Транспортная задача

Транспортная задача

- Задачи, относящиеся к транспортным
  - Оптимальное распределение объемов выпуска промышленной продукции между заводами-изготовителями и др.
  - Отдельные задачи оптимальной загрузки промышленного оборудования
  - Взаимная привязка грузопотоков прямого и обратного направлений
  - Привязка пунктов отправления к пунктам назначения
  - Прикрепление потребителей ресурса к производителям

- ОСОБЕННОСТИ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ
  - **Каждая неизвестная встречается только в двух уравнениях системы ограничений**
  - **Все переменные выражаются в одинаковых единицах измерения**
  - **Условия задачи описываются только уравнениями**
  - **Распределению подлежат однородные ресурсы**

Число пунктов производства – m

$a_i, i = 1,2,..,m$ –количество продукта, произведенного на i пункте

Количество пунктов потребления – n

$b_j, j = 1,2,..,n$ –потребность j пункта потребления

c_{ij} - цена перевозки единицы продукта из i пункта производства в j пункт.

Классическая постановка задачи

Требуется организовать перевозку продукции из пункта производства в пункт потребления, так чтобы весь товар из пунктов производства был вывезен, удовлетворить потребности пунктов потребления и минимизировать стоимость перевозки.

Математическая модель транспортной задачи

x_{ij} - количество единиц продукта, перевозимого с i пункта производства в j пункт

количество продукта, вывезенного с i пункта производства

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1,2,..,m$$

количество единиц продукта

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = 1,2,..,n$$

Критерий – суммарные затраты

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

Исходные данные

Поставщики	Потребители				Запасы (объемы отправления)
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	⋮
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потребность	b_1	b_2	…	b_n	

Свойства транспортной задачи

Утверждение 1. Транспортная задача разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие баланса:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

Такая транспортная задача называется закрытой.

Утверждение 2. Ранг матрицы ограничений транспортной задачи равен m+n-1

Приведение открытой транспортной задачи к замкнутой

Пусть выполнено: $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$

Вводиться фиктивный пункт потребления:

$c_{i\,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}$, $\sum_{i=1}^{m} x_{i\,n+1} = b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$.

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n+1},$$

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n+1}.$$

Начальная таблица транспортной задачи.
Метод северо-западного угла.

1. Выбрали клетку с координатами (i,j) –свободная северо-западная.
2. $a_i < b_j$, то $x_{ij} = a_i$. Ставим прочерки во всех свободных клетках i строки

   $a_i > b_j$, то $x_{ij} = b_j$. Ставим прочерки во всех свободных клетках j столбца

   $a_i = b_j$, то $x_{ij} = b_j$. Ставим прочерки во всех свободных клетках j столбца либо i строки
3. Пересчитываем

   $a_i := a_i - x_{ij}$

   $b_j := b_j - x_{ij}$
4. До тех пор пока везде не будут числа или прочерками.

   Клетки в которых числа - базисные. Клетки с прочерками не базисные. Количество базисных клеток=m+n-1.

Метод минимального элемента.

В методе северо-западного угла выбираем не самую северо-западную клетку, а клетку с минимальной стоимостью перевозки.

Метод потенциалов.

Шаг1. Проверка на оптимальность

Шаг 2. Если опорное решение не оптимально, то шаг 1.

Проверка на оптимальность.

В каждой базисной клетке (i,j): $u_i + v_j = c_{ij}$

Уравнение данного вида: m+n-1

Число переменных: m+n

Положим $u_1 = 0$

В каждой не базисной клетке $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$

Если все $\Delta_{ij} \le 0$, то опорное решение оптимальное.

Иначе, сществует по крайней мере одна (k,l) $\Delta_{kl} > 0$

Определение. Циклом назовем последовательный набор клеток, в котором любые две клетки находятся в одной строке или столбце таблицы. И никакие три соседние клетки не находятся в одной стоке или столбце. Первая и последняя клетка цикла должна быть из одной строки или столбца.

Множество клеток с меткой «- » обозначим K^-

Константа пересчета:

$$\theta = \min_{(i,j)\in K^-} \{x_{ij}\}$$

Пересчет клеток цикла:

$$x_{ij} := \begin{cases} x_{ij} - \theta, (i,j) \in K^- \\ x_{ij} + \theta, (i,j) \in K^+ \end{cases}$$

Любую клетку с нулем выводим из базиса. В новой таблице в этой клетке ставим «–».

Если несколько нулей после пересчета, то выводим все равно только одну клетку из базиса, остальные считаем базисными.

Экономические задачи, которые сводятся к транспортной задаче

Отдельные поставки от определенных поставщиков некоторым потребителям должны быть исключены

На предприятии необходимо определит минимальные затраты на производство и транспортировку продукции

Ряд транспортных маршрутов, по которым необходимо доставить грузы имеют ограничения по пропускной способности

Поставки по определенным маршрутам обязательны и должны войти в оптимальный план независимо от того, выгодно это или нет

Распределение производства изделий между предприятиями

Необходимо максимизировать целевую функции задачи транспортного типа

Многопродуктовые транспортные задачи

В матрице перевозок, содержащей оптимальный план, определенные клетки оставались свободными.

Способ перехода:

Искусственное завышением затрат на перевозки Cij **в клетках, перевозки через которые следует запретить.**

Критерий оптимальности – сумма затрат на производство и транспортировку продукции.

По маршруту *AjBj* можно провести не более q единиц груза.

Bj –B'j и B''j

b'j = bj - q,

b''j = q

В первом столбце B'j в клетке i ставится искусственно завышенный тариф M (клетка блокируется).

Модели конфликтов

Принятие решений в конфликтных ситуациях

Математическая модель - игра.
Игра — это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Эти правила устанавливают:

- **выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;**
- **информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;**
- **плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.**

Классификация игр

По количеству игроков

По количеству стратегий

По характеру взаимоотношений между игроками

По свойствам функции выигрышей

По количеству ходов

По информированности игроков

Конфликты интересов

Антагонистические конфликты

Определение (матричной игры с нулевой суммой).

$S_1 = \{1,..,n_1\}$.

$S_2 = \{1,..,n_2\}$.

$$A_{n_1 \times n_2} = (a_{ij})$$

Матричной игрой с нулевой суммой наз. тройка объектов (S_1, S_2, A).

Смешанная стратегия 1-го игрока – вектор вероятности выбора стратегии $p = (p_1,.., p_{n_1})$.

$$P: \begin{cases} \sum_{i=1}^{n_1} p_i = 1 \\ p_i \geq 0 \end{cases},$$

Смешанная стратегия 2-го игрока – $q = \left(q_1, \dots, q_{n_2}\right)$.

$$Q: \begin{cases} \sum_{j=1}^{n_2} q_j = 1 \\ q_j \geq 0 \end{cases}$$

Чистая стратегия: $e^i = (0,..,0,1,0,..,0)$

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}a_{ij}p_iq_j$$

Тройка $\langle p^*,q^*,v\rangle$ называется оптимальным решением в смешанных стратегиях игры, где $v=H(p^*,q^*)$-цена игры, если:

$$H(p,q^*)\le v=H(p^*,q^*)\le H(p^*,q) \quad .(1)$$

Тройка $\langle i^*,j^*,v\rangle$ - оптимальное решение в чистых стратегиях, если

$$a_{ij^*}\le a_{i^*j^*}\le a_{i^*j}$$

Стратегия i_0 1-го игрока наз. максиминной, если

$$\min_j a_{i_0j}=\max_i\min_j a_{ij}=\underline{v}$$

Стратегия j_0 2-го игрока наз. минимаксной, если

$$\max_i a_{ij_0} = \min_j \max_i a_{ij} = \overline{v}$$

Лемма. Матричная игра разрешима в чистых стратегиях тогда и только тогда, когда $\underline{v} = \overline{v}$.

Правило построения решения:

Если матрица А имеет седловую точку (i_0, j_0).

В каждой стоке ищем минимальное значение и потом из всех минимумов выбираем максимум- это $\underline{v}$

В каждом столбце ищем максимум и из них выбираем минимум- это $\overline{v}$

Если $\underline{v} = \overline{v}$, то получили решение

Теорема фон Неймана-Нэша(основная теорема матричных игр)

Любая матричная игра разрешима в смешанных стратегиях, при этом

$$\max_p \min_q H(p,q) = \min_q \max_p H(p,q) = v$$

$\langle p^*, q^*, v \rangle$ - оптимальное решение, где p^* -смешанная максиминная стратегия $\min_q H(p^*, q) = \max_p \min_q H(p,q)$

где q^* -смешанная минимаксная стратегия $\max_p H(p, q^*) = \min_q \max_p H(p,q)$

Конфликты распределения

Кооперативные игры

Основные понятия и определения

Определение. Кооперативной игрой в форме характеристической функции называется пара $G=(N,v)$,

где $N=\{1,2,..,n\}$

v -функция, ставящая в соответствие каждому непустому подмножеству множества N вещественное число,

$v:2^N \to R$

Определение. Непустое подмножество S множества N называется коалицией.

$v(S)$ - максимальный выигрыш, который может получить коалиция S независимо от поведения других игроков.

Определение. Исходом игры называется вектор

$$x = (x_1, x_2, .., x_n),$$

где x_i - платеж i-му игроку

Если все игроки объединены в максимальную коалицию, то должно выполнятся условие коллективной рациональности

$$\sum_{i \in N} x_i = v(N) \qquad (1)$$

Определение. Исход, удовлетворяющий (1) и условию (2)

$$x_i \geq v(i), i \in N \qquad (2)$$

называется дележом. Множество всех дележей обозначается $D(v)$

Условие (2) – индивидуальная рациональность.

С-ядро

Дележ *x нестабилен* из-за коалиции $S \subset N$, если $v(S) > \sum_{i \in S} x_i$.
С-ядро кооперативной игры:

$$C(N, v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i \in N} x_i = v(N), \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall\, S \subset N \right\}.$$

.

Утверждение. С-ядро кооперативной игры является выпуклым многогранником

Цена Шепли:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}(v(S) - v(S \setminus \{i\}))$$

Простая игра :

$$v(S) = 0 \quad \text{или} \quad v(S) = 1 \quad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad S \subseteq N$$

Цена Шепли для простой игры:

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N, v(S)=1, v(S \setminus i)=0} \frac{(|S|-1)!(n-|S|)!}{n!}$$