7. Теорема. (О счетной аддитивности интеграла Лебега). *Пусть* $C \in \Sigma$ *и измеримая функция* $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *такова, что существует интеграл* $\int\limits_C f\, d\mu \in [-\infty, +\infty]$.

Пусть множества $A_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, *попарно не пересекаются, содержатся во множестве* C *и* $A = \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. *Тогда интегралы* $\int\limits_A f\, d\mu$ *и* $\int\limits_{A_k} f\, d\mu$, $k \in \mathbb{N}$, *существуют и справедливо равенство*

$$\int\limits_A f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f\, d\mu . \quad (*)$$

Доказательство. По условию хотя бы один из интегралов $\int\limits_C f^+\, d\mu$ и $\int\limits_C f^-\, d\mu$ конечен. Допустим для определенности, что $\int\limits_C f^+\, d\mu < +\infty$.

По свойству (c) §2 тогда

$$\int_A f^+\,d\mu \leqslant \int_C f^+\,d\mu < +\infty \text{ и все } \int_{A_k} f^+\,d\mu \leqslant \int_C f^+\,d\mu < +\infty .$$

Поэтому в равенстве (*) существуют все интегралы. По теореме 6 §3 имеем

$$\int_A f^-\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^-\,d\mu , \quad \int_A f^+\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+\,d\mu .$$

Отсюда

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f^+\,d\mu - \int_A f^-\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^+\,d\mu - \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f^-\,d\mu =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^+\,d\mu - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^-\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^+\,d\mu - \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f^-\,d\mu \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{A_k} f^+\,d\mu - \int_{A_k} f^-\,d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\,d\mu . \square$$

Следствие. *Если* $f \in L(\mu, C)$, *то формула* $\mu_f(A) = \int\limits_A f\, d\mu$ *определяет конечную вещественную меру на* σ-*алгебре* $\Sigma_C = \{A \subset C\ ;\ A \in \Sigma\}$ *измеримых подмножеств множества* C.

8. Теорема. (О линейности интеграла). *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}$, $C \in \Sigma$, f *и* $g \in L(\mu, C)$, *причем* $f, g : C \to \mathbb{R}$ (*т.е. обе функции всюду на* C конечны). *Тогда функции* αf *и* $f + g$ *также суммируемы и справедливы равенства*

$$\int\limits_C \alpha \cdot f\, d\mu = \alpha \cdot \int\limits_C f\, d\mu\,, \qquad (3)$$

$$\int\limits_C (f + g)\, d\mu = \int\limits_C f\, d\mu + \int\limits_C g\, d\mu\,. (4)$$

Доказательство. По свойствам (c) и (d) § 3 гл.1 функции αf и $f + g$ на множестве C измеримы.

Существование интеграла $\int\limits_C \alpha \cdot f\, d\mu$ и равенство (3) доказываются просто: Если $\alpha > 0$, то по определению интеграла от произвольной измеримой функции и по свойству (e) §2

$$\int_C \alpha \cdot f \, d\mu = \int_C (\alpha \cdot f)^+ \, d\mu - \int_C (\alpha \cdot f)^- \, d\mu = \int_C \alpha \cdot f^+ \, d\mu - \int_C \alpha \cdot f^- \, d\mu =$$

$$= \alpha \cdot \int_C f^+ \, d\mu - \alpha \cdot \int_C f^- \, d\mu = \alpha \cdot \left(\int_C f^+ \, d\mu - \int_C f^- d\mu \right) = \alpha \cdot \int_C f d\mu .$$

Если $\alpha < 0$, то

$$(\alpha \cdot f)^+ = \max(0, \alpha \cdot f) = \max\left(0, -|\alpha| \cdot f\right) = |\alpha| \cdot \max(0, -f) = |\alpha| \cdot f^-,$$

$$(\alpha \cdot f)^- = \max(0, -\alpha \cdot f) = \max\left(0, |\alpha| \cdot f\right) = |\alpha| \cdot \max(0, f) = |\alpha| \cdot f^+.$$

Поэтому снова применяя определение интеграла и свойство (e) §2 имеем

$$\int_C \alpha \cdot f \, d\mu = \int_C (\alpha \cdot f)^+ \, d\mu - \int_C (\alpha \cdot f)^- \, d\mu = \int_C |\alpha| \cdot f^- \, d\mu - \int_C |\alpha| \cdot f^+ \, d\mu =$$

$$= |\alpha| \cdot \int_C f^- \, d\mu - |\alpha| \cdot \int_C f^+ \, d\mu =$$

$$|\alpha| \cdot \left(\int_C f^- \, d\mu - \int_C f^+ \, d\mu \right) = -|\alpha| \cdot \int_C f \, d\mu = \alpha \cdot \int_C f \, d\mu .$$

При $\alpha = 0$ равенство (3) очевидно.

Докажем теперь, что интеграл $\int\limits_C (f+g)\,d\mu$ существует и справедливо равенство (4).

По условию f и $g \in L(\mu, C)$. Значит, $\int\limits_C |f|\,d\mu < +\infty$ и $\int\limits_C |g|\,d\mu < +\infty$ по теореме 2. Применяя еще свойство 2(d) и теорему 2 §3, получим

$$\int\limits_C |f+g|\,d\mu \leqslant \int\limits_C \big(|f|+|g|\big)\,d\mu = \int\limits_C |f|\,d\mu + \int\limits_C |g|\,d\mu < +\infty.$$

Из этого неравенства по теореме 2 следует, что $f+g \in L(\mu, C)$.
Разобьем множество C на подмножества

$$B_1 = \{t \in C\,;\, f(t) \geqslant 0,\, g(t) \geqslant 0\},\ B_2 = \{t \in C\,;\, f(t) < 0,\, g(t) < 0\},$$

$$B_3 = \{t \in C\,;\, f(t) \geqslant 0,\, g(t) < 0,\, (f+g)(t) \geqslant 0\},$$

$$B_4 = \{t \in C\,;\, f(t) \geqslant 0,\, g(t) < 0,\, (f+g)(t) < 0\},$$

$$B_5 = \{t \in C\,;\, f(t) < 0,\, g(t) \geqslant 0,\, (f+g)(t) \geqslant 0\},$$

$$B_6 = \{t \in C\,;\, f(t) < 0,\, g(t) \geqslant 0,\, (f+g)(t) < 0\}.$$

По теореме 7

$$\int_C (f+g)\,d\mu = \sum_{k=1}^{6} \int_{B_k} (f+g)\,d\mu, \tag{5}$$

так как $C = \bigsqcup_{k=1}^{6} B_k$. Докажем, что

$$\int_{B_k} (f+g)\,d\mu = \int_{B_k} f\,d\mu + \int_{B_k} g\,d\mu \tag{6}$$

для каждого $k = 1, 2, \ldots, 6$.

При $k = 1$ это сразу следует из теоремы 2 §3, так как на множестве B_1 функции f и g неотрицательны. Применяя кроме теоремы 2 §3 еще равенство (3) при $\alpha = -1$, получим нужное равенство и при $k = 2$:

$$\int_{B_2} (f+g)d\mu = -\int_{B_2} \left[(-f)+(-g)\right] d\mu = -\int_{B_2} (-f)\,d\mu - \int_{B_2} (-g)\,d\mu = \int_{B_2} f d\mu + \int_{B_2} g\,d\mu.$$

Докажем равенство (6) для $k = 3$. На множестве B_3 справедливы соотношения

$$f \geqslant 0,\ \ g < 0,\ \ f+g \geqslant 0,\ -g > 0,\ (f+g) + (-g) = f \geqslant 0.$$

Применяя теорему 2 §3 к функциям $f + g$ и $-g$, получим

$$\int_{B_3} f\,d\mu = \int_{B_3} (f + g)\,d\mu + \int_{B_3} (-g)\,d\mu = \int_{B_3} (f + g)\,d\mu - \int_{B_3} g\,d\mu. \quad (7)$$

Из условия $g \in L(\mu, C)$ согласно теореме 5 следует, что $g \in L(\mu, B_3)$ и поэтому интеграл $\int_{B_3} g\,d\mu$ конечен. Значит, из равенства (7) вытекает равенство

$$\int_{B_3} (f + g)\,d\mu = \int_{B_3} f\,d\mu + \int_{B_3} g\,d\mu.$$

На множестве B_4 имеем

$$f \geqslant 0,\ g < 0,\ f + g < 0,\ -(f + g) > 0,\ [-(f + g)] + f = (-g) > 0.$$

Применяя теорему 2 §3 к функциям $-(f + g)$ и f, получим

$$\int_{B_4} [-(f + g)]\,d\mu + \int_{B_4} f\,d\mu = \int_{B_4} (-g)\,d\mu,$$

откуда следует, что $\int_{B_4} (f + g)\,d\mu = \int_{B_4} f\,d\mu + \int_{B_4} g\,d\mu.$

Для $k = 5$ и $k = 6$ доказательства равенства (6) аналогичны предыдущим двум случаям.

Равенства (6) доказаны. Из этих равенств, из равенства (5) и из аналогичных равенств $\int\limits_C f\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{6} \int\limits_{B_k} f\,d\mu$, $\int\limits_C g\,d\mu = \sum\limits_{k=1}^{6} \int\limits_{B_k} g\,d\mu$ следует требуемое равенство (4). □

Теорему 8 можно усилить следующим образом.

9. **Теорема.** *Пусть функции $f, g : C \to \mathbb{R}$ измеримы, интегралы $\int\limits_C f\,d\mu$ и $\int\limits_C g\,d\mu$ существуют и принадлежат множеству $(-\infty, +\infty]$ или оба принадлежат множеству $[-\infty, +\infty)$. Тогда интеграл $\int\limits_C (f + g)\,d\mu$ существует, принадлежит тому же множеству и справедливо равенство* (4).

Доказательство. Допустим, что $\int\limits_C f\,d\mu = +\infty$ и $\int\limits_C g\,d\mu \in (-\infty, +\infty]$. Тогда $\int\limits_C f^+ d\mu = +\infty$, $\int\limits_C f^- d\mu < +\infty$, $\int\limits_C g^- d\mu < +\infty$.

Из легко проверяемого неравенства $(f + g)^- \leqslant f^- + g^-$ следует, что интеграл $\int\limits_C (f + g)^- d\mu$ конечен. Поэтому интеграл $\int\limits_C (f + g) d\mu$ существует. Осталось доказать, что он равен $+\infty$. Поскольку $f^+ \leqslant (f + g)^+ + g^-$, то предполагая иное, получим противоречие:

$$+\infty = \int\limits_C f^+ d\mu \leqslant \int\limits_C (f + g)^+ d\mu + \int\limits_C g^- d\mu < +\infty . \square$$

10. Теорема. (Лебега о мажорируемой сходимости). *Пусть* $C \in \Sigma$, $f_n \in L(\mu, C)$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$, $f : C \to [-\infty, +\infty]$ *и для всех* $t \in C$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) \in [-\infty, +\infty]$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t). \quad (8)$$

Пусть еще $g \in L(\mu, C)$ *и*

$$|f_n(t)| \leqslant g(t) \text{ для всех } t \in C \text{ и для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Тогда $f \in L(\mu, C)$ *и справедливо равенство*

$$\int\limits_C f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_C f_n\,d\mu. \quad (10)$$

Доказательство. Обозначим

$$h_n'(t) = \inf_{k \geqslant n} f_k(t),\; h_n''(t) = \sup_{k \geqslant n} f_k(t) \text{ для всех } t \in C.$$

Ясно, что последовательность (h_n') возрастает, последовательность (h_n'') убывает на C и

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} h_n'(t) = \lim_{n\to\infty} h_n''(t), \quad (11)$$

$$-g(t) \leqslant h_n'(t) \leqslant f_n(t) \leqslant h_n''(t) = g(t) \quad (12)$$

для всех $t \in C$ и $n \in \mathbb{N}$.

По теореме 4 о монотонности интеграла из неравенств (12) и из условия $g \in L(\mu, C)$ следует, что все h_n', $h_n'' \in L(\mu, C)$. Кроме того, из (8) и (9) следует, что $|f(t)| \leqslant g(t)$ на C. По теореме 6 отсюда следует, что и $f \in L(\mu, C)$.

По теореме 8 о линейности интеграла

$$h'_n + g\,,\ g - h''_n \in L(\mu\,, C) \text{ для каждого } n \in \mathbb{N}.$$

Из неравенств (5) следует, что функции $h'_n + g$ и $g - h''_n$ неотрицательны. Ясно также, что последовательности $(h'_n + g)$ и $(g - h''_n)$ возрастают. Для каждого $t \in C$ из (11) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \left[h'_n(t) + g(t)\right] = f(t) + g(t)\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[g(t) - h''_n(t)\right] = g(t) - f(t)\,.$$

Таким образом, к последовательностям $(h'_n + g)$ и $(g - h''_n)$ применима теорема Б. Леви (теорема 1 §3). Применяя эту теорему, получим

$$\int_C (f + g)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_C (h'_n + g)\, d\mu\,,$$

$$\int_C (g - f)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_C (g - h''_n)\, d\mu\,.$$

Отсюда по теореме 8 о линейности интеграла

$$\int\limits_C f\,d\mu + \int\limits_C g\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_C h'_n\,d\mu + \int\limits_C g\,d\mu\,,$$

$$\int\limits_C g\,d\mu - \int\limits_C f\,d\mu = \int\limits_C g\,d\mu - \lim_{n\to\infty} \int\limits_C h''_n\,d\mu\,.$$

Из этих равенств и из конечности интеграла $\int\limits_C g\,d\mu$ вытекают равенства

$$\int\limits_C f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_C h'_n\,d\mu\,,\quad \int\limits_C f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_C h''_n\,d\mu\,.$$

Кроме того, из неравенств (12) ясно, что

$$\int\limits_C h'_n\,d\mu \leqslant \int\limits_C f_n\,d\mu \leqslant \int\limits_C h''_n\,d\mu\,,\ n\in\mathbb{N}.$$

Отсюда ясно, что справедливо искомое равенство (10). □

11.Теорема. *Пусть* $C \in \Sigma$, $f \in L(\mu, C)$. *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta > 0$ *такое, что для любого* $A \in \Sigma$, $A \subset C$, $\mu A < \delta$, *выполнено:*

$$\left| \int_A f \, d\mu \right| < \varepsilon .$$

Доказательство. Докажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : A \in \Sigma, A \subset C, \ \mu A < \delta \ \Rightarrow \int_A | f | d\mu < \varepsilon.$$

Тогда утверждение теоремы будет выполнено, т.к. $\left| \int_A f \, d\mu \right| \le \int_A | f | d\mu$ по теореме 3. Предположим обратное:

$\exists \varepsilon > 0 \ \ \forall \delta > 0 : \ \exists A \in \Sigma, A \subset C, \mu A < \delta, \ \int_A | f | d\mu \ge \varepsilon$. Зафиксируем такое число $\varepsilon > 0$. Для каждого натурального k положим $\delta_k = 2^{-k}$ и найдем $A_k \in \Sigma$, $A_k \subset C$, такие, что $\mu A_k < \delta_k$, $\int_{A_k} | f | d\mu \ge \varepsilon$. Пусть $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Имеем: $B_1 \supset B_2 \supset \ldots,\ B_n \in \Sigma\ \forall n \in \mathbb{N},\quad \mu B_n \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu A_k = \sum_{k=n}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-n+1}$.

По теореме 6 §2 гл.1 о непрерывности меры $\mu B = \lim_{n\to\infty} \mu B_n = 0$. По теореме 5 §3 $\int_B |f|\,d\mu = 0$. Теперь рассмотрим меру $\mu_{|f|}$ на сигма-алгебре Σ, которую можно определить вследствие теоремы 6 §3 равенством $\mu_{|f|}A = \int_A |f|\,d\mu\ \forall A \in \Sigma$. По теореме о непрерывности меры $\mu_{|f|}B = \lim_{n\to\infty} \mu_{|f|}B_n = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{B_n} |f|\,d\mu$. Однако по построению $A_n \subset B_n$, поэтому по свойству (c) §2 получаем: $\int_{B_n} |f|\,d\mu \ge \int_{A_n} |f|\,d\mu \ge \varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ зафиксировано. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание. Свойство, доказанное в теореме 11, называется *абсолютной непрерывностью интеграла.*

§5. Понятие «почти всюду»

1. Определение. Пусть (S,Σ,μ) – пространство с мерой, $C\in\Sigma$. Утверждение $P(t), t\in C$, *верно почти всюду на* C (или *почти для всех* $t\in C$), если существует множество $N\in\Sigma$, $\mu N=0$, такое, что $\{t\in C : P(t) \text{ не верно}\}\subset N$.

2. Определение. Пусть $C\in\Sigma$, $f,g : C\to[-\infty;+\infty]$. Функции f и g называются *эквивалентными*, если $f(t)=g(t)$ почти для всех $t\in C$. Обозначение: $f\sim g$.

3. Лемма. Пусть $C\in\Sigma$, $f,g : C\to[-\infty;+\infty]$, $f\sim g$. Тогда функция f измерима в том и только в том случае, когда g измерима.

Доказательство. Пусть $N_0=\{t\in C : f(t)\neq g(t)\}$. Так как $f\sim g$, то $N_0\subset N, \mu N=0$. Допустим, f измерима. Докажем измеримость функции g (см. гл. 1, §3). Возьмем $\alpha\in\mathbb{R}$. Рассмотрим $g^{-1}(\alpha;+\infty]=\{t\in C : g(t)>\alpha\}$. Сравним это множество с множеством $f^{-1}(\alpha;+\infty]$. Пусть

$$N_1 = \{t \in C : g(t) > \alpha,\ f(t) \le \alpha\}, \qquad N_2 = \{t \in C : g(t) \le \alpha,\ f(t) > \alpha\}.$$

Тогда $g^{-1}(\alpha ; +\infty] = \left(f^{-1}(\alpha ; +\infty] \sqcup N_1\right) \setminus N_2$ (докажите равенство этих множеств самостоятельно!).

Так как μ – полная мера, $N_1, N_2 \subset N, \mu N = 0$, то $N_1, N_2 \in \Sigma$, $\mu N_1 = \mu N_2 = 0$. Так как f измерима, то $f^{-1}(\alpha ; +\infty] \in \Sigma$. Поэтому $g^{-1}(\alpha; +\infty] \in \Sigma$, функция g измерима.

Обратное утверждение доказывается заменой g на f. □

4. **Лемма.** Пусть $C \in \Sigma$, $f, g : C \to [-\infty ; +\infty]$ – измеримые функции, $f \sim g$. Если один из интегралов $\int\limits_C g\, d\mu$, $\int\limits_C f\, d\mu$ определен, то определен и второй, причем для любого $A \subset C, A \in \Sigma$,

$$\int\limits_A g\, d\mu = \int\limits_A f\, d\mu .$$

Доказательство. Пусть, например, $\int\limits_C f\,d\mu$ определен, $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$. Обозначим

$$C_1 = \{t \in C : g(t) > 0,\ f(t) \le 0\},\ C_2 = \{t \in C : g(t) \le 0,\ f(t) > 0\}.$$

Тогда по определению $g^+ = \max(0, g)$, $f^+ = \max(0, f)$ имеем:

$$\{t : g^+(t) > 0\} = \{t : g(t) > 0\} = \left(\{t : f(t) > 0\} \sqcup C_1\right) \setminus C_2 = \left(\{t : f^+(t) > 0\} \sqcup C_1\right) \setminus C_2,$$

$C_1, C_2 \subset N_0 = \{t \in C : f(t) \ne g(t)\} \subset N$, $\mu N = 0$, следовательно, в силу полноты меры μ, $\mu C_1 = \mu C_2 = 0$. Получаем:

$$\int\limits_C g^+ d\mu = \int\limits_{C \cup C_1} f^+ d\mu - \int\limits_{C_2} f^+ d\mu = \int\limits_C f^+ d\mu < +\infty, \qquad (1)$$

следовательно, $\int\limits_C g\,d\mu$ тоже определен.

Рассмотрим $\int\limits_A g\,d\mu = \int\limits_A g^+\,d\mu - \int\limits_A g^-\,d\mu$. Аналогично (1) имеем:

$$\int_A g^+ d\mu = \int_A f^+ d\mu, \quad \int_A g^- d\mu = \int_A f^- d\mu ,$$

то есть $\int_A g\, d\mu = \int_A f\, d\mu$, что и требовалось доказать. □

5. Замечание. Лемма 4 означает, что интеграл Лебега «не различает» эквивалентные функции.

Если же функции f и g не эквивалентны, то интегралы по множеству $A_1 = \{t \in C : g(t) > f(t)\}$ или $A_2 = \{t \in C : g(t) < f(t)\}$ от функций f и g обязательно будут отличаться. Действительно, мера одного из этих множеств положительна (иначе $f \sim g$). Допустим, $\mu A_1 > 0$. Тогда по теореме 5 § 3 (о нулевом интеграле) $\int_{A_1} (g - f)\, d\mu \neq 0$, так как

$g - f : A_1 \to [0, +\infty]$. Значит, $\int_{A_1} g\, d\mu \neq \int_{A_1} f\, d\mu$.

6. Замечание. Для любой функции $f \in L(\mu, C)$ существует эквивалентная ей функция $g \in L(\mu, C)$, не принимающая бесконечных значений.

Действительно, если $\int\limits_C f^+ d\mu < +\infty$, $\int\limits_C f^- d\mu < +\infty$, то по свойству (f) §2 $\mu\{t \in C\ ;\ f^+(t) = +\infty\} = 0$, $\mu\{t \in C\ ;\ f^-(t) = +\infty\} = 0$.

Заменим значения функции f на этих множествах, например, нулевыми значениями. Получим эквивалентную f функцию $g : C \to (-\infty; +\infty)$. При этом $g \in L(\mu, C)$ по лемме 4.