

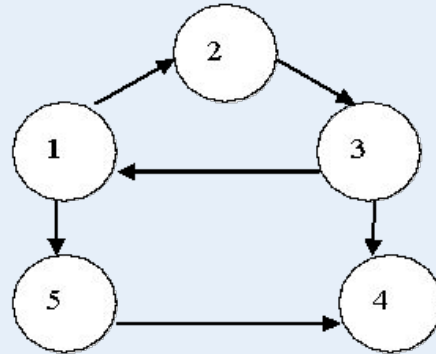
# **Модели конфликтов**

**Модели конфликтов с применением  
теории графов**

Структура-  
совокупность  
связей между  
элементами  
системы

**Определение.** Пусть  $X$  - конечное множество,  
 $(X, X) = \{(i, j) : i, j \in X, i \neq j\}$

**Определение.** **Ориентированным графом** называется пара  $G = (X, U)$ ,  $X$  - непустое множество,  $X$  - множество вершин,  $U$  - дуги



**Определение.** **Неориентированным графом** называется пара  $G = (V, E)$ , где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  конечное множество вершин,  
 $E = \{(v_i, v_j)\}$  множество ребер

**Путь** — это последовательность вершин  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , для которой существуют дуги  $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, \dots, v_{n-1} \rightarrow v_n$ . Говорят, что этот путь начинается в вершине  $v_1$ , проходит через вершины  $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ , и заканчивается в вершине  $v_n$ .

Путь называется:

- простым, если ни одна вершина не встречается более одного раза
- замкнутым, если  $v_{t+1} = v_1$
- полным, если содержит все вершины из  $V$

Контур- простой замкнутый путь в орграфе.

Вершина  $v$  достижима из вершины  $u$ , если существует путь из  $u$  в  $v$  ( $u \rightarrow v$ ).

**Утверждение.** Если  $u \rightarrow v$ , то существует простой путь из  $u$  в  $v$ .

Расстояние между  $u$  и  $v$  - длина кратчайшего пути ( $\rho(u,v)$ )

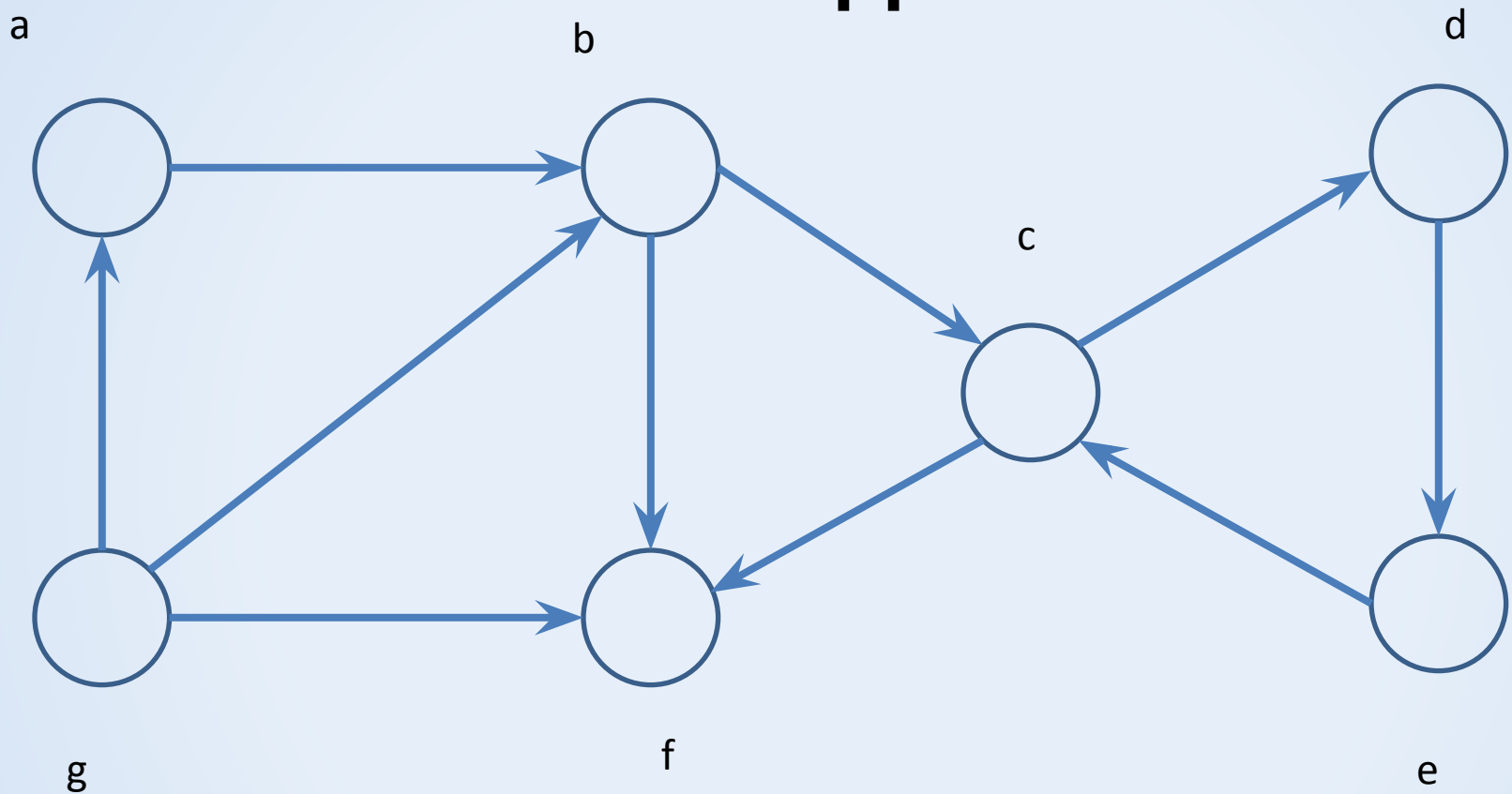
Вершины соединимы, если существует полупуть из  $u$  в  $v$  ( $u \rightarrow v$ ).

Полупуть в орграфе  $G=(V,A)$  – последовательность вершин и дуг

$v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_t, a_t, v_{t+1}$

$a_i = (v_i, v_{i+1})$  или  $(v_{i+1}, v_i)$

# Примеры путей различного вида



Цепью в графе  $G=(V,E)$  называется последовательность вершин и ребер  $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), \dots, (v_t, v_{t+1}), v_{t+1}$

Простая замкнутая цепь называется циклом

Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий; в противном случае граф называется несвязным.

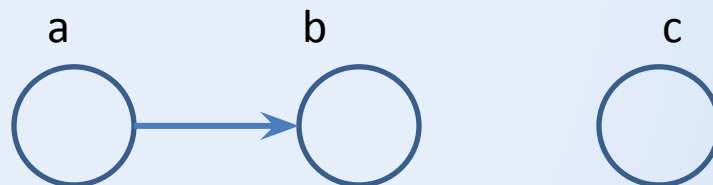
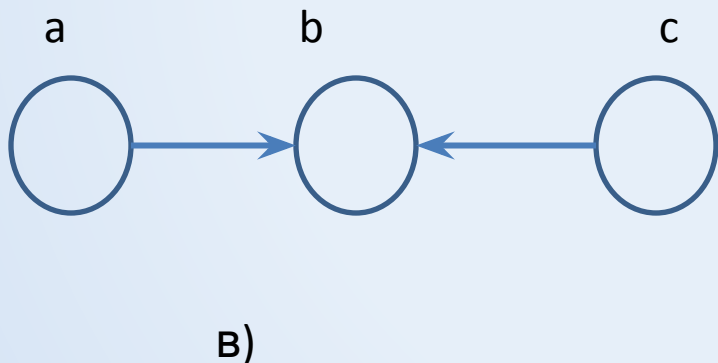
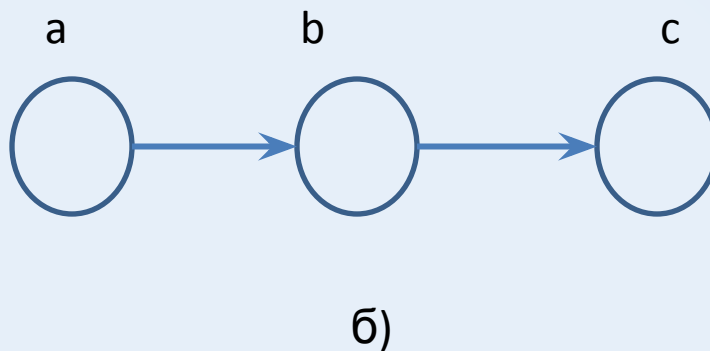
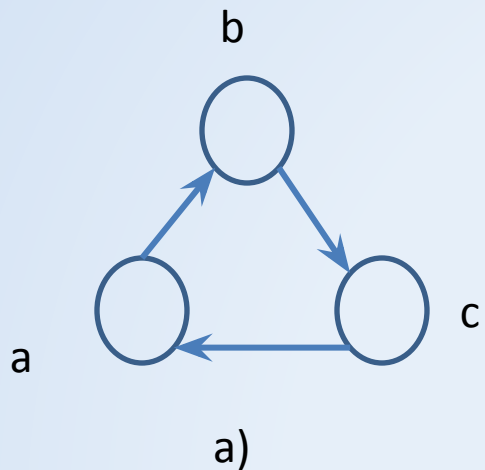
Дерево представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину (корень) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются ветвями.

**Утверждение.** Орграф сильно связан тогда и только тогда, когда в нем имеется полный замкнутый путь.

**Утверждение.** Орграф односторонне связан тогда и только тогда, когда в нем имеется полный путь.

**Утверждение.** Орграф слабо связан тогда и только тогда, когда в нем имеется полный полупуть.

# Категории связности графов



Матрица смежности орграфа  $G=(V,A)$  – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in A \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Матрица достижимости  $R$  орграфа  $G=(V,A)$  – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \rightarrow v_j \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Матрица расстояний  $R_0$  орграфа  $G=(V,A)$  – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$\rho_{ij} = \rho_{ij}(v_i, v_j)$$



# Модели структурного баланса



Неориентированный граф  $G=(V,E)$

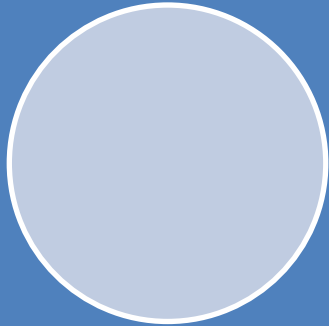
Знак цепи в графе- произведение знаков ребер образующих цепь.

Модель структурного баланса – знаковый граф  $G=(V,E)$ .

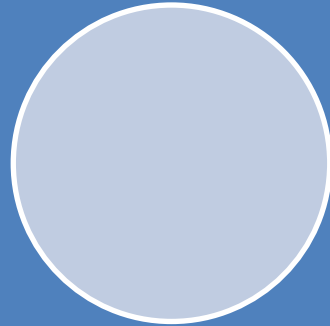
Положительный знак ребра  $(a,b)$  – симпатия между членами группы  $a$  и  $b$

Отрицательный знак ребра  $(a,b)$  – антипатия между членами группы  $a$  и  $b$

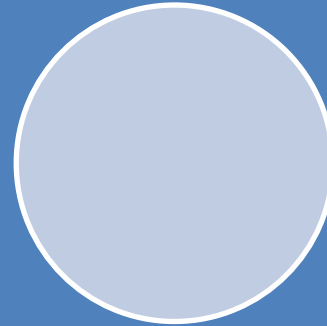
# Ограничения базовой модели:



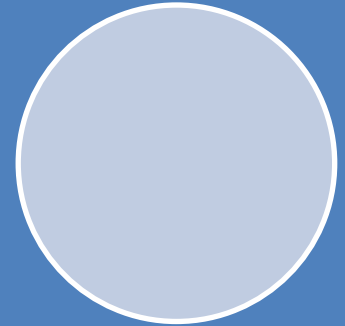
Симпатия не обязательно симметрична



Модель не учитывает силу отношения симпатии (антипатии)



Модель не учитывает степени сбалансированности (несбалансированности) социальной группы в целом.

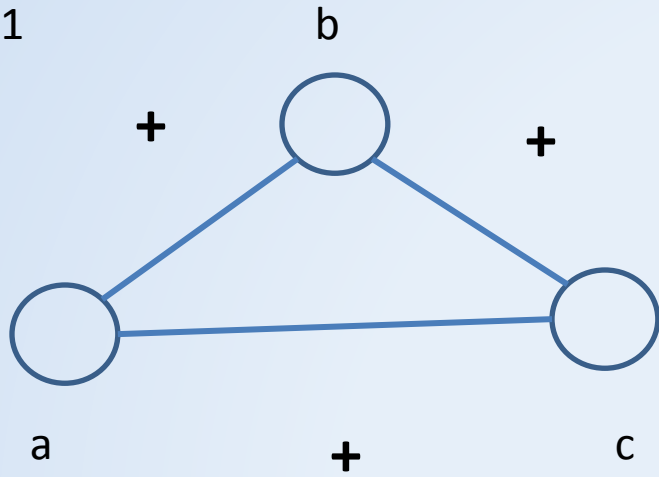


Модель не учитывает типы сбалансированности (несбалансированности)

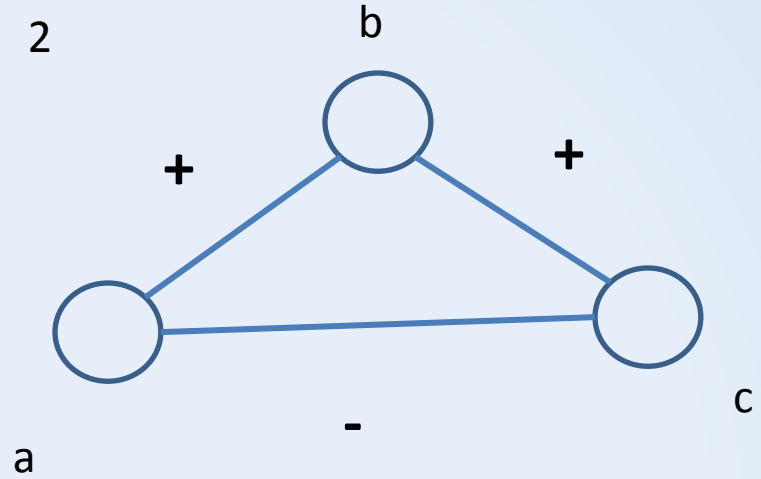


# Типы отношений в группах из трех человек

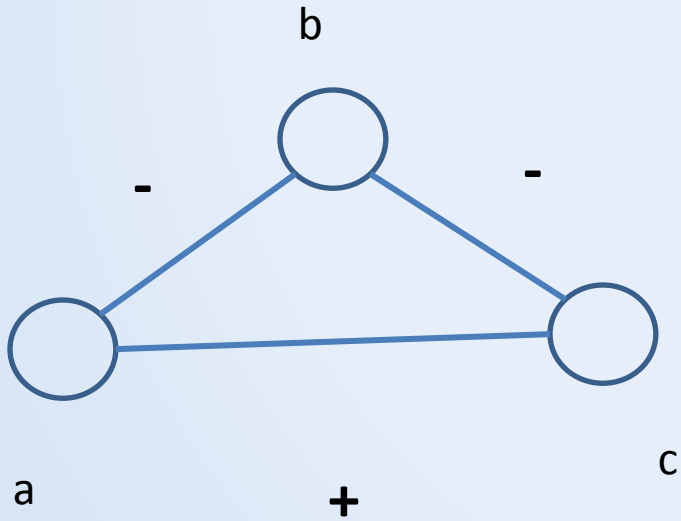
1



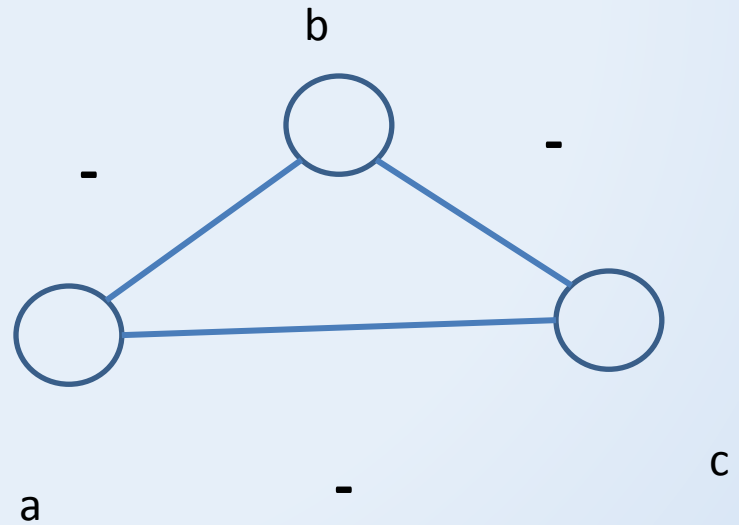
2



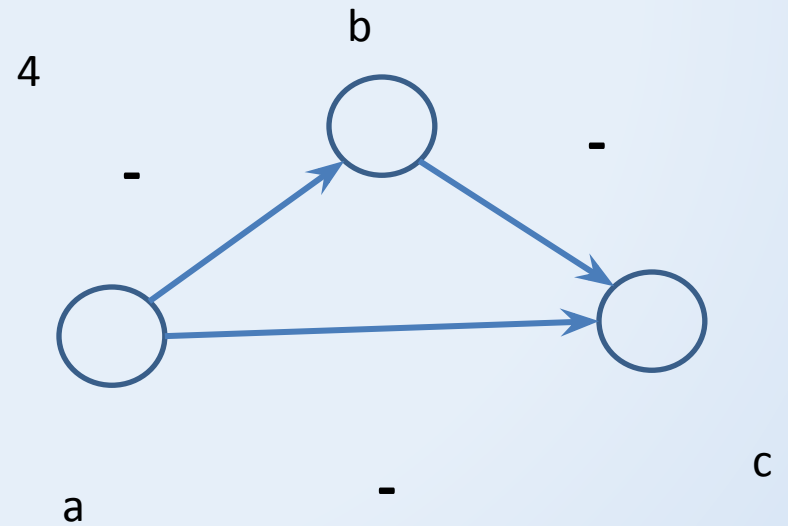
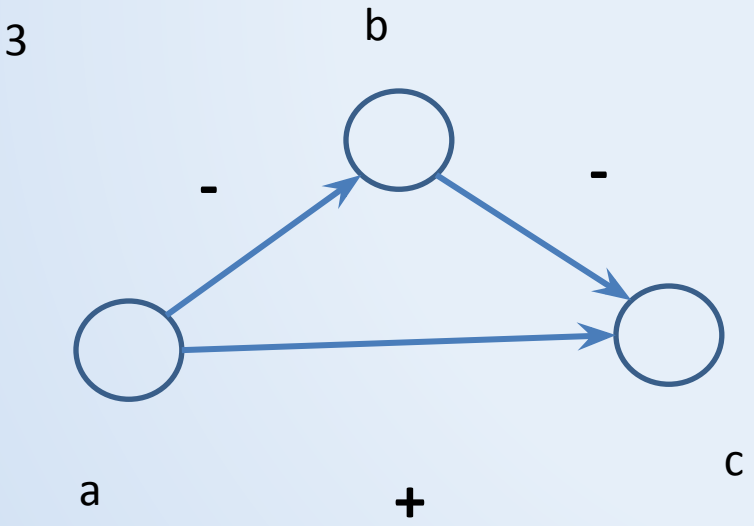
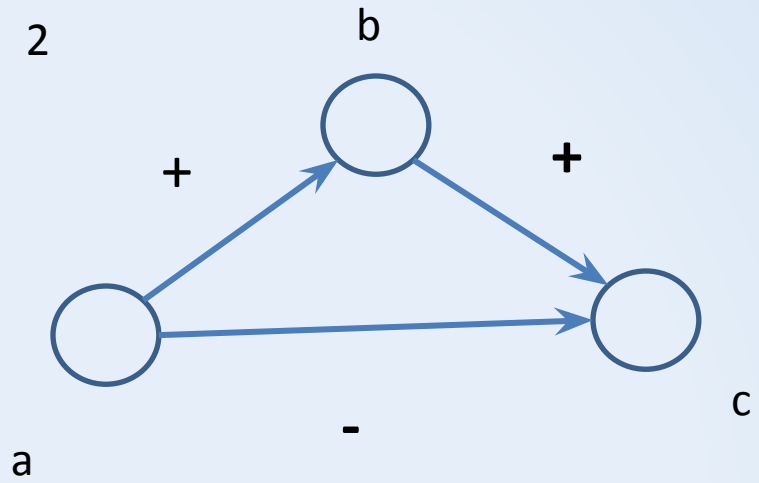
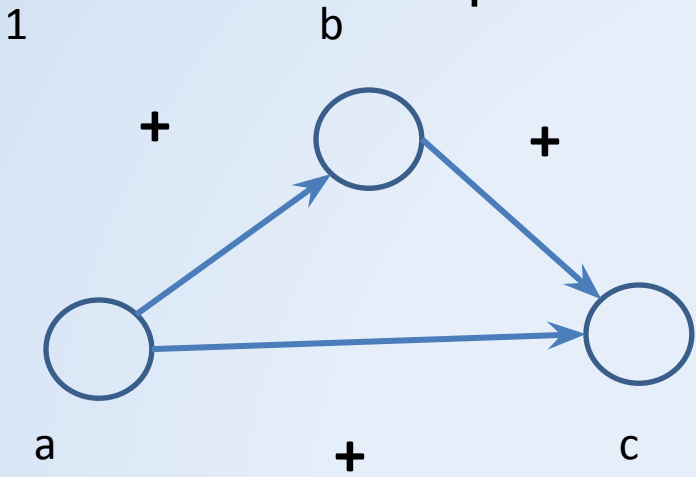
3



4



# Устойчивые конфигурации в модели направленных отношений из трех человек (монография В.А. Светлова 2001)



Граф  $G$  сбалансирован, если он не содержит отрицательных циклов.

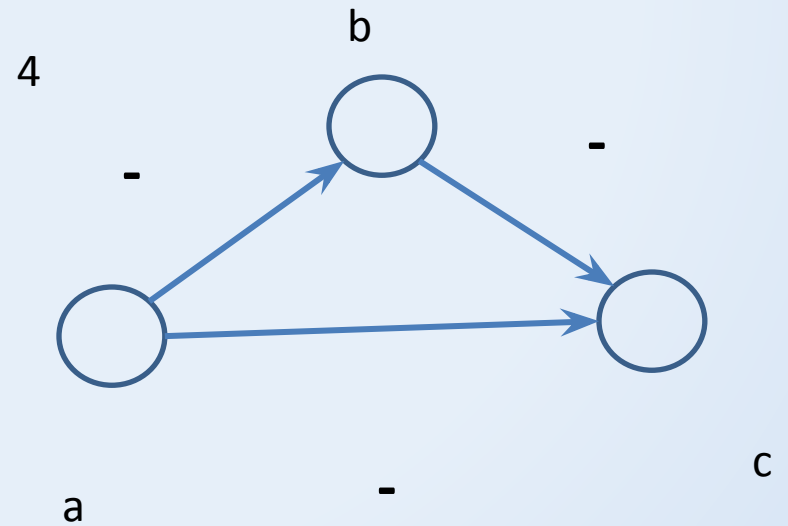
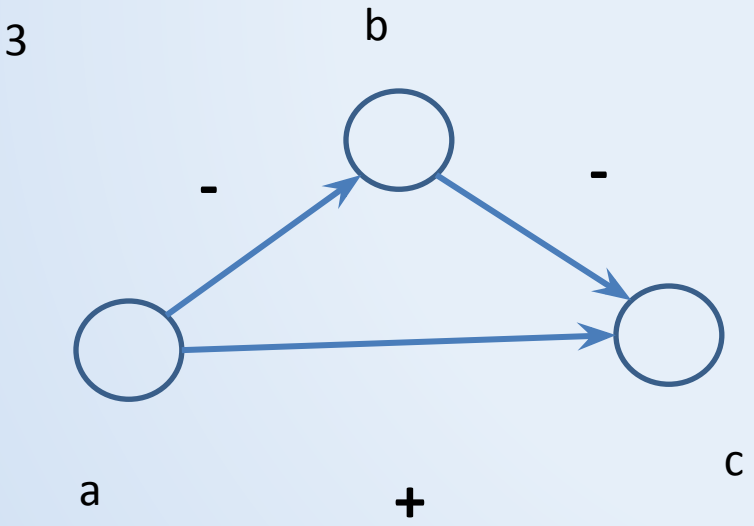
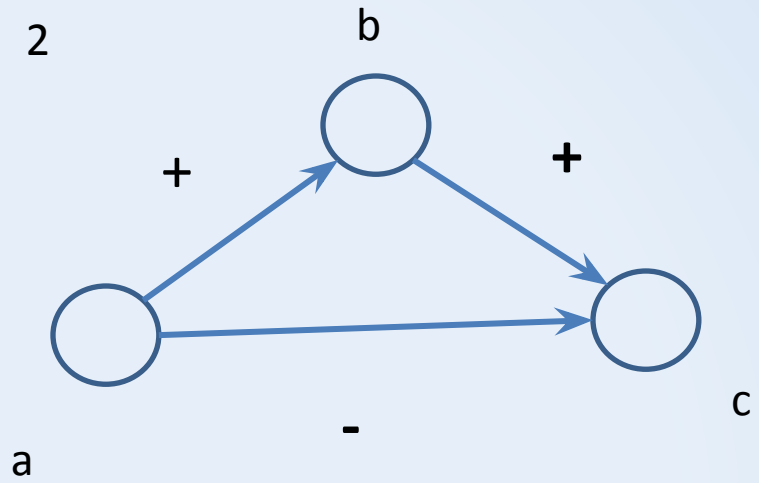
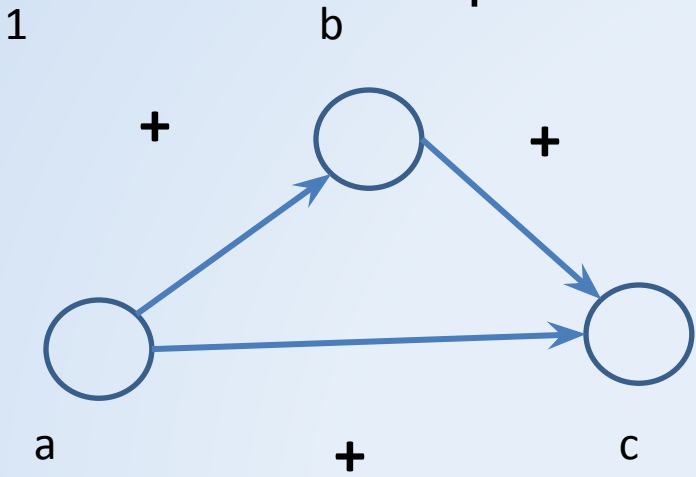
Теорема (Харари).

Для знакового графа  $G=(V,A)$  следующие утверждения эквивалентны:

- граф  $G$  сбалансирован;
- Любые две цепи между вершинами  $u$  и  $v$  имеют одинаковый знак;
- множество  $V$  можно разбить на 2 непересекающихся множества  $A$  и  $B$  так, что каждое «+» ребро соединяет вершины из одного множества и каждое «-» ребро соединяет вершины из различных множеств.

Граф  $G$  сбалансирован, если он не  
содержит отрицательных  
полуконтуров

# Устойчивые конфигурации в модели направленных отношений из трех человек (монография В.А. Светлова 2001)

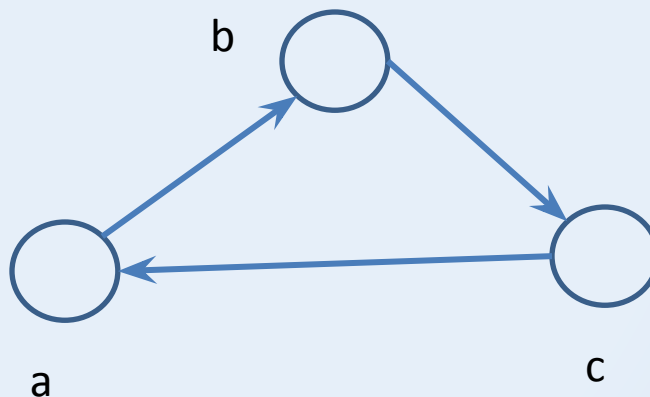
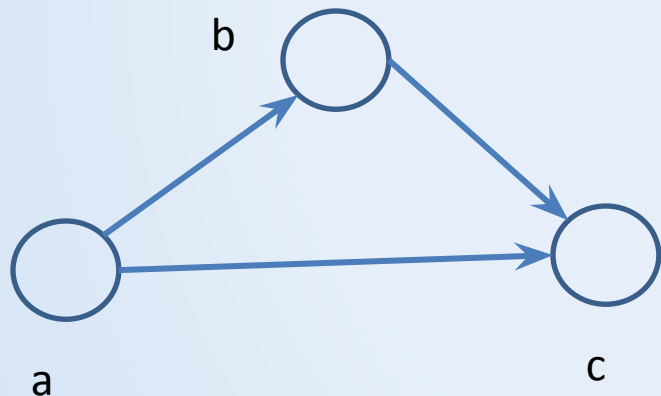


# Конфликты альтернатив

Орграф  $T=(V,A)$  называется турнирным, если для любой пары вершин  $u,v \in V$  существует ровно одна дуга  $(u,v) \in A$  либо  $(v,u) \in A$

Победитель турнира:

$$s(u^*) = \max_{u \in V} s(u)$$



**Утверждение.** В турнире существует полный простой путь.

$s(u)$  – число выходных дуг для вершины  $u$



# Статусные конфликты

Математическая модель – связный бесконтурный орграф

$$D=(V,A)$$

Дуга  $(u,v)$

Путь от  $u$  до  $v$

Длина кратчайшего пути от  $u$  до  $v$  – уровень  $v$  относительно  $u$

$$t_D:V \rightarrow Z_+$$

1°. Если вершина  $u$  не имеет выходных дуг, то  $t_D(u)=0$ .

2°.  $D', D, u$ , то  $t_{D'}(u) > t_D(u)$

3°.  $D, \bar{u}, \sum_k n_k(u) > t_D(u)$

$$n_k(u)$$

Теорема (Кемени-Снелл). Мера статуса  $h_D(u)$  обладает следующими свойствами:

- 1) Удовлетворяет 1°- 3°
- 2) Если  $t_D$  - некоторая мера статуса, принимающая неотрицательные численные значения и удовлетворяющая 1°- 3°, то для любой  $u$  -  $t_D(u) > h_D(u)$

Если  $u \rightarrow v$ , то уровень  $v$  относительно  $u$  - длина максимального пути от  $u$  до  $v$

$$V=L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m, L_p \cap L_q = \emptyset$$

Упорядоченные разбиения-расслоения

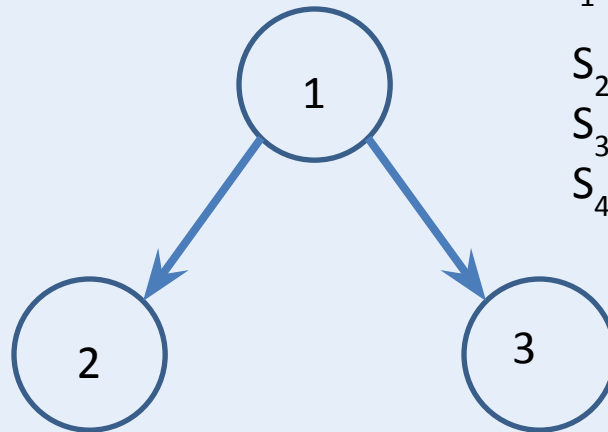
Мера статуса сотрудника  $u$  в организации  $D$ :

$$G_D^S(u) = \sum_{k=1}^m (k - p) b_k(u)$$

$u$ - принадлежит слою  $L_p$  в расслоении  $S$

$b_k(u)$  – число вершин в слое  $L_k$ , достижимых из  $u$

$m$  – число слоев в расслоении  $S$



$$S_1=L_1 \cup L_2, L_1=\{1\}, L_2=\{2,3\}$$

$$S_2=L_1 \cup L_2, L_1=\{1,2\}, L_2=\{3\}$$

$$S_3=L_1, L_1=\{1,2,3\}$$

$$S_4=L_1 \cup L_2, L_1=\{2\}, L_2=\{1,3\}$$

$$S_5=L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

$S$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$
$G^S(u)$	2	1	0	-1	-3

# Когнитивные карты конфликтных процессов

Элементы системы. Обозначаются вершинами орграфа

Значимые связи обозначают дугами.  $(u,v)$  – элемент  $u$  непосредственно влияет на элемент  $v$ .

Элементом могут приспываться числовые значения.

Дуга  $(u,v)$  : «+» или «-»

Обратные связи - контуры

Два типа контуров: положительные (положительная обратная связь) и отрицательные (отрицательная обратная связь)

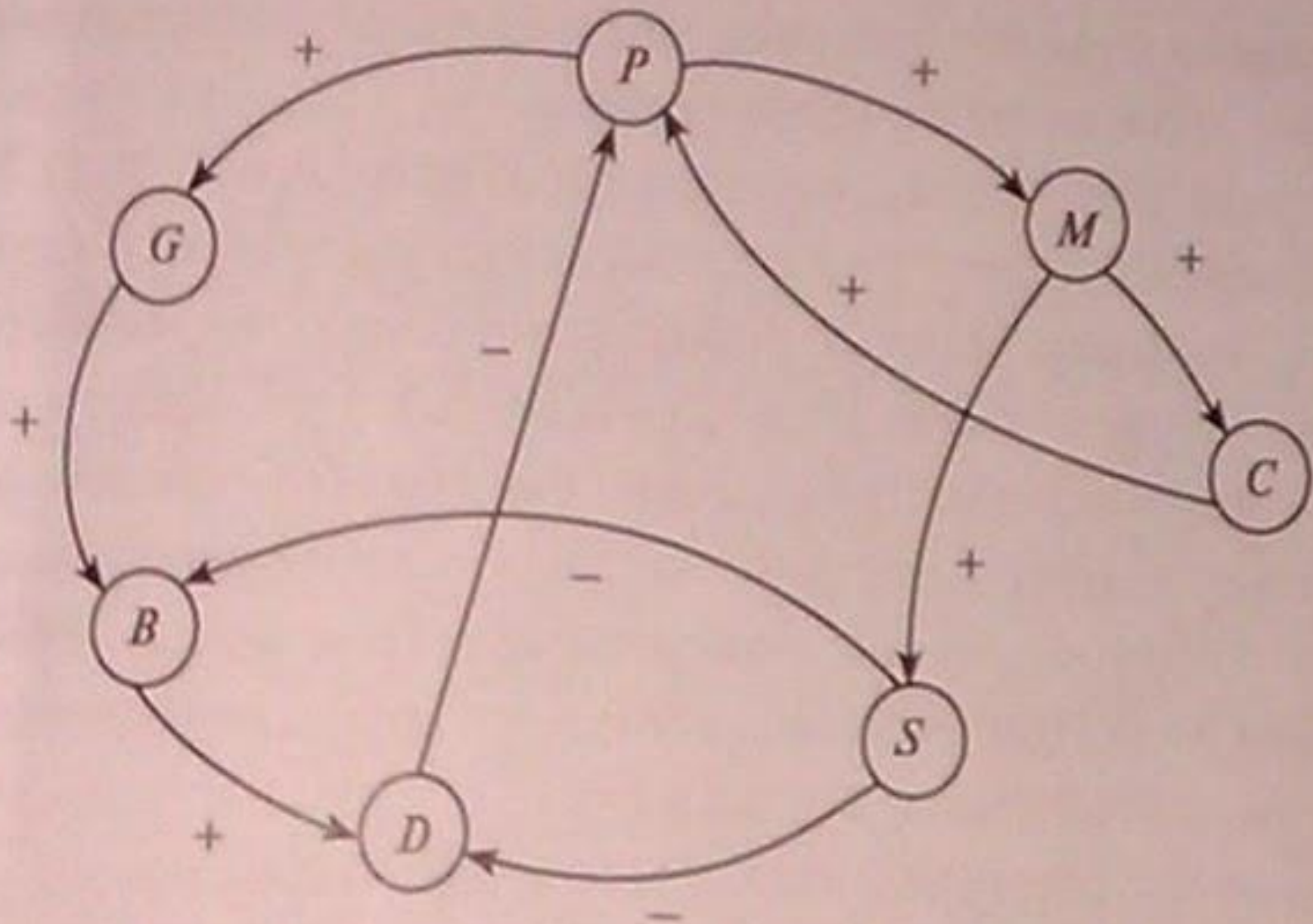
Контур усиливает отклонение тогда и только тогда, когда он положителен.

$$R = \sum_{i=1}^m R_i$$

	Система бесконфликтна	Система конфликтна
Система устойчива	$-1 < R < 0$	$0 \leq R \leq 1$
Система неустойчива	$\infty < R \leq -1$	$1 \leq R \leq \infty$

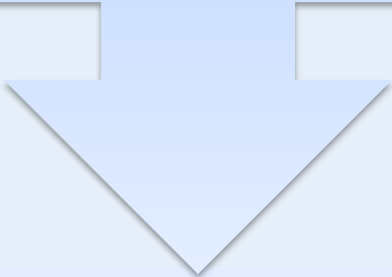
# Пример

- $P$ - численность городского населения
- $G$ -количество мусора на единицу площади
- $B$  – бактериологическая зараженность на единицу площади
- $D$  –число заболеваний
- $S$  – число очистных сооружений
- $C$  –миграция в город
- $M$  –улучшение условий жизни в городе



# **Сетевое планирование и управление**

**Сетевое планирование и управление (СПУ)** – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок



**Объект управления** - коллективы исполнителей, располагающие определенными ресурсами и выполняющие комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку новой услуги – исследование системы управления, реализацию комплекса управленческих процедур и операций для достижения стратегической организации и др.



Комплекс работ (комплекс операций, или проект) - любая достаточно сложная задача, решение которой требует выполнения большого количества разнообразных работ

Сетевая модель - это план выполнения некоторого комплекса работ, заданный в специфической форме сети (дугам поставлены в соответствие интервалы времени), графическое изображение которой называют *сетевым графиком*.

## Работа

действительная работа -  
протяженный во времени  
процесс, требующий затрат  
ресурсов

ожидание - протяженный во  
времени процесс, не  
требующий затрат труда

зависимость, или  
фиктивная работа, -  
логическая связь между  
двумя или несколькими  
работами, не требующими  
затрат труда, материальных  
ресурсов или времени.



## Событие

момент завершения какого-либо  
процесса, отражающий  
отдельный этап выполнения  
проекта

может быть частным результатом  
отдельной работы или суммарным  
результатом выполнения  
нескольких работ

# Общие черты и особенности проектов

Проект определяется множеством работ.  
Проект завершен, если все работы  
выполнены

Для каждой работы указано подмножество  
работ, которые обязательно должны  
выполняться

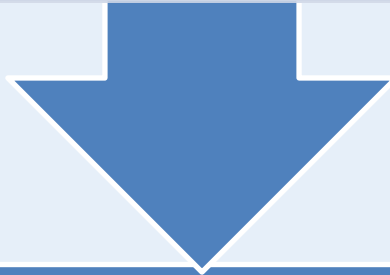
Для каждой работы в простейшем случае  
точно указано время ее выполнения

Начатая работа продолжается без перерыва  
до завершения. Последующая работа не  
может начинаться, пока не завершена  
предыдущая работа

Цели – выполнить проект в кратчайшие  
сроки, не превышающие заданную величину  
с минимальными затратами каких-то  
ресурсов

# Путь

любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей работы



# Критический путь

наиболее продолжительный путь в сетевом графике

работы этого пути определяют общую продолжительность работы над проектом

# Метод критического пути

1. Список работ, входящих в проект:  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$

Продолжительность выполнения:  $t(s_i)$ .

2. Список предшествующих работ  $\Gamma^{-1}(s_i)$

**Определение.** Наиболее ранним возможным сроком наступления  $j$ -го события является наиболее ранний возможный срок завершения всех работ, подходящих к  $j$ -му узлу

$\lambda_j^p$  - наиболее ранний возможный срок наступления,  $t_{ij}$  - продолжительность работы,  $\lambda_0^p = 0$

$$\lambda_j^p = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} \{ \lambda_i^p + t_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$T_{\text{кр}} = \lambda_n^p$$

## Резерв времени и критический путь

**Определение.** Наиболее поздним допустимым сроком наступления  $i$ -го события является наиболее поздний срок завершения всех работ, идущих к  $i$ -му узлу, не влияющий на время завершения всего проекта за  $T_{кр}$ ,  $T_{кр} = \lambda_n^п$ .  
Начинаем с события  $n$  до 0:

$$\lambda_i^п = \min_{j \in \Gamma_i} \{ \lambda_j^п - t_{ij} \} \quad (2)$$

$j^*(i)$  - номер, при котором достигается минимум.

**Определение.** Полный резерв времени  $r_{ij}^п$  для работы  $(i,j)$  есть максимальная продолжительность задержки работы, не вызывающая задержки в осуществлении всего проекта.

$$r_{ij}^п = \lambda_j^п - \lambda_i^п - t_{ij}$$

**Определение.** Свободный резерв времени  $r_{ij}^c$  для работы (i,j) является показателем максимальной задержки работы (i,j), не влияющий на начало последующих работ

$$r_{ij}^c = \lambda_j^p - \lambda_i^p - t_{ij}$$

**Определение.** Независимый резерв времени  $r_{ij}^H$  для работы (i,j) представляет собой максимальную продолжительность задержки работы (i,j) без задержки последующих работ, если все предшествующие работы заканчиваются как можно позже.

$$r_{ij}^H = \max \{0, \lambda_j^p - \lambda_i^H - t_{ij}\}$$

**Утверждение 1.** Полный резерв работ, лежащих на критическом пути равен нулю.

**Утверждение 2.** Увеличение продолжительности не критических работ за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в который войдет эта работа.

Резервы связаны соотношением:

$$r_{ij}^H \leq r_{ij}^c \leq r_{ij}^П$$

# Поиск нового критического пути

Работа (k,l)

- Узел с номером k принадлежит новому критическому пути
- Если узел с номером j ( $j \leq k$ ) принадлежит критическому пути, то номер предшествующего узла равен  $i(j)$  (формула (1))
- Начальный узел всегда имеет номер 0
- Узел с номером l принадлежит новому критическому пути
- Если узел с номером j ( $j \geq l$ ) принадлежит критическому пути, то номер следующего за ним узла равен  $i^*(j)$  (формула (2) )
- Конечный узел всегда имеет номер n



# Оптимизация плана комплекса работ

Продолжительность работы  $(i,j)$   $y_{ij}$  принадлежит  $[L_{ij}, U_{ij}]$

Затраты на выполнение работы  $b_{ij} - a_{ij}y_{ij}, a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$

Желаемая продолжительность исполнения проекта  $T_0$

$t_i$  - неизвестный момент наступления события  $i$

Математическая модель:

$$\sum_{(i,j) \in S} a_{ij}y_{ij} \rightarrow \max_{t_i, y_{ij}}$$

$$t_i - t_j + y_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in S$$

$$-t_0 + t_n \leq T_0,$$

$$L_{ij} \leq y_{ij} \leq U_{ij}, \quad (i, j) \in S$$

# Правила построения

В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.

В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий, т.е. событий, которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного.

В сети не должно быть контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.

Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой (стрелкой). Чтобы выполнить это требование, в некоторых случаях приходится вводить *фиктивное событие и фиктивную работу, изображаемую на графике пунктирной линией.*

В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

Сетевой график должен быть упорядочен