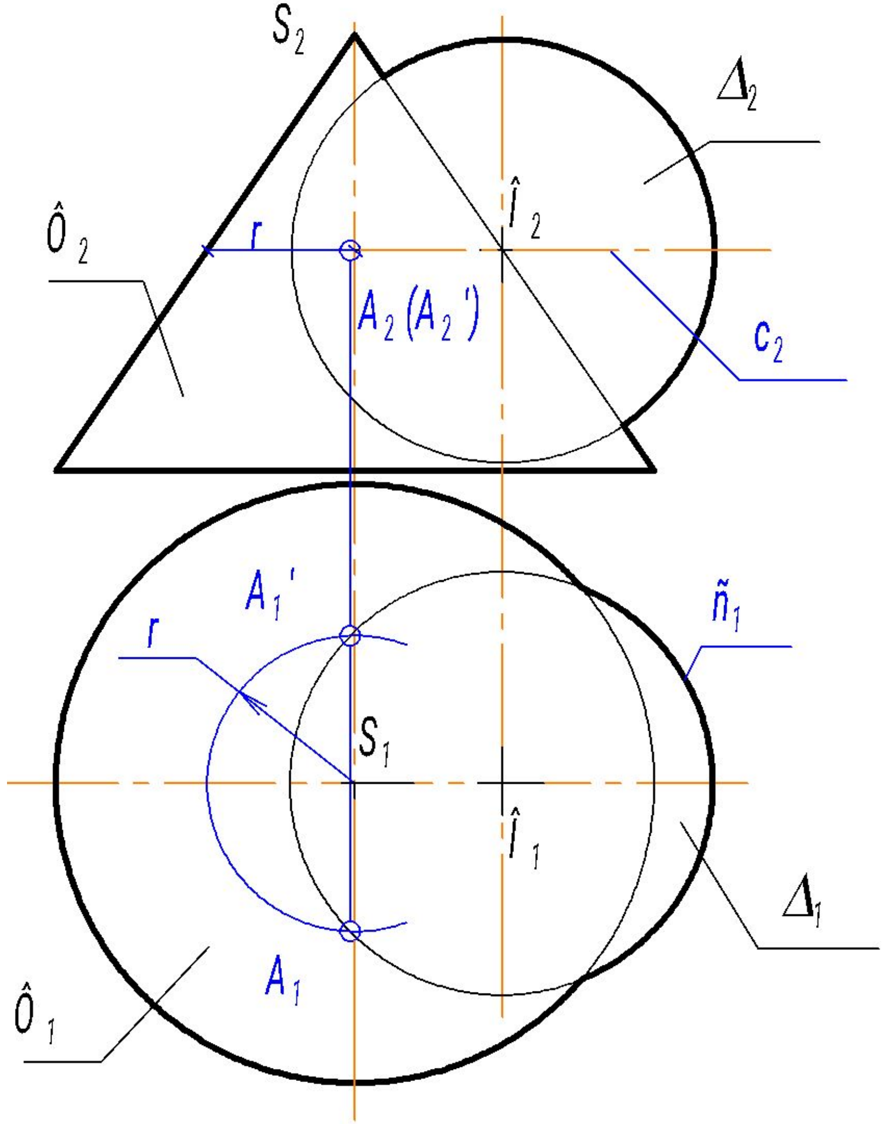
Построения начинаем с характерных точек, не требующих дополнительных построений для их нахождения.



3. Все остальные точки находим одинаково: задаём плоскость-посредник Σ .

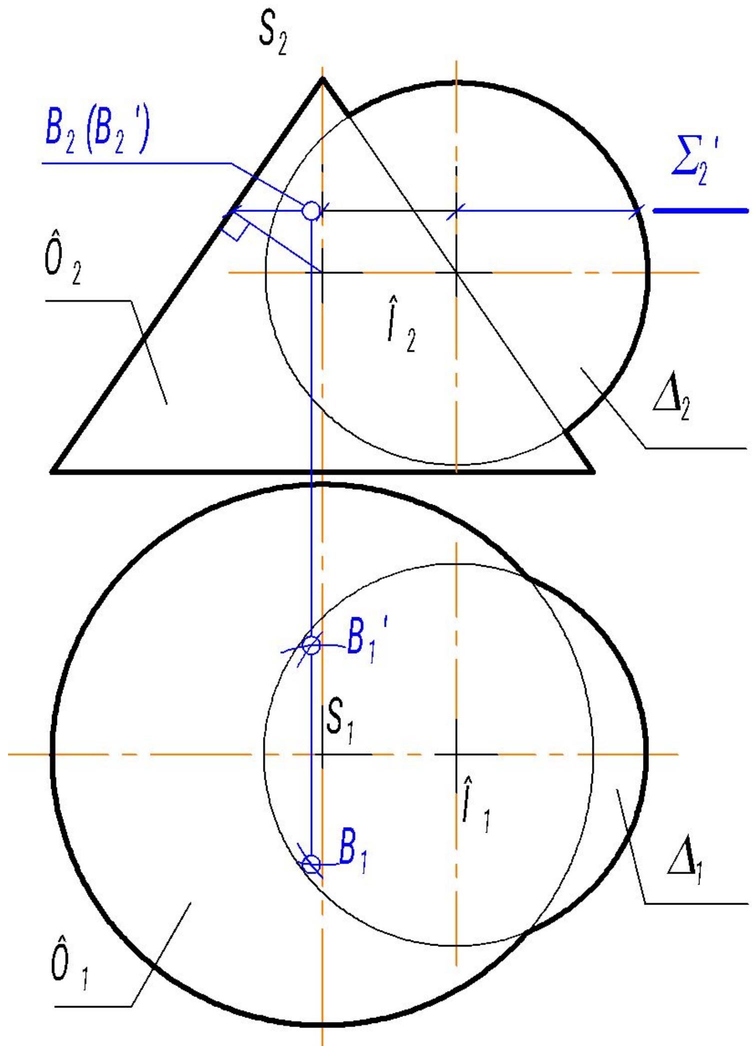


4. Видимость горизонтальной проекции линии пересечения определяют точки *A* и *A'*, лежащие в плоскости экватора *c* сферы . На *П1* они принадлежат окружности *c1*.

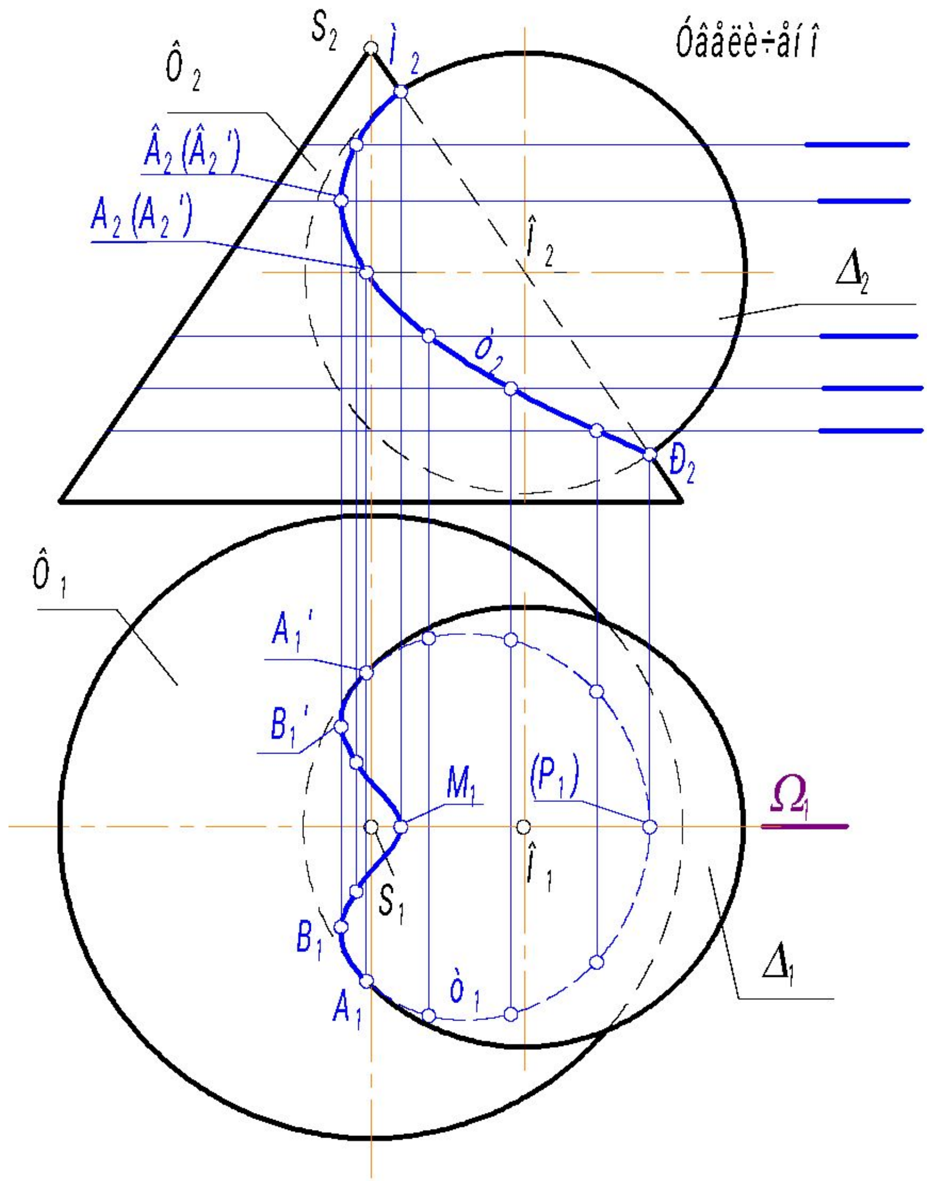


5. Крайние левые точки *B* и *B'* находим в плоскости *Σ '*, проходящей через точку встречи левой очерковой образующей конуса с перпендикуляром, проведённым из точки пересечения оси конуса с

плоскостью экватора сферы



Конечный результат построений с учётом видимости линии пересечения и самих поверхностей приведен на рис.



Алгоритмическая запись решения:

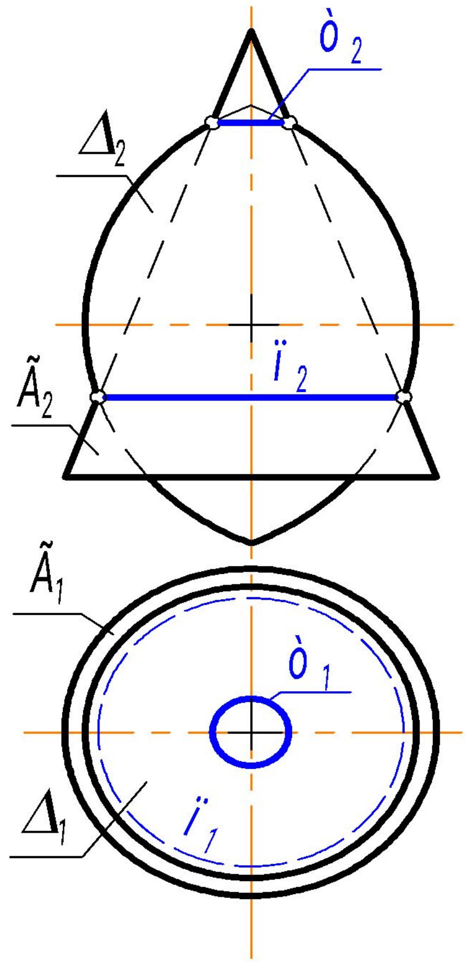
$\Phi \cap \Delta = m$. 2ГПЗ, 3 алгоритм .

1. Точки M и $P \in \Omega \Rightarrow M_2; P_2 \Rightarrow M_1; P_1.$
2. Σ - плоскость-посредник; $\Sigma \parallel \Pi_1$,
3. $\Sigma \cap \Phi = a \Rightarrow a_1; \Sigma \cap \Delta = b \Rightarrow b_1; b_1 \cap a_1 = K_1; K_1' \Rightarrow K_2; K_2'.$
4. Аналогично строим остальные точки: $m_1 \Rightarrow m_2$.
5. Видимость m относительно Π_1: точки $A, A' \in c$.

Частные случаи пересечения поверхностей вращения второго порядка

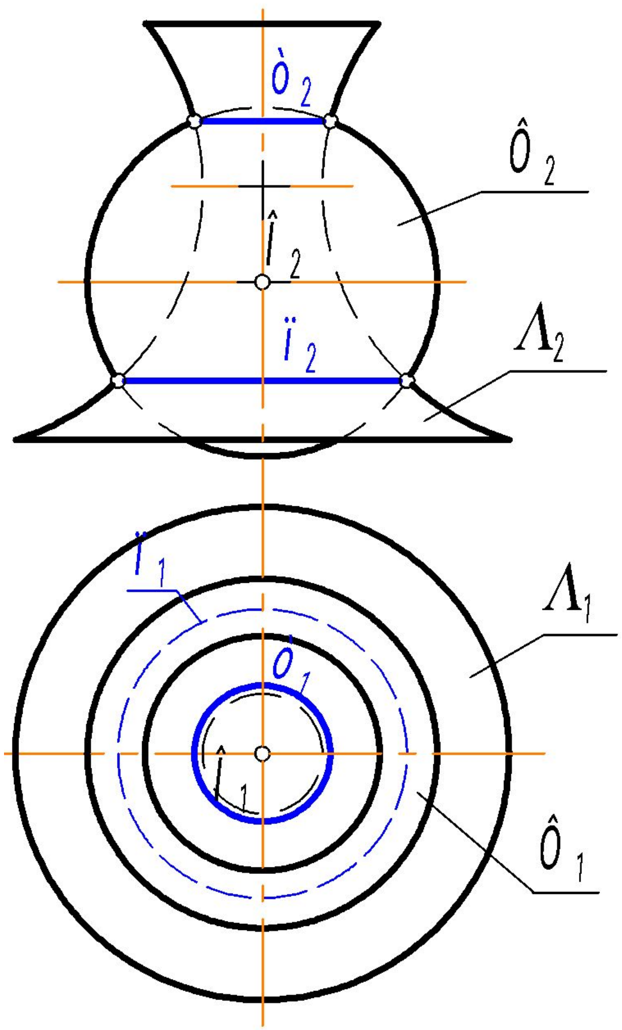
Пересечение соосных поверхностей вращения

Две соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения: $Г \cap Δ = m;\ n$ - окружности



Если центр сферы находится на оси поверхности вращения, то сфера пересечёт эту поверхность по окружностям, плоскости которых перпендикулярны оси вращения:

$\Phi \cap \Lambda = m; n$ - окружности .



Теорема Монжа

- Если две поверхности вращения второго порядка описаны около третьей поверхности вращения второго порядка, или вписаны в неё, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Причём, плоскости кривых проходят через прямую, соединяющую точки двойного соприкосновения.

Теорема Монжа проиллюстрирована пересечением двух конусов *Σ* и *Г*, в которые вписана сфера *Ф*.